M1, seconde session S1 : « oral de rattrapage ». Quelques exercices et problèmes

EXERCICE 1. On s'intéresse au quotient et au reste de la division euclidienne de 40626 par 12. Voici quatre résultats, tous ***faux***.

Numéro du résultat :	*QUOTIENT :*	*RESTE :*
(*1*)	348	8
(*2*)	3384	18
(*3*)	3382	6
(*4*)	3383	0

Sans s'appuyer sur le calcul effectif du ***quotient*** et du ***reste***, expliquez pourquoi ces résultats ne sont pas corrects. Pour cela, on utilisera un argument de nature différente pour chacun des résultats.

EXERCICE 2 : (Académie d'Amiens, année 2001). Dans un jeu, une cagnotte d'un montant exprimé par un nombre entier inférieur à 4000 euros est partagée entre les gagnants. Chacun reçoit 129 euros et il reste 28 euros dans la cagnotte. Quel est le montant maximal de cette cagnotte ?

EXERCICE 3. Déterminer tous les nombres de trois chiffres, notés **abc**, non multiples de dix, qui vérifient les conditions suivantes :

- Le chiffre des dizaines est le quadruple de celui des unités.
- En retranchant 297 au nombre **abc**, on obtient le nombre écrit « à l'envers ».

Indication : dans l'écriture **abc** du nombre, la lettre **a** désigne le chiffre des centaines, la lettre **b** celui des dizaines et la lettre **c** celui des unités.

EXERCICE 4

1. Déterminer toutes les décompositions additives du nombre 33, en utilisant seulement les nombres 3, 5 et 7, sans nécessairement les utiliser tous (à titre d'exemple, on peut écrire $33=5+5+5+5+5+5+3$). On présentera clairement la méthode choisie pour déterminer ces décompositions.

2 Au rugby, les équipes marquent des points lors de quatre phases de jeu :

- En réussissant un coup de pied de pénalité pour 3 points,
- En réussissant un drop pour 3 points,
- En marquant un essai non transformé pour 5 points,
- En marquant un essai transformé pour 7 points.

a) Yanis affirme que son équipe a marqué 33 points grâce à deux essais et plusieurs pénalités.
Est-ce possible ? Justifier.

b) Paul affirme que son équipe a marqué 27 points grâce à deux essais, et en réussissant autant de drops que de pénalités.
Est-ce possible ? Justifier.

c) Une équipe a marqué 20 points. Sachant qu'aucun drop n'a été réussi, trouver toutes les manières dont ces 20 points ont pu être obtenus.

EXERCICE 5. D'après CRPE. Les nombres dont il est question dans cet exercice sont des nombres entiers naturels.

1. Un premier nombre :

On recherche un premier nombre. Voici ce qu'on sait de lui :

1) son chiffre des unités est égal à 5 ;
2) il a 431 centaines ;
3) son chiffre des dizaines est égal à 2.

Quel peut être ce nombre ?

2. Un deuxième nombre :

On recherche un deuxième nombre. Voici ce qu'on sait de lui :

1) il est compris entre 15 000 et 16 000 ;
2) tous ses chiffres sont différents ;
3) son chiffre des centaines est un multiple de 3 ;
4) son chiffre des unités est un nombre pair supérieur à 5 ;
5) son chiffre des dizaines est le successeur du chiffre des centaines.

Quel peut être ce nombre ? Donner toutes les possibilités.

3. Un troisième nombre :

On recherche un nombre N à trois chiffres.

En permutant, dans l'écriture de N, le chiffre des dizaines et celui des unités, on obtient l'écriture d'un nombre M.

En permutant, dans l'écriture de N, le chiffre des dizaines et celui des centaines, on obtient l'écriture d'un nombre P.

Les nombres M et P restent des nombres à trois chiffres.

Déterminer tous les nombres N qui vérifient **simultanément** les relations :

$$N + 36 = M \quad \text{et} \quad N - 270 = P$$

EXERCICE 6

Un professeur des écoles écrit sur son tableau de classe le nombre **W** obtenu de la façon suivante. Il écrit, les uns à la suite des autres, les nombres entiers de un à vingt.

On a donc **W** = 1234567891011…181920. (*Ecriture non rigoureuse*).

Le professeur décide alors d'effacer ou de gommer vingt des chiffres de **W**. Il s'intéresse alors au nombre **T** ainsi obtenu après le gommage.

