École supérieure du professorat et de l'éducation Académie d'Orléans-Tours — UNIVERSITE D'ORLEANS	**2016-2017, M1-PE** Semestre **2**, session **1**

Éléments de correction et barème indicatif de l'épreuve du **17 mars 2017**

Rédaction et mise en forme : **J. TOROMANOFF et P. WIERUSZEWSKI**

PARTIE A (*13 points*)

EXERCICE 1

1. a) Le triangle représenté sur l'énoncé est rectangle (*angle droit codé*) ; donc, on peut utiliser une ligne trigonométrique pour calculer un angle : on n'a pas l'hypoténuse, on a les deux autres côtés, on va donc utiliser la tangente d'un angle.

On a : tan(α) = 25(m)/100(m) = 0,25.

A la calculatrice, on utilise la touche $\boxed{\text{arctan}}$ ou $\boxed{\tan^{-1}}$ ou $\boxed{2^{nd}\ \tan}$, suivant le modèle. Séquence caltoss, *mal rédigée* : 0,25 $\boxed{\tan^{-1}}$ ≈ 14,036° ≈ **14°** (*valeur arrondie au degré*).

Barème : **1,25** pt, dont **0,25** pt pour la référence explicite au triangle rectangle. *Et oui !*

1. b) On est toujours dans un triangle rectangle dont on connaît un angle et une longueur. Appelons ***l*** la longueur de la route. On a : sin(α) ≈ sin(14°) ≈ 145m/***l***, d'où ***l*** ≈ 145m/sin(14°) ≈ **599m**.

Barème : **1,25** pt.

EXERCICE 2

1. a) *Technique standard* : on calcule la durée ***t*** de la descente, on calcule ensuite la vitesse moyenne ***v*** avec cette durée et la longueur ***l*** de la piste.

- Durée ***t*** de la descente = 15h 3min 8s – 14h 58min 47s = **4min 21s** = **261s** ;
- *Rappel des formules* : ***l* = *v* × *t*** ; ***v* = *l* / *t*** et ***t* = *l* / *v***. Laquelle on choisit ? Celle qui donne la vitesse moyenne, c'est-à-dire : ***v*** = 3312m/261s = 3600s × 3,312km/261s ≈ **45,7 km/h**.

Barème : **1** pt = durée de la descente et **1,5** pts = vitesse moyenne, correctement arrondie.

2. b) On va réutiliser les formules ci-dessus. *Technique standard* : on calcule la durée ***t'*** de la descente du « pro » de la station ; on calcule ensuite la différence des durées.

- Calcul de ***t'***. On a ***t'*** = ***l***/100. Ce qui donne avec les bonnes unités : ***t'*** = 3,312km/(100km/h) = 0,03312h = 0,03312 × 60min = 1,9872min ≈ **1min 59s** ;
- Différence de durées à l'arrivée : 4min 21s – 1min 59s ≈ **2min 22s**.

Autre technique : durée de la descente du skieur = 0,03312h = 0,03312 × 3600s = 119,232s ≈ 119s, différence = 261s – 119s = 142s = **2min 22s**.

Barème : **1** pt = durée de la descente et **1** pt = différence à l'arrivée.

EXERCICE 3

3. a) *Calcul d'image*. On remplace ***x*** par la valeur 10 dans l'expression de la fonction **S**. On a alors : **S**(10) = 2,5 – (20 – 55)²/1210 = (*détails des calculs à voir sur la copie)* = 180/121 ≈ **1,49**. *Interprétation* : Albert est **à environ 1,5m** au-dessus du sol après 10 m de « vol » (*les 10m de « vol » étant mesurés horizontalement*).

Barème : **1** pt = calcul de l'image de 10 et **0,5** pt = interprétation.

3. b) La valeur 55 sur l'axe des abscisses donne 0 comme « altitude » : Albert est à nouveau sur le sol de la piste : il a sauté sur une distance de **55m**.

Barème : **0,5** pt. *Pas de commentaire.*

3. c) *Lecture graphique* : expliciter ! Lecture sur la courbe du point le plus « haut », valeur lue sur l'axe des ordonnées, puis lecture correspondante sur l'axe des abscisses. Hauteur maximale lue **= 2,5m**, d'où déplacement horizontal = **27,5m**. Coordonnées lues du point : **(27,5 ; 2,5)**. (*Abscisse lue entre 27m et 28m « acceptée », mais la représentation graphique est précise !*).

