Épreuve écrite de préparation au CRPE

Exercice 1 – « Vrai-Faux » Justifier.

1. **0.5 pt** Faux, c'est l'horloge A qui indique la bonne heure. En effet, l'horloge C affiche dix minutes de retard par rapport à l'horloge A, l'horloge D affiche 20 minutes d'avance par rapport à l'horloge A. En considérant que l'horloge B ne marche pas, on vérifie bien les conditions de l'énoncé.

   Remarque. On peut aussi procéder par élimination. Si B était la bonne horloge, l'une des horloges indiquerait 3h20, ce qui n'est pas le cas. Ainsi B n'est pas la bonne horloge. Si C était la bonne horloge, l'une des horloges indiquerait 2h10 (et une autre 2h40) ce qui n'est pas le cas. Enfin si D était la bonne horloge, l'une des horloges indiquerait 3h10 (et une autre 2h40) ce qui n'est pas le cas. Ainsi, ni B, ni C, ni D ne sont les bonnes horloges.
2. **1 pt** Faux.

   Presque sans calcul. La moyenne d'âge des 20 personnes est la somme de leur âge divisé par 20 (le nombre de personnes). La somme de leur âge est égal $9 \times 25 + 11 \times 45$. Or

   $$9 \times 25 + 11 \times 45 > 10 \times 25 + 10 \times 45$$

   on peut même calculer facilement la différence entre les deux qui est 20 ; on a « transformé » un 45 en 25). Or

   $$\frac{10 \times 25 + 10 \times 45}{20} = \frac{25 + 45}{2} = 35.$$

   Ainsi l'âge moyen qui est $(9 \times 25 + 11 \times 45)/20$ est strictement supérieur à 35.

   Par le calcul. La moyenne d'âge des 20 personnes est la somme de leur âge divisé par 20 (le nombre de personnes). La somme de leur âge est égal $9 \times 25 + 11 \times 45 = 225 + 495 = 720$. La moyenne d'âge est donc $720/20 = 36$ ans.
3. **1 pt** Faux. La population au bout d'une heure est « la population initiale $+ \ 0,25\times$ la population initiale » c'est-à-dire qu'au bout d'une heure la population initiale est multipliée par $1,25$. Par le même raisonnement, la population au bout de deux heures est $1,25$ fois la population au bout d'une heure c'est-à-dire $1,25^2$ fois la population initiale. En continuant, on obtient que la population au bout de 4h est $1,25^4$ fois la population initiale. Or $1,25^4 > 2$.
4. **0.5 pt** Faux. Calculons le volume V de la cuve en décimètre cube. On obtient

   $$\mathrm{V} = 12 \times 8 \times 5 = 480\mathrm{dm}^3 = 480\mathrm{L}.$$

   Ainsi, il faut $480/5 = 96$ minutes pour la remplir c'est-à-dire 1h36.

Exercice 2

1a. 1 pt On cherche à appliquer la réciproque du théorème de Thalès. Comme on a

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} = \frac{3}{8,4} = \frac{3 \times 1,5}{8,4 \times 1,5} = \frac{4,5}{12,6} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BE}}$$

et que les points $\mathrm{A, C, D}$ et$\mathrm{B, C, E}$ sont alignés dans cet ordre, on en déduit que (AB) est parallèle à (DE).

1b. 1 pt La question précédente assure que (DE) est perpendiculaire à (AD) (car elle est parallèle à une droite perpendiculaire à AD). Le triangle CDE est donc rectangle en D. Ainsi le complémentaire de l'angle $\widehat{\mathrm{CED}}$ est l'angle $\widehat{\mathrm{DCE}}$. Or les angles $\widehat{\mathrm{DCE}}$ et $\widehat{\mathrm{BCA}}$ sont opposés par le sommet et donc égaux. Comme le triangle ABC est rectangle en A, l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ est le complémentaire de $\widehat{\mathrm{BCA}}$. Ainsi les angles $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{CED}}$ ont des complémentaires égaux et sont donc égaux.

1c. 0.5 pt Un peu de trigonométrie dans le triangle rectangle ABC donne $\sin\widehat{\mathrm{ABC}} = \mathrm{AC}/\mathrm{BC} = 3/4,5 = 2/3$. On obtient ainsi $\widehat{\mathrm{ABC}} = 41,8°$.

