École supérieure
du professorat
et de l'éducation
Académie d'Orléans-Tours

UNIVERSITE D'ORLEANS

~~GCD DE *MATHÉMATIQUES*~~
CT/CC – M1_PE
JANVIER 2017
SITE DE BLOIS. *PW*

Ce sujet contient **six** exercices. Il comprend **quatre** pages et doit être traité en ***deux*** heures. L'utilisation du matériel « usuel » de géométrie plane (*compas, règle graduée, équerre, rapporteur, gabarits divers, …*) et des calculatrices dites de « poche », y compris les programmables, alphanumériques ou à écran graphique est autorisée. (*Il est rappelé que ces calculatrices doivent être autonomes, sans possibilité d'usage d'une imprimante*).

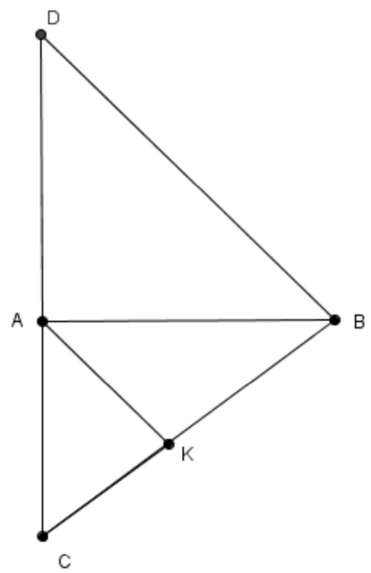
EXERCICE 1 (*D'après CRPE…*)

On considère un triangle scalène (= *quelconque*) **ABC**. On sait simplement que l'angle de sommet **A** est aigu. On note (Ω) le cercle de diamètre **[BC]**. Il coupe les droites **AB** et **AC** respectivement en **D** et en **E**. On appelle **H** le point d'intersection des droites **BE** et **CD**.

1) Construire une figure « aérée » répondant aux conditions ci-dessus.
2) Démontrer que les droites **AH** et **BC** sont perpendiculaires.
3) Construire sur la figure, *à la règle non graduée et au compas*, le point **M**, quatrième sommet du parallélogramme **BCMA** et le point **N** quatrième sommet du parallélogramme **BCAN**. *Laisser les traces de construction.*
4) Démontrer que le sommet **A** est le milieu de **[MN]**.

EXERCICE 2

Informations sur la figure ci-contre, non codée et non à l'échelle. (*Inutile de la reproduire sur la copie*).



On donne : **AC** = 8,4cm, **AB** = 11,2cm et **BC** = 14cm.
Soit **K** le point du segment **[BC]** tel que **CK** = 6cm.

La parallèle à la droite **(AK)** passant par **B** coupe la droite **(AC)** en **D**.

1) Démontrer que le triangle **ABC** est rectangle en **?**.
2) Calculer **CD**, puis **AD** (*valeurs exactes*).
3) Calculer **AK** (*valeur exacte*), avec **(AK)** ⊥ **(BC)** (*suite à des questions précédentes supprimées dans ce sujet*), en exprimant l'aire du triangle **ABC** de deux façons différentes.

EXERCICE 3 : (*D'après CRPE, deux items indépendants*)

Pour chacun des deux items de cet exercice, on demande de déterminer, s'ils existent, le ou les nombres entiers respectant les contraintes indiquées.
Les réponses trouvées doivent être justifiées.

Item 1. On cherche un nombre **N** ; voici ce que l'on sait de lui :
a) Il possède exactement 134 centaines ; ***b***) il est multiple de 5 et ***c***) il est aussi multiple de 9. Quel est ce nombre ? Y a-t-il plusieurs solutions ?

Item 2. On cherche un nombre **P** possédant trois chiffres tel que :
La somme de ses trois chiffres vaut 14. ***b***) le nombre **P** est plus grand son « nombre retourné » **Q** (*exemple* : si **P** = 561, alors son « retourné » **Q** = 165). ***c***) la différence **P** – **Q** = 99 et ***d***) la différence entre le double du chiffre des dizaines de **P** et le triple du chiffre des centaines de **P** est égale à 2.

EXERCICE 4. *D'après CRPE…*

Analyse de productions d'élèves après enseignement des ***nombres décimaux***.