Barème : **1** pt. *Pas de commentaire.*

3. d) *Bon item* ! On a : ($2\boldsymbol{x} - 55)^2/1210$ est « toujours » positif (*c'est un carré*), donc **S**($\boldsymbol{x}$) = $2{,}5 - (2\boldsymbol{x} - 55)^2/1210 \leq 2{,}5$ et est donc maximal lorsque $(2\boldsymbol{x} - 55)^2$ est nul, c'est-à-dire lorsque $2\boldsymbol{x} = 55$; c'est-à-dire : $\boldsymbol{x} = 55/2 =$ **27,5** : on retrouve la valeur de l'item précédent, ouf !

Barème : **1,5** pt. *Pas de commentaire.*

3. e) *Distribution gratuite, modulo le « = »* ! Deux formules possibles, entre autres :
= 2,5 – (2*A2-55)^2/1210 ou **= 2,5– (2*A2-55)*(2*A2-55)/1210**.

Barème : **0,5** pt. *Attention :* **0** si pas de « = » *!*

3. f) Non, car on passe de 27,4 à 27,6 (lignes 14 et 15 du tableur). Par contre, avec un pas de 0,1, on prendrait la valeur 27,5 pour calculer $\boldsymbol{x}$, ce qui nous donnerait bien le maximum 2,5. (*Rappel* : le tableur « calcule » avec des nombres décimaux. Si la solution n'est pas décimale, on peut s'en approcher à la précision voulue, c'est ce qui explique les valeurs identiques fournies (*2,4999669421*) pour les images de 27,4 et 27,6 : elles diffèrent donc un peu plus loin ; mais pour la valeur 27,5, le tableur affiche 2,5, car le deuxième terme de la différence est nul (item **3.d**). *Pas mal* !).

Barème : **1** pt. *Sans commentaire autre que celui qui figure dans le rappel ci-dessus.*

PARTIE B (*14 points*)

EXERCICE 4 (*6 points*)

On appelle ***L*** la longueur de la piste cyclable. ***L*** = **~~AE~~** + **~~EF~~** + **~~FG~~** + **~~HI~~** + **~~IJ~~** + **~~JA~~** + lg(**~~arcGH~~**). *Ouf* ! On calcule « step by step », avec toutes les « bonnes » conditions : on a des triangles rectangles, on a des parallèles, des codages et tout ça… *Bref, trop FACILE* !

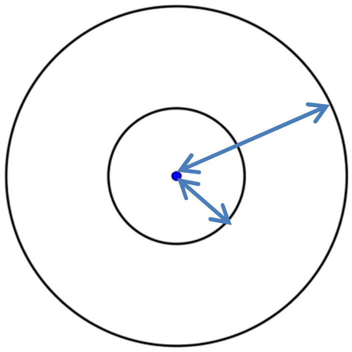
- Longueur de l'arc **GH**. On a : (GK) ⊥ (HK) (*énoncé*), l'arc **GH** est un quart de cercle qui mesure donc 2pi × 48m ÷ 4 = 24pi ≈ 75,4 m.
- Les autres longueurs faciles à calculer. On a déjà : **FG** = 52m (*no calcul !*). Longueur AE. On a : **AE** = AB – EB = 288m – 48m = 240m. Longueur HI. On a : **HI** = DC – DI – HC = 288m – 29m – 48m = 211m. Longueur AJ. On a : **AJ** = EB = KG = KH (*codages*) = 48m.
- Longueur **IJ**. On applique le théorème de Pythagore dans (DIJ), rectangle en D. On a alors l'égalité : $IJ^2 = ID^2 + DJ^2 = 29^2 + 72^2 = 6025$. D'où **IJ** = $\sqrt{6025} \approx 77{,}6$(m).
- Il reste à calculer la longueur **EF**. Il faut **BF** : on a BF = (72 + 48) – 52 – 48 = 20(m). On peut donc appliquer le théorème de Pythagore à (EBF) rectangle en B. On a alors : $EF^2 = EB^2 + BF^2 = 48^2 + 20^2 = 2704 = 52^2$, d'où **EF** = $\sqrt{2704} = 52$(m).