1. Combien de chiffres composent le nombre **W** ? Justifier.
2. Après le gommage des vingt chiffres, quel est le plus grand nombre **T** qui puisse rester écrit sur le tableau ? Justifier.

EXERCICE 7

On peut affirmer que, quels que soient les trois entiers ***a***, ***b*** et ***c***, compris entre 0 et 9, le nombre qui s'écrit $(\boldsymbol{abcabc})_{\mathbf{dix}}$ est multiple de 13. ***Vrai*** ou ***Faux***, pourquoi ?

Pas de corrigé pour cet exercice

EXERCICE 8 (d'après CRPE)

Construire un segment **[AB]** de longueur 10 cm.
La suite des constructions est à réaliser à la règle non graduée et au compas, en laissant les traits de construction visibles.

1. Construire un triangle **ABO** rectangle isocèle en **O**.
Construire le point **D**, symétrique du point **O** par rapport au point **A**.

2. Les points **O**, **B** et **D** appartiennent à un même cercle ***C***. Donner, en le justifiant, le centre et le rayon de ce cercle. Nommer **I** le centre de ce cercle. Le construire.

3. Calculer les longueurs **OA** et **AI**.

4. Construire le point **E** symétrique du point **O** par rapport au point **I**. Quelle est la nature du quadrilatère **OBED** ? Justifier.

5. Construire le point **J** symétrique du point **I** par rapport au point **A**. Quelle est la nature du quadrilatère **OIDJ** ? Justifier.

6. Le point **J** appartient-il au cercle ***C*** ? Justifier.

EXERCICE 9 (d'après CRPE)

1) Les mesures des durées suivantes, exprimées en prenant l'heure comme unité, représentent-elles des nombres décimaux ?
a) 12 secondes ; ***b***) 52 minutes ; ***c***) 52 minutes et 12 secondes.

2) Une durée, inférieure à une minute, est mesurée en prenant comme unité la seconde et exprimée sous la forme : ***n*** seconde(s) (***n*** est un entier naturel non nul).
Pour quelle(s) valeur(s) de ***n*** la mesure de cette même durée, exprimée en prenant l'heure comme unité, est-elle un nombre décimal ?

EXERCICE 10 (d'après CRPE)

Dans cet exercice, *a*, *b* et *c* sont des chiffres compris entre 1 et 9.
On considère des nombres écrits en base dix avec ces chiffres et on note, par exemple, $\overline{bac}$ le nombre dont *b* est le chiffre des centaines, *a* celui des dizaines et *c* celui des unités.
Les questions sont indépendantes.

1. Voici 4 nombres : 7, 13, 57 et 61.
   Parmi ces nombres, lequel n'est pas un nombre premier ? Justifier.
2. a) Le nombre 3 737 est-il un nombre premier ? Justifier.
   b) Un nombre de la forme $\overline{abab}$ peut-il être un nombre premier ? Justifier.
3. a) On considère les trois nombres $\overline{abc}$, $\overline{abb}$ et $\overline{acc}$.
   Montrer que la somme de ces trois nombres est un nombre divisible par 3.
   b) On considère les deux nombres $\overline{cba}$ et $\overline{bba}$.
   Proposer un troisième nombre de trois chiffres, uniquement formé avec des chiffres choisis parmi les chiffres *a*, *b* et *c*, pour que la somme des trois nombres soit divisible par 3. Justifier.

EXERCICE 11

- Soit **ABC** un triangle rectangle en **A** tel que : **AC** = 3,5 cm et BC = 12,5 cm. Calculer la valeur exacte de **AB**.

*Indications. Faire une figure, même si ce n'est pas demandé ; qui dit triangle rectangle et longueurs de côtés dit théorème de Pythagore. On trouve **AB** = 12 cm.*

- Marquer trois points **I**, **K** et **L** non alignés. Construire le point **W** tel que le quadrilatère **IKLW** soit un parallélogramme. Donner trois méthodes de construction, en précisant la propriété utilisée.

*Indications. Revoir définition usuelle et propriétés du parallélogramme et appliquer une de ces propriétés pour chaque construction. Exemple : les diagonales d'un parallélogramme ont même milieu. Construction associée : tracer **[IL]**, marquer son milieu **O** et placer le point **W** tel que **O** soit le milieu de **[KW]**.*

EXERCICE 12 (d'après CRPE 2007)

Toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Donner les restes des divisions par six et par trois de chacune des trois sommes suivantes : S1 = 5 + 7 + 9 ; S2 = 15 + 17 + 19 ; S3 = 1527 + 1529 + 1531.