A. En classe de CM1, un enseignant propose en application de la leçon sur les nombres décimaux les deux exercices suivants :

Exercice 1

Calcule les sommes suivantes : 0,3 + 0,8 1,3 + 0,12

Cadre n°1

Exercice 2

Range dans l'ordre croissant les nombres décimaux suivants :

5,100 5,6 5,03

Cadre n°2

On propose deux productions d'élèves : une pour chaque exercice

1) Voici les réponses d'un élève à l'exercice 1 :

0,3 + 0,8 = 0,11
1,3 + 0,12 = 1,15

Cadre n°3

À partir de ces réponses, indiquer ce que cet élève semble maîtriser et ce qu'il lui reste à travailler.

2) Voici la réponse d'un élève à l'exercice 2 :

5,03 < 5,6 < 5,100

Cadre n°4

a) Quelle représentation erronée des nombres décimaux pourrait être à l'origine de l'erreur de cet élève ? Justifier.

b) Quelle désignation orale des nombres 5,03 ; 5,6 et 5,100 l'enseignant pourrait-il utiliser pour aider les élèves à se construire une bonne représentation des nombres décimaux ?

EXERCICE 5. *D'après CRPE…*

Un enseignant PE traite de la ***PROPORTIONNALITE*** avec ses élèves de cycle III.

PARTIE A

L'enseignant s'interroge sur l'énoncé d'un exercice, pour lequel une phrase (notée [...]) reste à préciser :

> Pour une visite du Château de Versailles, la coopérative scolaire doit payer 105 € pour une classe de 25 élèves de CE1. Mais un groupe de 20 élèves de CE2 se joint finalement à cette classe.
> [...]
> Combien la coopérative devra-t-elle payer en tout ?

1) Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation soit sans ambiguïté une situation de proportionnalité.

2) Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation ne soit pas une situation de proportionnalité.

Ce même enseignant propose l'institutionnalisation de la ***PROPORTIONNALITE*** à partir de celle proposée dans le manuel « *Outils pour les Maths* », éditions Magnard, 2001. (Fac-similé ci-dessous).

On reconnaît une situation de proportionnalité lorsque le rapport entre les nombres ne change pas.

Exemple 1 : **1 kg de pêches coûte 3 €.**

Nombre de kg de pêches	1	2	5
Prix (en €)	3	6	15

Le prix est proportionnel à la masse .
Pour trouver le prix, il faut multiplier par le même nombre (par 3).

Exemple 2 : **4 gâteaux coûtent 6 €.**
Pour trouver le prix de 8 gâteaux, je calcule le double. → 6 × 2 = 12 €
Pour trouver le prix de 2 gâteaux, je calcule la moitié. → 6 divisé par 2 = 3 €

Exemple 3 : **1 stylo coûte 2 €, 3 stylos coûtent 5 €, 6 stylos coûtent 6 €.**
Dans cette situation, 3 stylos ne coûtent pas **3 fois plus cher** qu'un stylo, 6 stylos ne coûtent pas 6 fois plus cher.
Cette situation n'est pas proportionnelle.

1) Quelle propriété caractéristique de la ***PROPORTIONNALITE*** le traitement de *l'exemple 1* illustre-t-il ? Justifier…

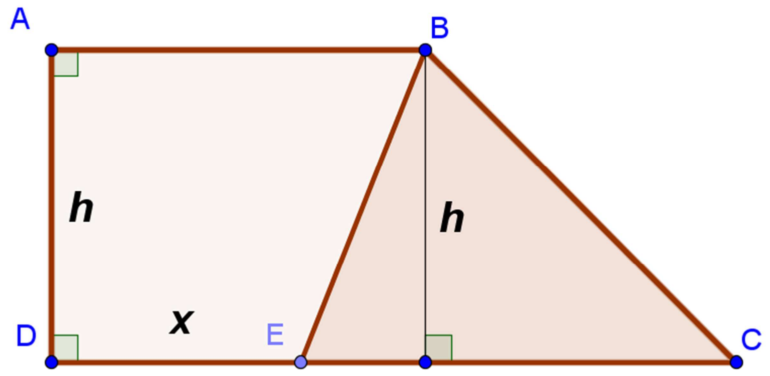
2) Quelle propriété caractéristique de la ***PROPORTIONNALITE*** le traitement de *l'exemple 2* illustre-t-il ? Justifier…

3) Dans cet extrait de manuel, l'expression « *rapport entre les nombres* » désigne dans le traitement des *exemples 1 et 2* des coefficients jouant des rôles différents. Expliciter ces différents rôles.