- *Conclusion* : ***L*** = **AE** + **EF** + **FG** + **HI** + **IJ** + **JA** + lg(**arcGH**) ≈ 240m + 52m + 52m + 211m + 77,6m + 48 + 75,4 ≈ **756m**.

(*Note de **PW** : il n'y a pas une technique unique pour calculer les longueurs cherchées; par exemple, on peut aussi utiliser le théorème de Thalès pour calculer BF, ou autre. Si la technique est correcte et justifiée, les points sont alloués, of course !*).

Barème : **6** pts. **5** *pts pour les longueurs (distribution gratuite !!!) et* **1** *pt pour la justification-conclusion.*

EXERCICE 5 (*7 points*)



Cible ci-contre, respectant les proportions de « 10 à 25 ».

Analyse de la situation : si on atteint le disque central, on marque 9 points, et donc si on l'atteint plusieurs fois, on marque un nombre de points multiple de 9. Même raisonnement pour la couronne circulaire, avec 5 et ses multiples. Le score est une combinaison additive de multiples de 5 et de multiples de 9.

1. a) Le score obtenu est une combinaison de « 5 » et de « 9 » ; et donc, le plus petit score possible est « 5 » (un « 5 » et zéro « 9 »). Il n'est donc pas possible d'obtenir un score de « 1 ».

Et pour « 14 » ? Trop facile : 5 + 9 = 14 !

Et pour « 26 » ? Moins évident. Si on fait trois « 9 » et zéro « 5 », le score est égal à 27 > 26. D'où deux cas à étudier. (***i***) On peut faire deux « 9 » au maximum ; dans ce cas, il reste 8 points à faire : impossible avec des « 5 », 8 non multiple de 5. (***ii***) On ne fait qu'un seul « 9 », il reste alors 17 points à faire : impossible avec des « 5 », 17 non multiple de 5. *Conclusion* : on ne peut pas faire un score égal à « 26 ».

Barème : **2** pts.

*Pour aller plus loin. En fait, on cherche les solutions entières de l'équation : 5**n** + 9**m** = **entier donné**. On peut aborder ce genre de problème au Primaire avec des variables de situation choisies de façon à produire et à faire produire des raisonnements construits. (Jeu des Gobelets, ERMEL).*

1. b) *Question astucieuse !* On vient de voir qu'on ne peut pas atteindre 26. Donc, on va chercher après 26 s'il y a un autre score non atteignable. *Une technique élémentaire* : passer en revue, un par un, les nombres entiers suivants 26.

C'est parti. 27 : facile; 28 = 10 + 18 = 5 × 2 + 9 × 2 : facile ; 29 = 20 + 9 : facile ; 30, facile ; 31 : on ne peut pas (idem raisonnement que pour 26) ; 32 = 5 + 27, facile ; 33 = 15 + 18, facile ; 34 = 25 + 9, facile ; 35 et 36, hyper facile ; 37 = 5 + 32 et 32 facile ; 38 = 5 + 33 et 33 facile, … inutile d'aller plus loin ! En effet, si « ça marche » pour les entiers allant de 32 à 36, « ça va marcher » pour ceux allant de 37 à 41 : il suffit d'ajouter 5 ; et on continue ; après 37 à 41, on examine 42 à 46 et ça marche, *and so on, folks*. Conclusion, **le plus grand score NON atteignable est 31**. On l'a obtenu par une étude (*presque*) exhaustive de tous les cas. Subtil !!!

Barème : **1,5** pt(s).

1. c) Aire de la zone à « 5 » points = aire de la couronne circulaire de « petit » rayon 5cm et de « grand » rayon 9cm : on calcule donc une différence d'aires.
Aire (*couronne circulaire*) = pi × 625 – pi × 100 = pi × 525 = **525pi (cm²)**.

Barème : **1** pt.