2. Plus généralement :

a) Donner le reste de la division par six de la somme de trois nombres impairs consécutifs.

b) Donner le reste de la division par trois de la somme de trois nombres impairs consécutifs.

3. Trouver trois nombres impairs consécutifs dont la somme est 12 027.

Pas de corrigé pour cet exercice.

EXERCICE 13 (d'après CRPE)

On cherche à déterminer un nombre **P** composé de trois chiffres dont la somme est 16. Si on intervertit le chiffre des centaines et celui des dizaines, le nombre augmente de 450 et si on intervertit le chiffre de centaines et celui des unités, il augmente de 198. Déterminer le nombre **P**.

Pas de corrigé pour cet exercice.

EXERCICE 14 : Nouvelle Calédonie 2002

Compléter le tableau ci-dessous en calculant la valeur des expressions algébriques.

x	-1	0	$0{,}01$	2×10^{-2}	$0{,}5$	$1{,}01$	$11 + 0{,}1$
x^2							
x^3							
$2x + 1$							

Pas de corrigé pour cet exercice.

Quelques pistes de correction…

Exercice 1

1) 40626 est compris entre 12×1000 et 12×10000. Le quotient de 40626 par 12 contient donc quatre chiffres et ne peut pas être 386.
On peut dire aussi que l'ordre de grandeur n'est pas respecté car $400 \times 12 = 4800$, « éloigné » de 40626.
2) Dans une division par 12, le reste doit être inférieur ou égal à 12 : cela ne peut donc pas être 18.
3) Le produit 3382×12 a pour chiffre des unités 4, car $2 \times 2 = 4$. En ajoutant 6, le chiffre des unités devient 0, alors qu'on doit obtenir 6.
4) Si le reste est 0, 40286 est divisible par $12 = 3 \times 4$ donc divisible par 3 et par 4 qui sont premiers entre eux. Si un nombre est divisible par 4, le nombre 26 formé par ses deux derniers chiffres devrait être divisible par 4, ce qui est faux.

Exercice 2

Si $\boldsymbol{n}$ désigne le nombre de joueurs, le montant versé est $129 \times \boldsymbol{n} = 129\boldsymbol{n}$ euros et il reste 28 euros.
Le montant total de la cagnotte est donc : $129\boldsymbol{n} + 28$.
On a : $129\boldsymbol{n} + 28 < 4000$ soit $129\boldsymbol{n} < 4000 - 28$ $\quad 129\boldsymbol{n} < 3972$ $\quad \boldsymbol{n} < (3972/129)$ $\quad \boldsymbol{n} < 30{,}79...$
Donc, puisque $\boldsymbol{n}$ est un nombre entier, sa valeur maximale est 30 et le montant maximal de la cagnotte est donc : $129 \times 30 + 28 = 3898$ (euros).

Exercice 3

Ecriture des conditions et traitement algébrique de ces conditions. *Exercice classique et quasi-incontournable au CRPE* !
Les lettres $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$ désignent des chiffres, avec $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{c}$ tous les deux strictement positifs (ouf !), on a :
$\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{c}$ et $100\boldsymbol{a} + 10\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} - 297 = 100\boldsymbol{c} + 10\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$. On « trafique » ou beaucoup mieux on résout les équations obtenues, d'où les deux solutions possibles : 441 et 582.

Exercice 4

1. on obtient exactement 8 décompositions possibles, c'est-à-dire 8 triplets solutions pour l'équation $3a + 5b + 7c = 33$.