4) Quelle propriété caractéristique de la ***PROPORTIONNALITE*** est utilisée dans le traitement de *l'exemple 3* ? Donner une autre technique qui met en évidence le fait que *l'exemple* proposé ne relève pas d'une situation de ***PROPORTIONNALITE***.

EXERCICE 6

Pour cet exercice, une unité de mesures des longueurs est choisie.
Cf. figure ci-dessous, échelle non respectée.



Un trapèze **ABCD** est rectangle en **A** et en **D**. On donne les informations numériques suivantes : **AB** = 30 et **DC** = 55. La hauteur du trapèze est notée ***h***.

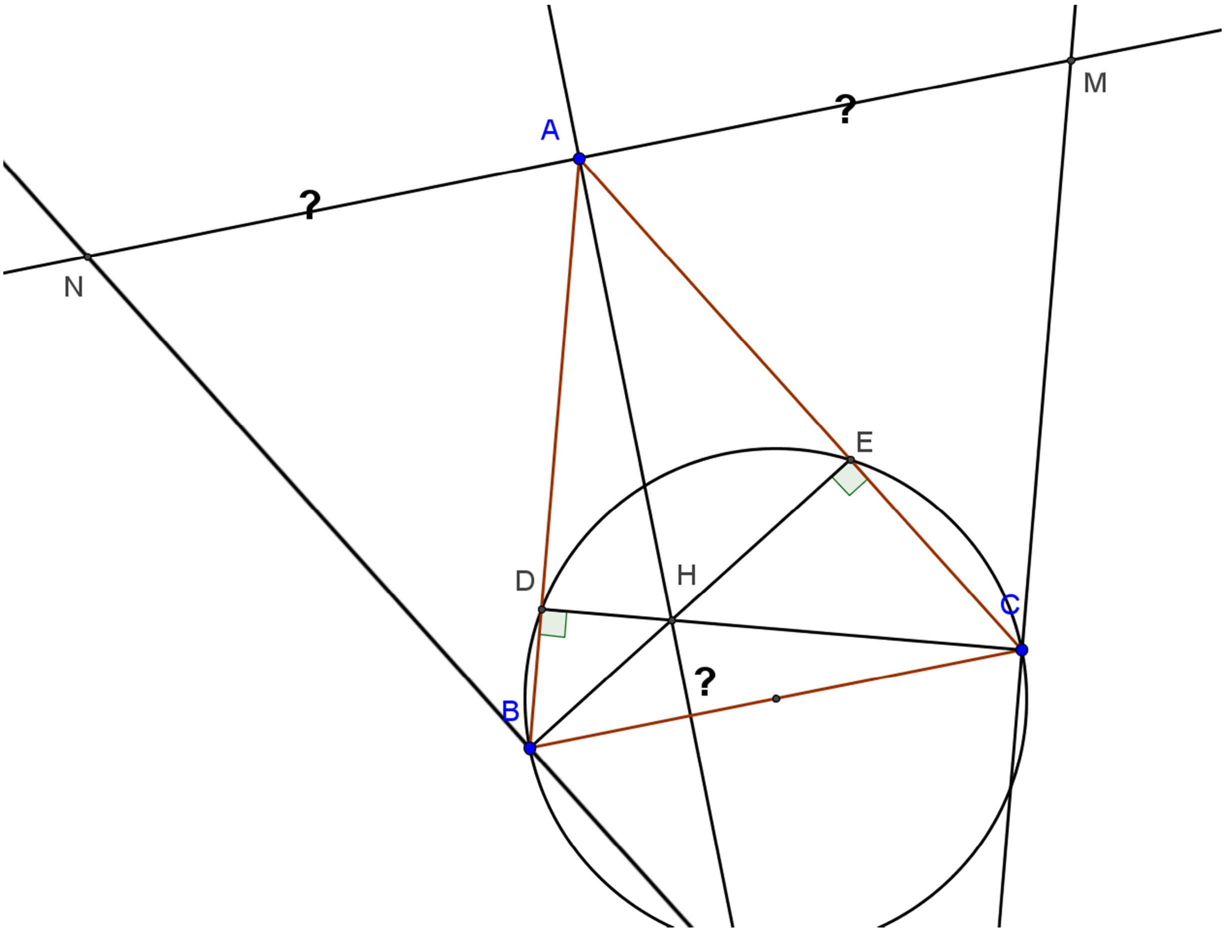
Où placer un point **E** sur la base **[CD]** pour que la droite **BE** partage le trapèze en deux domaines (*le trapèze **ABED** et le triangle **BEC***) de même aire ?