1. d) On note ***p***(« 5 ») la probabilité d'atteindre la couronne circulaire. La probabilité d'atteindre la cible est égale à 1 et il y a proportionnalité (*énoncé*) ; donc ***p***(« = 5 ») = quotient d'aires = aire (*couronne circulaire*)/aire (*cible*) = 525pi/625pi = **21/25 = 0,84**.

Barème : **1** pt.

2. a) On change les marques. En tirant dans la cible, on ne peut marquer que des multiples de 3, à partir de 6 ; car 6 et 9 sont multiples de 3. Or, l'entier 31 = 10 × 3 + 1, n'est pas multiple de 3, donc, on ne peut pas obtenir 31.

2. b) Il n'y a pas de plus grand score impossible : dès qu'on a un multiple de 3 auquel on ajoute 1, on a un score non atteignable. Comme il n'existe pas de plus grand multiple de 3, on ne peut pas. Même raisonnement avec les multiples de 3, auxquels on ajoute 2.

Barème : **1,5** pt.

PARTIE C (*6 pts + 8pts= 14pts*)

EXERCICE 6 (*6 points*)

1) Deux compétences <u>mathématiques</u> travaillées dans ce jeu.

En fait, il s'agit de « macro-compétences » à ce niveau de scolarité : (***i***) (*savoir*) **comparer** des quantités (*le plus grand* ou *le plus petit*), par des procédures numériques ou non-numériques et (*savoir*) appliquer la règle du jeu, c'est-à-dire, (*savoir*) dire qu'il y a « *Bataille* » (= égalité des nombres-cardinaux) ; (***ii***) (*savoir*) **dénombrer** une quantité (= associer un nombre à des quantités, ou *reconnaître* des *représentations différentes* d'un *même nombre*, ou *trouver* le *cardinal* d'un *ensemble*, ou encore : *(savoir) dénombrer* une *collection* d'objets *fixes*).

*<u>Note de **JT** et de **PW**</u>*. Une troisième macro-compétence générique *<u>hors-du champ disciplinaire</u>* est possible à citer : (***iii***) comprendre et (*savoir*) appliquer une règle.

<u>Autre note</u>, on ne s'intéresse pas ici, aux procédures et démarches envisageables. Donc pas de discours en ce sens dans la réponse. Mais ces procédures « appartiennent » à la situation.

Barème : **2** pts.

2) Item standard !

<u>Comparer</u>. (***i***) confondre « *plus grand* » et « *plus petit* » ; (***ii***) comparaisons fausses : erreurs dans le dénombrement (oublis ou comptages « en double » ou…), à cause des dispositions et des configurations ; (***iii***) si égalité, ne pas comprendre qu'il faut alors appliquer la règle du jeu…

<u>Dénombrer</u>. (***i***) méconnaissance de la comptine numérique, *et oui !* ; (***ii***) défaut de distinction entre tous les éléments constitutifs d'une carte ; (***iii***) formes, dispositions, couleurs non tous du même modèle et donc sources d'erreurs de dénombrement ; (***iv***) dépendance du cardinal avec la taille et « compensations ».

Barème : **2** pts.

3) Les « intérêts ».

(i) D'un point de vue notionnel : les deux jeux donnent à « voir » des décompositions, c'est-à-dire, « voir » un nombre comme somme de deux autres. *Jeu 1* (*celui du haut de la page du sujet*) : $6 = 3 + 3 = 4 + 2$; *jeu 2* (*l'autre jeu de cartes*) : $5 = 4 + 1$ (étoile ou rond au centre), $6 = 4 + 2$(deux étoiles ou deux ronds sur la ligne du « milieu »). On va tout doucement vers le « calcul ».

(ii) On s'intéresse à la compétence « comparer ». *Jeu 1* : on doit mettre en œuvre des stratégies de comparaison diverses, la disposition des formes sur les cartes n'est pas usuelle. *Jeu 2* : ressemblance, surement voulue, avec les constellations des dés à jouer ; ici, on doit plus s'entraîner à cette ressemblance, d'où appel plus direct à la mémorisation.

(iii) On s'intéresse à la compétence « dénombrer ». *Jeu 1* : milieu d'apprentissage, la quantité se construit indépendamment de la forme, de la disposition, de la quantité de surface occupée. *Jeu 2* : cartes (*presque*) identiques, donc, moins de variables à prendre en compte. Ce jeu constitue moins une situation d'apprentissage que le Jeu 1, on peut le mettre dans la catégorie d'une reprise de l'étude.