   $33 = 5 + 7 + 7 + 7 + 7$
   $33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7 + 7$
   $33 = 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 7 + 7$
   $33 = 3 + 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 7$
   $33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 7$
   $33 = 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$
   $33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 + 5$
   $33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

2. a) C'est possible. En analysant les 8 solutions précédentes, on constate que la décomposition $33 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 7$ convient au résultat annoncé par Yanis : 7 pénalités et 2 essais dont un qui a été transformé.

   b) Ce n'est pas possible, car les trois décompositions du nombre 27 correspondant à 2 essais, ou bien ne donnent pas un nombre entier de drops et de pénalités, ou bien ne donnent pas un nombre égal de drops et de pénalités :
   $27 = 5 + 5 + 17$
   $27 = 5 + 7 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$
   $27 = 7 + 7 + 13$

c) Il y a exactement 4 solutions :

$20 = 5 + 5 + 5 + 5$ (4 essais)
$20 = 3 + 5 + 5 + 7$ (1 pénalité, 2 essais, 1 essai transformé)
$20 = 3 + 3 + 7 + 7$ (2 pénalités, 2 essais transformés)
$20 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5$ (5 pénalités, 1 essai)

Exercice 5

1. Un premier nombre

Les informations données permettent d'écrire le nombre cherché sous la forme
431 x 100 + 2 x 10 + 5 = 43 125.

2. Un second nombre

• Le nombre cherché est compris entre 15 000 et 16 000 : il s'écrit donc avec 5 chiffres, son chiffre des dizaines de mille est 1 et son chiffre des unités de mille est 5.
• Son chiffre des centaines est un multiple de 3 ; c'est donc l'un des chiffres suivants : 0, 3, 6 ou 9.
• Son chiffre des dizaines est le successeur du chiffre des centaines ; c'est donc l'un des chiffres suivants : 1, 4 ou 7. Comme tous les chiffres du nombre sont différents, on ne peut pas retenir 1 pour le chiffre des dizaines, puisque le chiffre des dizaines de mille est déjà égal à 1, et donc pas 0 pour le chiffre des centaines.
Le nombre cherché est donc l'un des nombres qui s'écrit : 15 34u ou 15 67u, où u désigne le chiffre des unités.
• Le chiffre des unités est un nombre pair supérieur à 5 : u = 6 ou u = 8.
Comme tous les chiffres du nombre sont différents, le nombre cherché est l'un des nombres suivants : **15 346, 15 348, 15 678.**

3. Un troisième nombre

• Soit c le chiffre des centaines du nombre N, d son chiffre des dizaines et u son chiffre des unités, autrement dit : N s'écrit $\overline{cdu}$ ou $N = 100c + 10d + u$
On en déduit que :
M s'écrit $\overline{cud}$ soit $M = 100c + 10u + d$
P s'écrit $\overline{dcu}$ soit $P = 100d + 10c + u$
Comme c et d désignent un chiffre des centaines, respectivement celui des nombres M et P, ils vérifient les inégalités : $0 < c \leq 9$ et $0 < d \leq 9$.
u désignant un chiffre des unités, il vérifie l'inégalité $0 \leq u \leq 9$.

Les relations $N + 36 = M$ et $N - 270 = P$ reviennent à chercher les nombres c, d et u tels que
$100c + 10d + u + 36 = 100c + 10u + d$
$100c + 10d + u - 270 = 100d + 10c + u$.

Le problème se ramène à rechercher tous les nombres c, d, et u vérifiant simultanément :

$$u - d = 4$$
$$c - d = 3$$
$$0 < c \leq 9$$
$$0 < d \leq 9$$
$$0 \leq u \leq 9$$

• On en déduit :

$$u = d + 4$$
$$c = d + 3$$

Comme $u \leq 9$, on a aussi $d + 4 \leq 9$, d'où $d \leq 5$, ce qui permet de dresser la liste de tous les cas possibles :

d	1	2	3	4	5
$c = d + 3$	4	5	6	7	8
$u = d + 4$	5	6	7	8	9
N	**415**	**526**	**637**	**748**	**859**

Exercice 6

☺ **W** = (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20)$_{\text{dix}}$, écriture non rigoureuse mais qui permet de dénombrer le nombre de chiffres : de 1 à 9, il y a 9 chiffres ; de 10 à 20 il y a 11 fois 2 chiffres. Soit au total : **9 + 2 × 11 = 31**.
N.B. L'écriture rigoureuse regroupe les chiffres par « paquets de 3 », ce qui donne :
***W = 1 234 567 891 011 121 314 151 617 181 920** qui est de l'ordre de 10^{30}, c'est-à-dire du quintillion.*

2. Après le gommage de 20 chiffres, il reste 11 chiffres.
<u>Idée</u> : pour obtenir le plus grand nombre possible, il faut chercher à obtenir un nombre dont les chiffres de gauche ont une valeur la plus élevée possible.
Nécessairement, le nombre **T** doit « commencer » par un « 9 ». On gomme donc huit chiffres de 1 à 8. Il reste alors 12 chiffres à gommer. On gomme ensuite tous les chiffres après 9 jusqu'à obtenir le plus grand chiffre possible, c'est à dire, les onze chiffres qui suivent 9. On obtient le « 5 ». Il reste un chiffre à gommer : le « 1 », situé entre le 5 et le 6.