On peut poser **DE** = ***x***.

PISTES de CORRECTION et éléments de BAREME

EXERCICE 1, sur 5 points = 1 + 2 + 1 + 1. (*D'après CRPE…*)

1) Figure ci-dessous.



Cercle (Ω)

2) **(AH)** et **(BC)** sont perpendiculaires en **H** ?

__Idée__ : (***i***) Pourquoi le cercle (Ω) de diamètre **[BC]** ? Parce que les points **D** et **E** sont le troisième sommet de deux triangles rectangles d'hypoténuse le diamètre **[BC]**. (***ii***) Ce qui signifie que **[BE]** est une hauteur du triangle **(ABC)** ; idem pour **[CD]**. (***iii***) Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en l'orthocentre de ce triangle, qui est précisément le point **H**, car point commun de deux hauteurs : **[BE]** et **[CD]**. *__Conclusion__* : **(AH)** est la troisième hauteur du triangle, donc en particulier : **(AH)** ⊥ **(BC)**.

__Note de PW__ : toute démonstration doit faire mention des trois puces (***i***), (***ii***) et (***iii***) pour être correcte et rigoureuse.

3) Construction des points **M** et **N**.

Plusieurs techniques de construction : celles qui reposent sur la définition ou sur les propriétés du parallélogramme.

- *Diagonales de même milieu.* Pour **(BCMA)**, par exemple, on trace le symétrique **M** du point **B** par rapport au milieu de **[AC]**. Finir la construction. Idem pour **(BCAN)**, avec le milieu de **[AB]** comme centre de symétrie.
- *Définition.* Tracer des parallèles. Pour chacun des deux parallélogrammes, on a deux côtés, donc facile…

➢ *Côtés opposés de même longueur*. Pour chacun des deux parallélogrammes, on a deux côtés, donc facile par reports de longueurs (*au compas, yes, of course !*)…

4) Là aussi, plusieurs méthodes pour démontrer ce subtil résultat.

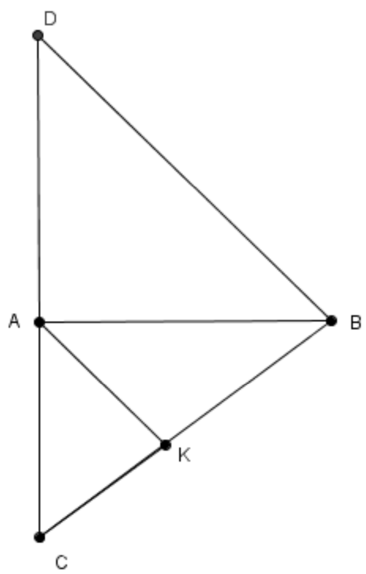
➢ On s'amuse, peut-être pas tout le monde ! : égalités vectorielles et parallélogramme. On a : $\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{AM}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{BC}} = \overrightarrow{\mathbf{NA}}$. On a donc deux vecteurs égaux ayant une « extrémité » commune, ce qui signifie que les points **N**, **A** et **M** sont alignés, avec **A** milieu de **[NM]**.

Bon, cette démonstration est HP du concours, ouf… Mais ceux qui ont des connaissances sur les vecteurs ont tout à fait le droit de les utiliser : aucune pénalisation en termes de points, ni aucun autre fait négatif ne sont à craindre ; modulo une démonstration rigoureuse, yes, of course, bis !