Barème : **2** pts.

EXERCICE 7 (*8 points*)

1) a) Choix de trois points distincts sur le cercle. Tracer deux segments-cordes ayant pour extrémités les points choisis deux par deux ; puis tracer de la médiatrice de chacun des deux segments (*traits de construction apparents*). Marquer le point d'intersection des deux médiatrices (*pourquoi ne sont-elles pas parallèles ?*).

Le point d'intersection des deux parallèles est le centre du cercle. Pourquoi ? *Voir question suivante !*

1) b) La médiatrice d'un segment est la droite qui contient tous les points équidistants des extrémités du segment, donc l'intersection de deux médiatrices (*non parallèles*) est à égale distance d'au moins ces trois points ; par trois points il ne passe qu'un seul cercle : c'est donc le « bon » cercle !

Barème : **2** pts.

2) a) *Il y a plusieurs définitions possibles d'un cercle dans le plan.*

La définition scolaire usuelle est : « un cercle est une ligne géométrique qui contient tous les points situés à égale distance d'un point fixé appelé centre du cercle ». Le centre du cercle n'appartient pas au cercle.

2) b) Pour un élève de cycle II, un cercle est une « figure » qui est ronde et même « ronde partout pareil » (= *courbure constante de valeur 1/rayon !*). Il faut aussi remarquer qu'il y a souvent confusion chez les élèves entre *ligne* et *surface*. De même, un ballon (*de football !*) est dit « rond », alors que c'est un objet 3D bien plus « complexe ».

Barème : 2 pts.

3) ***Antoine*** choisit deux points, *a priori diamétralement opposés pour lui* ; il trace le « diamètre », il marque le milieu de ce diamètre qui donne donc le centre. Il trace alors le cercle. *Informations chiffrées correctes dans le cadre de cette construction.* Mais, *construction fausse*, car il est précisé qu'il n'y a pas de points diamétralement opposés dans cette figure (*énoncé*).

Bernard choisit quatre points distincts, trace le (*pseudo*-)« rectangle » et ses diagonales ; le centre du cercle est alors le milieu commun des diagonales. Il trace le cercle. *Construction fausse*, car pas de points diamétralement opposés (*énoncé*).

Céline choisit quatre points distincts, trace deux cordes « opposées », elle marque les milieux et marque le centre comme le milieu du segment d'extrémités les deux premiers milieux. Elle trace le cercle. *Informations numériques correctes dans le cadre de cette construction.* Mais *construction fausse.*

Dounia choisit trois points, a priori non équidistants, elle trace donc un triangle, avec les longueurs des côtés ; elle marque les milieux de chaque côté, elle trace les médianes et elle choisit comme centre le point d'intersection des médianes. Elle trace le cercle. *Informations chiffrées correctes.* Mais *construction fausse* : triangle non équilatéral. Dans le cas général, le point d'intersection des médianes, appelé centre de gravité du triangle n'est pas le centre du cercle circonscrit.

Les six points ne sont pas cocycliques pour chacune des quatre constructions proposées, sans que cela n'interroge les élèves : tous les points ne sont pas sur le cercle, mais, tant pis !

On a l'expression de ce qu'on appelle un *« effet-contrat »* : chaque élève a répondu à la question, en utilisant des propriétés mathématiques et donc, il est « naturel » pour lui de ne pas s'interroger sur la validité de la technique mobilisée.

Barème : 2 pts.

4) a) Construction correcte sur la feuille annexe (*traits de construction apparents*). **b)** Les quatre points marqués sont les sommets d'un rectangle : configuration *nécessaire* si on veut réussir la tâche !

- A la façon de ***Bernard*** : diagonales d'un rectangle égales et de même milieu, le centre du cercle est ce milieu et le diamètre est la diagonale.
- A la façon de ***Céline*** : construction peu classique, mais correcte. Les deux médiatrices sont confondues, le milieu du segment joignant les milieux des deux côtés, supports des médiatrices, est le centre du cercle (*propriété d'équidistance des points de la médiatrice*).

Barème : 2 pts.