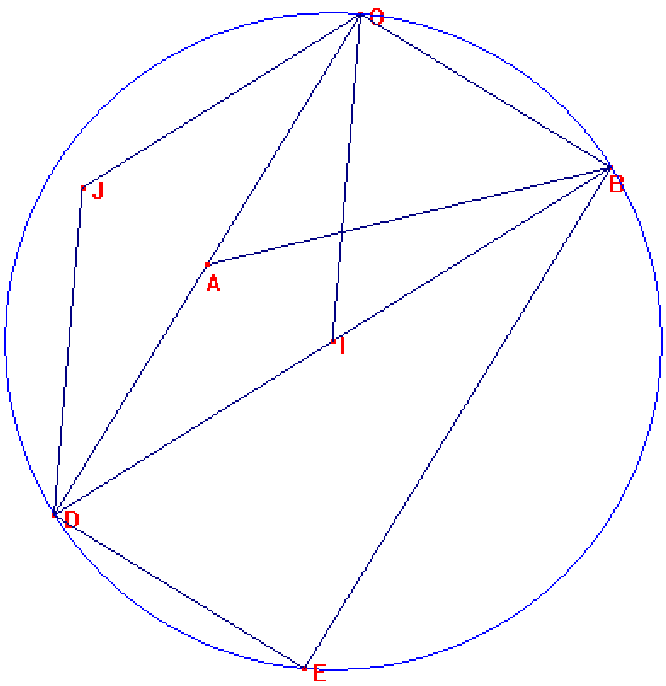
Ce qui donne :

T = ~~1 234 567 8~~ 9 ~~1 011 121 314 1~~ 5 ~~1~~ 617 181 920 soit $\boxed{\textbf{T = 95 617 181 920}}$, de l'ordre donc de la centaine de milliards.

<u>Commentaires</u> : exercice astucieux, ici aussi. Le plus grand nombre doit « démarrer » avec un « 9 » se conçoit facilement, cependant, pour la suite du gommage, c'est moins évident : il faut raisonner !

<u>Exercice 7 : non corrigé…</u> (Tant pis !).

Exercice 8



1. Les points **O**, **B** et **D** forment un triangle rectangle en **O** car le point **D** appartient à la droite **(OA)**.

Le milieu de l'hypoténuse **[BD]** est donc le centre du cercle circonscrit au triangle **BOD**.

Les points **B**, **O** et **D** sont donc sur le cercle de centre **I**, milieu de **[BD]** et de rayon **BD**/2.

2. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle **AOB** rectangle en **O**, on obtient :

OA² + OB² = AB².

Or, **AOB** est isocèle en **O**, donc **OA** = **OB**. De plus, **AB** = 10 cm.
2 × **OA²** = 100 et donc : **OA** = $5\sqrt{2}$ (cm).

On sait que le point **A** est le milieu de **[OD]** et que le point **I** est le milieu de **[BD]**. En appliquant le théorème de la droite des milieux dans le triangle **BOD**, on peut alors affirmer que la longueur **AI** vaut la moitié de la longueur **OB**. Or **OB** = **OA** = $5\sqrt{2}$ (cm) ; donc **AI** = $5\sqrt{2}/2$ (cm) (La moitié de **OB** ou **OA**, tout simplement !).

3. Nature du quadrilatère **OBED** : conjecture, **OBED** est un rectangle. Démonstration :

- **OBED** est un quadrilatère (convexe) dont les diagonales **[BD]** et **[OE]** se coupent en leur milieu **I** (Le point **I** est le milieu de **[OE]** car le point **E** est le symétrique de **O** par rapport à **I**). Le quadrilatère **OBDE** est donc un parallélogramme
- De plus, le quadrilatère **OBED** possède un angle droit : $\widehat{\textbf{BOD}}$ (Cf. donnée initiale). On peut donc affirmer que le quadrilatère **OBDE** est un rectangle, comme <u>parallélogramme possédant un angle droit</u>.