➢ On va jouer « classique »… **(BCMA)** est un parallélogramme, donc en particulier, on a : **(BC)//(AM)** et **BC = AM**. De même, **(BCAN)** est un parallélogramme, donc en particulier, on a : **(BC)//(NA)** et **BC = NA**. D'où (***i***) **(AM)//(NA)**, deux droites parallèles avec un point commun, c'est une autre façon d'affirmer que les points **N**, **A** et **M** sont alignés et (re) d'où (***ii***) **AM = NA**, c'est-à-dire que le point **A** est le milieu de **[NM]**. Et voilà…

EXERCICE 2, sur 5 points = 2 + 2 + 1. (*D'après CRPE…*)

Figure recopiée ci-contre



Pour une certaine commodité d'écriture et une facilité de lecture, les unités de longueurs (cm) et les unités d'aires (cm²) associées ne seront pas marquées dans les calculs, ni dans les résultats, mais elles existent…

1) (ABC) rectangle en **A** ? *Too much easy* !!!
On a les longueurs des côtés, c'est parti !

(i) $\mathbf{AC^2 + AB^2} = 8{,}4^2 + 11{,}2^2 = \ldots = 196$;
(ii) $\mathbf{BC^2} = 14^2 = 196$;

On a alors : $\mathbf{AC^2 + AB^2 = BC^2} = 196$, donc par la réciproque du théorème de Pythagore appliqué à ce triangle, celui-ci est rectangle en **A**. *Marquer les codages.*

2) Calculs de **CD** et de **AD**. *Too much easy, too* !!!
On a des longueurs, des parallèles et donc, c'est (re)parti !

Dans le triangle **(CBD)**, on a **(AK)//(BD)**, par construction.
On peut donc appliquer le théorème de Thalès à cette configuration :
CK/CB = CA/CD = AK/BD ; application numérique : 6/14 = (3/7) = 8,4/**CD** = **AK/BD**. On peut facilement trouver **CD** = (8,4 × 7)/3 = 19,6.

Les points **C**, **A** et **D** étant alignés, on a : **CA + AD = CD**, avec **CA** = 8,4 et **CD** = 19,6, d'où : **AD = CD – AC** = 19,6 – 8,4 = 11,2.

3) Valeur de **AK**, avec **(AK)** hauteur issue de **A** (**(AK)** ⊥ **(BC)**). On a : aire**(ABC)** = **AC × AB** × 1/2 = **BC × AK** × 1/2. Application numérique : 8,4 × 11,2 × 1/2 = 14 × **AK** × 1/2. Calculs… On trouve 47,04 = 7 × **AK**, d'où **AK** = 47,04/7 = 6,72.

Commentaires superflus ? Pour la question 1), attention de ne pas écrire des tautologies, c'est-à-dire des égalités « égales », avant qu'elles le soient ! Et pour la question 2), attention à bien écrire les bonnes égalités entre les rapports de longueurs… Pas d'indulgence…

EXERCICE 3, sur 5 points = 2 + 3. (*D'après CRPE, items indépendants*)

Item 1. On travaille en base dix.

Le nombre **N** possède 134 centaines, donc il s'écrit N = $\overline{134\boldsymbol{du}}$ = 134 × 100 + $\overline{\boldsymbol{du}}$; le nombre **N** est multiple de 5 : donc ***u*** = 0 ou ***u*** = 5 ; le nombre **N** est multiple de 9 : donc la somme de ses chiffres est égale à un multiple de 9, on a donc deux cas à étudier : 1 + 3 + 4 + ***d*** + 0 = 8 + ***d*** = multiple de 9, ou 1 + 3 + 4 + ***d*** + 5 = 13 + ***d*** = multiple de 9. Ce qui donne ***d*** = 1 dans le premier cas et ***d*** = 5 dans le deuxième cas. Il y a donc deux solutions : **N** = 13410 ou **N** = 13455.

Preuve : 13410 = 134 × 100 + 10 et 13410/45 (pourquoi 45 ?) = 208 ; de même, 13455 = 13410 + 45, donc multiple de 45 ou 13455/45 = 299.

Item 2. On reste dans la base dix.
On pose **P** = $\overline{\boldsymbol{cdu}}$. Etude, cas par cas, des conditions :

- On a : ***c*** + ***d*** + ***u*** = 14 ;
- **Q** = retourné de **P** = $\overline{\boldsymbol{udc}}$, avec **P** > **Q**. Puisqu'on y est, on va canoniquement décomposer : **P** = 100***c*** + 10***d*** + ***u*** et **Q** = 100***u*** + 10***d*** + ***c*** ; ça va servir ;
- **P** – **Q** = 99, c'est-à-dire : 99***c*** – 99***u*** = 99, c'est-à-dire ***c*** – ***u*** = 1 ;
- Dernière condition : 2***d*** – 3***c*** = 2.

On a tout ce qu'il faut ! Résumé dans le système ci-dessous :

$$\begin{cases} \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u} = 14 \\ \boldsymbol{c} - \boldsymbol{u} = 1 \\ 2\boldsymbol{d} - 3\boldsymbol{c} = 2 \end{cases}$$

Petits bricolages arithmético-algébriques… A partir de $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{u} = 1$, on exprime ***u*** en fonction de ***c*** : ***u*** = ***c*** – 1 ; on substitue dans $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u} = 14$, on obtient : ***c*** + ***d*** + ***c*** – 1 = 14, c'est-à-dire : 2***c*** + ***d*** = 15. Il nous reste un bon vieux « système » :

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = 15 \\ 2\boldsymbol{d} - 3\boldsymbol{c} = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \boldsymbol{d} + 2\boldsymbol{c} = 15 \\ 2\boldsymbol{d} - 3\boldsymbol{c} = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} = 15 \\ -3\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{d} = 2 \end{cases}$$

A résoudre… On trouve : ***c*** = 4 , ***d*** = 7 , ***u*** = 3 et donc **P** = 473, **Q** = 374.

Preuve : 4 + 7 + 3 = 14 ; 473 – 374 = 99 et 2 × 7 – 3 × 4 = 14 – 12 = 2. Yes !

EXERCICE 4, sur 5 points = 2 + 3. *D'après CRPE…*

Avant la correction proprement dite, il est important de revenir sur les énoncés qu'on donne aux élèves concernant les ***nombres décimaux*** *: quelles définitions, quelles techniques utiliser, quelles justifications produire, … pour quelles tâches ?*

A titre culturel, ces « nombres » s'appelaient les ***nombres complexes*** *au début du siècle, précédent, of course. Aujourd'hui, les nombres complexes désignent une autre famille de nombres (au programme de la classe de Ter S)…*

Un premier principe pédagogique. Il est souvent préférable de donner une « définition » contextualisée voire générique ; à charge pour l'élève de faire « fonctionner » cette définition dans la résolution d'exercices.

Dans le cas des nombres décimaux, on ne peut pas donner comme définition celle donnée en cours (*quotient d'un entier par un produit de puissances de deux et de cinq*).

Mais, par exemple, on peut dire que le nombre 5,17, écrit sous cette forme est un nombre décimal, car il possède d'autres écritures qui lui sont égales…

Ce qui nous amène au *deuxième principe pédagogique*.

Quelles sont alors ces autres écritures à connaître et à utiliser ?
Cela nous ramène aux propriétés ; une liste rapide et mal écrite, revoir les ***TD***…

- Nombre décimal = fraction décimale ;
- Nombre décimal = nombre entier + fraction décimale inférieure à 1 ;
- Nombre décimal = nombre entier + « partie décimale » inférieure à 1 ;
- Nombre décimal = …

Application : 5,17 est un nombre décimal car,

- 5,17 = 517/100 ;
- 5,17 = 5 + 17/100 = 5 + 1/10 + 7/100 ;
- 5,17 = 5 + 0,17 = 5 + 0,1 + 0,07 (*James…*)… On doit maintenant se poser des questions sur les opérations, c'est le cas dans l'exercice pour des calculs de sommes.

Eléments de correction

Production de l'élève 1, relative à l'exercice 1.