4. Nature du quadrilatère **OIDJ** : conjecture, **OIDJ** est un losange.

- En effet, **OIDJ** est un parallélogramme : ses diagonales **[IJ]** et **[DO]** ont le même milieu **A** (Le point **A** est le milieu de **[IJ]** car **J** est le symétrique de **I** par rapport à **A**).
- De plus, le quadrilatère **OIDJ** a deux côtés consécutifs de même longueur (ici **OI** = **ID**), c'est donc un losange, comme parallélogramme possédant deux côtés de même longueur.

5. Le cercle ***C*** a pour centre **I**. Pour déterminer si le point J appartient au cercle ***C***, il suffit donc de comparer la longueur **IJ** au rayon du cercle ***C***.

- La longueur **IJ**, par construction du point **J**, est égale au double de la longueur **AI**, soit $5\sqrt{2}$ cm. Ainsi $\mathbf{IJ}^2 = 50$.
- Le rayon du cercle est la longueur **IB**. Calculons cette longueur en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle **BOD**, rectangle en **O**.

$$\mathbf{BD}^2 = \mathbf{OB}^2 + \mathbf{OD}^2$$

$$\mathbf{BD}^2 = \mathbf{OA}^2 + (2 \times \mathbf{OA})^2 = 5 \times \mathbf{OA}^2 = 250.$$ On a donc $\mathbf{IB}^2 = (\mathbf{BD}/2)^2 = \mathbf{BD}^2/4 = 250/4$.

Comme $250/4 > 50$, on a : $\mathbf{IB}^2 > \mathbf{IJ}^2$.

La longueur **IB** (rayon du cercle ***C***) n'est donc pas égale à la longueur **IJ**. Par conséquent, le point **J** n'appartient pas au cercle *C*.

*Note de **PW**. D'autres démonstrations sont possibles (autres calculs, autres comparaisons de longueurs).*

Exercice 9

1)

1) a) $12\boldsymbol{s} = \dfrac{12}{3600}\,\boldsymbol{h} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{300}}\,\boldsymbol{h}$, car $1\boldsymbol{h} = 3600\boldsymbol{s}$.

La durée « 12 secondes » ne représente pas un nombre décimal lorsqu'elle est exprimée en heure car lorsqu'elle est écrite sous la forme d'une fraction irréductible, le dénominateur ne s'écrit pas comme un produit de puissances de 2 et de 5. *Revoir les premiers CM…*

1) b) De même, la durée « 52 minutes » ne représente pas un nombre décimal lorsqu'elle est exprimée en heure car lorsqu'elle est écrite sous la forme d'une fraction irréductible, le dénominateur ne s'écrit pas comme un produit de puissances de 2 et de 5. En effet, $52\boldsymbol{min} = \dfrac{52}{60}\boldsymbol{h} = \dfrac{\mathbf{13}}{\mathbf{15}}\,\boldsymbol{h}$, car $60\boldsymbol{min} = 1\boldsymbol{h}$.

1)c) « 52 minutes et 12 secondes » valent donc, en ***h*** : $\dfrac{1}{300} + \dfrac{13}{15} = \dfrac{1}{300} + \dfrac{260}{300} = \dfrac{261}{300} = \dfrac{87 \times 3}{100 \times 3} = 0{,}87$

Cette durée représente donc un nombre décimal lorsqu'elle est exprimée en heure, c'est $\boxed{\mathbf{0{,}87\ h}}$.

2) Les ***n*** secondes valent, en heures : $\dfrac{\mathbf{n}}{\mathbf{3600}} = \dfrac{\mathbf{n}}{\mathbf{9 \times 400}} = \dfrac{\mathbf{n}}{\mathbf{9 \times 2^4 \times 5^2}}$

Pour que ce nombre soit décimal, il faut et il suffit que ***n*** soit un multiple de 9 car ainsi, le dénominateur sera un produit de puissances de 2 et de 5 (y compris après simplification éventuelle de la « fraction »).

Comme la durée est inférieure à une minute, on obtient alors les six solutions suivantes pour n :

$$\boxed{\mathbf{9\ ;\ 18\ ;\ 27\ ;\ 36\ ;\ 45\ et\ 54}}$$

Les autres exercices ne sont pas corrigés (*bis, Cf. énoncés*). A travailler seul ou en groupes et en cas de « soucis » persistants, demander à ***PW***.