Ce qui semble su et maîtrisé : des calculs de sommes élémentaires, sans s'occuper de la « virgule » : 8 + 3 = 11 et 3 + 12 = 15. Bon, c'est déjà ça, mais il y a du boulot…

Hypothèse sur l'erreur qui est bien plus qu'une erreur banale : un nombre décimal est une juxtaposition, une concaténation de deux nombres entiers ; celui qui est AVANT la virgule et celui qui est APRES, sans lien direct. Dans ce cas, les calculs sont lancés entier par entier, avant avec avant et après avec après : 0 + 0 = 0 (Yes !!!) et 8 + 3 = 11, d'où le résultat : 0,11 (Re-Yes !!!). Idem pour le deuxième calcul : 0 + 1 = 1 et 3 + 12 = 15, d'où le résultat : 1,15 ! Trop facile.

Que reste-t-il à travailler ? Ce sont comme TOUJOURS (*affirmation forte de **PW***) les principes de base de la numération décimale de position. Avec ou sans virgule, dès le moindre calcul, il faut simultanément appliquer les règles de calculs par groupements et réaliser des échanges « dix contre un » ou « un contre dix ». Lorsqu'il y a une virgule, on doit parfois, en plus, « franchir » la virgule, sans que celle-ci se déplace (*GANZ VERBOTEN* : la virgule ne se déplace pas, aucune virgule ne s'est jamais déplacée !!!) ; ce sont les chiffres qui changent de rang.

Du coup, tout se tient : si on ne dispose pas d'une définition opératoire du nombre décimal associée à une compréhension fine du système de numération ; on va vers de réels soucis. *Ce qui interroge tout autant l'élève que le **PE** !*

Production de l'élève 2, relative à l'exercice 2.

Item portant sur le rangement de nombres décimaux. Là aussi, pas simple…

Quelques points importants avant la correction. Il y a d'abord une rupture sur l'ordre des nombres décimaux par rapport à l'ordre des nombres entiers. Par exemple, dans le cas des entiers, un nombre qui a plus de chiffres qu'un autre est plus grand que cet autre. Mauvaise limonade avec les nombres décimaux : ce « théorème en acte » n'est plus valide. Exemples ? Zut !

Autre rupture plus subtile : la notion de « nombre qui suit » (ou « de nombre qui précède ») n'existe pas avec les nombres décimaux. Exemples ? Re-Zut !

*Ce qui interroge tout autant l'élève que le **PE**, bis !*

a) Conception erronée : en lien avec la réponse à la première question.
Puisque un nombre décimal est une concaténation de deux nombres entiers ; à partie décimale identique, il suffit de ranger les « parties décimales » et donc, puisque ~~0~~3 (*zéro inutile !*) < 6 < 100, on a alors : 5,03 < 5,6 < 5,100.

*Note de **PW***. L'énonciation ORALE des nombres décimaux joue des tours pendables aux élèves. En effet, en prononçant « *cinq virgule six* » pour 5,6 et « *cinq virgule cent* » pour 5,100, il n'y a pas photo pour trouver lequel des deux nombres est le plus grand : 5,100 > 5,6 (*on est toujours dans la concaténation de deux entiers séparés par une virgule*), et c'est faux, aïe !!! Cela milite pour donner du crédit à l'ECRIT : on écrit pour donner du sens à l'ORAL, car le langage oral colporte des irrégularités et des mis-connaissances que l'écrit ne colporte pas. Et donc, si un jour, une journaliste (*blonde ?*) pose, à brûle-pourpoint, la question-trottoir « *à quoi ça sert d'écrire* ? » ; on dispose d'une réponse non anecdotique sur l'importance de l'écrit, et ce, quel que soit son support…

*Note de **PW**, suite*. Ce n'est pas à grand renfort de « *mais non, tu n'as qu'à rajouter des zéros et après ça va le faire* » que ça va marcher. Ce sera le nouveau « *double effet d'impulse* » : ce sera encore « plus PIRE » (*dixit dans le 41*).
En effet, qui décide que un ou des zéros sont *utiles* ou *inutiles* ? Jamais l'élève, toujours le ***PE*** ! Et donc, re-re-ZUT.

b) Tout se tient, suite ! On oralise les nombres comme définis en haut de la page précédente ; par exemple, on ne va pas dire « *cinq virgule six* » mais on va plutôt dire « *cinq (unités) et six dixièmes* » ou « *cinquante-six dixièmes* » ou « *cinq cent soixante centièmes* » ou… La comparaison et le rangement peuvent alors se faire presque comme avant : en effet, avec le même rang ou la même unité, on n'a plus qu'à s'intéresser à la quantité de chaque rang.

Toute autre argumentation correcte et rigoureuse mathématiquement est acceptée.

EXERCICE 5, sur 6 points = (1 + 1) + 4 × 1. *D'après CRPE…*

PARTIE A

Excellentes questions ! De l'intérêt de révéler les implicites dans des énoncés de problèmes.

Premier cas : il y a proportionnalité. Il faut donner un indice qui « téléphone » la proportionnalité, sans ambigüité.
Par exemple : **[***le tarif est unique : il est le même pour tous les élèves***]**…

Deuxième cas : non-proportionnalité. Il faut donner un indice pour que le tarif-élève ne soit pas indépendant du nombre d'élèves.
Par exemple : **[***le tarif est unique, mais dès qu'on dépasse « tant » d'élèves, on a droit à « tant » de places gratuites***]** ou **[***il existe un tarif dégressif, ou un autre type de tarif, en fonction du nombre d'élèves***]**…

Toute phrase allant dans le sens de ce qui est écrit ci-dessus, avec une argumentation justifiée et nécessaire est acceptée.

PARTIE B, *non indiquée comme telle dans l'énoncé*

1) *Exemple 1*. Mise en évidence du coefficient de proportionnalité, lié à la fonction linéaire $\boldsymbol{f}$, qui à tout $\boldsymbol{x}$ (≥ 0) associe le nombre $3\boldsymbol{x}$. A chaque nombre de la ligne des masses correspond un et un seul prix : on obtient ainsi le prix en multipliant la masse par trois.

Dans le temps, on parlait d'opérateur pour désigner ce coefficient. Il lie deux grandeurs distinctes non homogènes : « *une masse multipliée par 3 donne un prix* » et inversement « *un prix divisé par 3 donne une masse* », formellement, on devrait dire « *un prix multiplié par 1/3 donne une masse* ».

2) *Exemple 2*. On ne donne pas l'image de 1 ; on n'a pas le coefficient de proportionnalité. On utilise la linéarité multiplicative : on mobilise ici la propriété dite d'homogénéité de la fonction linéaire : avec les bonnes relations multiplicatives entre les nombres de gâteaux, on trouve les bons prix correspondants. Ce type de relations est à privilégier dans toute forme de raisonnement proportionnel au primaire.

3) Etude du « *rapport entre les nombres* ».
Dans l'exemple 1 : on a un rapport externe ; le coefficient de proportionnalité exprime ici une grandeur-produit : « prix au kilo », son unité associée est alors « euros par kilo », d'où le qualificatif de rapport externe.
Dans l'exemple 2 : on a un rapport interne ; on s'intéresse aux rapports entre des mesures d'une même grandeur et ensuite on l'applique à l'autre grandeur. Ce rapport n'a pas d'unité associée.

4) Insistance sur le « *passage par l'unité* » et sur la « *linéarité multiplicative* ».
Ces propriétés ne fonctionnent pas : il n'y a pas proportionnalité. Il y a d'autres techniques pour justifier la non-proportionnalité. En particulier, si on réalise un graphique où le prix est fonction du nombre de stylos, on peut se poser des questions sur l'alignement avec l'origine des points de coordonnées (nombre de stylos ; prix).

EXERCICE 6, sur 4 points = 1 + 1 + 2.

Pas d'unité dans les calculs et dans les résultats, mais les longueurs et les aires sont homogènes : ***m*** pour les longueurs et ***m²*** pour les aires.

(i) Aire (**ABED**) = ((**AB** + **DE**) × h)/2 = ((30 + x) × h)/2 ;
(ii) Aire (**BEC**) = **EC** × h/2 = (55 – x) × h/2
(iii) La solution, si elle existe, de l'équation : ((30 + x) × h)/2 = (55 – x) × h/2 donne la valeur de x pour laquelle les deux aires sont égales.

On a : $30h + xh = 55h - xh$; $2xh = 55h - 30h = 25h$; d'où $2x = 25$, ce qui donne $x = 12{,}5$. On n'oublie pas de vérifier que la valeur trouvée donne la même aire.