2a. **1 pt** On calcule l'aire du triangle rectangle ABC par la formule $(\mathrm{AC} \times \mathrm{AB})/2$ (on prend pour base AC, la hauteur issue de B est alors AB puisque le triangle est rectangle en A). On peut aussi retenir la formule « la moitié du produit des côtés de l'angle droit ».

Il s'agit donc de calculer AB. On peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABC rectangle en A : $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$ et on obtient $\mathrm{AB}^2 = 4,5^2 - 3^2 = 11,25\mathrm{cm}^2$ et donc $\mathrm{AB} = 1,5\sqrt{5}\mathrm{cm}$. Finalement, l'aire de ABC est $2,25\sqrt{5}\mathrm{cm}^2$.

2b. **1 pt** L'agrandissement du triangle ABC en CDE conserve les angles, ainsi il envoie l'angle droit $\widehat{\mathrm{BAC}}$ sur l'angle droit $\widehat{\mathrm{CDE}}$ et donc A sur D. Il envoie aussi l'angle $\widehat{\mathrm{BCA}}$ sur $\widehat{\mathrm{DCE}}$ et donc C sur lui-même. Enfin, il envoie donc B sur E. Le coefficient d'agrandissement se calcule alors en DC/AC. Les points A, C et D étant alignés dans cet ordre, on a $\mathrm{CD} = \mathrm{AD} - \mathrm{AC} = 5,4\mathrm{cm}$ et donc

$$\mathrm{DC}/\mathrm{AC} = 5,4/3 = 1,8 = 9/5.$$

Dans un agrandissement, les aires sont multipliées par le carré du coefficient d'agrandissement c'est-à-dire ici 9/5. On obtient ainsi que l'aire de CDE est égal à $(9/5)^2 \times 2,25\sqrt{5} = 7,29\sqrt{5}\mathrm{cm}^2$.

Exercice 3

1. **1 pt** L'aire $\mathcal{A}_1$ de la couronne extérieure est la différence entre l'aire du disque de rayon BD et l'aire du disque AD. On obtient ainsi

$$\mathcal{A}_1 = \pi\mathrm{BD}^2 - \pi\mathrm{AD}^2 = \pi(\mathrm{BD}^2 - \mathrm{AD}^2)$$

Or le triangle ABD est rectangle en D et donc, grâce au théorème de Pythagore, on obtient

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AB}^2 = 169 = 13^2.$$

Ainsi $\mathcal{A}_1 = \pi\mathrm{AB}^2$.

L'aire $\mathcal{A}_2$ de la couronne intérieure est l'aire du disque de rayon CD c'est-à-dire $\mathcal{A}_2 = \pi\mathrm{CD}^2$.
Mais comme ABCD est un rectangle, on a $\mathrm{BA} = \mathrm{CD}$ et les deux aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales.
Finalement, Polo gagne son pari.

2a. **1.5 pt** *Calcul de l'aire de la couronne blanche.* Commençons par calculer l'aire $\mathcal{A}_3$ de la couronne blanche. C'est la différence entre l'aire de disque de diamètre AD et celui de diamètre CD. Ainsi, on obtient

$$\mathcal{A}_3 = \pi\mathrm{AD}^2 - \pi\mathrm{CD}^2 = \pi(12^2 - 5^2)\mathrm{cm}^2 = 119\pi\mathrm{cm}^2.$$

Calcul du coefficient de proportionnalité. Appelons λ le coefficient de probabilité entre l'aire d'une région et la probabilité de tomber dans cette région. Comme la probabilité de toucher la cible est de 1, on obtient que $\lambda\mathcal{A} = 1$ où $\mathcal{A}$ est l'aire de la cible. Or la cible est un disque de rayon BD. Ainsi

$$\lambda = \frac{1}{\mathcal{A}} = \frac{1}{\pi\mathrm{BD}^2} = \frac{1}{169\pi}$$

La probabilité dans la zone blanche est alors $\lambda\mathcal{A}_3$ et donc la probabilité de tomber dans la zone blanche est alors 119/169.

2b. **0.5 pt** Le fait de tomber dans la zone grise est le complémentaire de tomber dans le blanc. Ainsi, la probabilité de tomber dans le gris est donc $1 - 119/169 = 50/169$.

Ainsi, on a $(119/169)/(50/169) = 119/50 = 2,38 \simeq 2.5$ fois plus de chance de tomber dans le blanc que de tomber dans le gris.

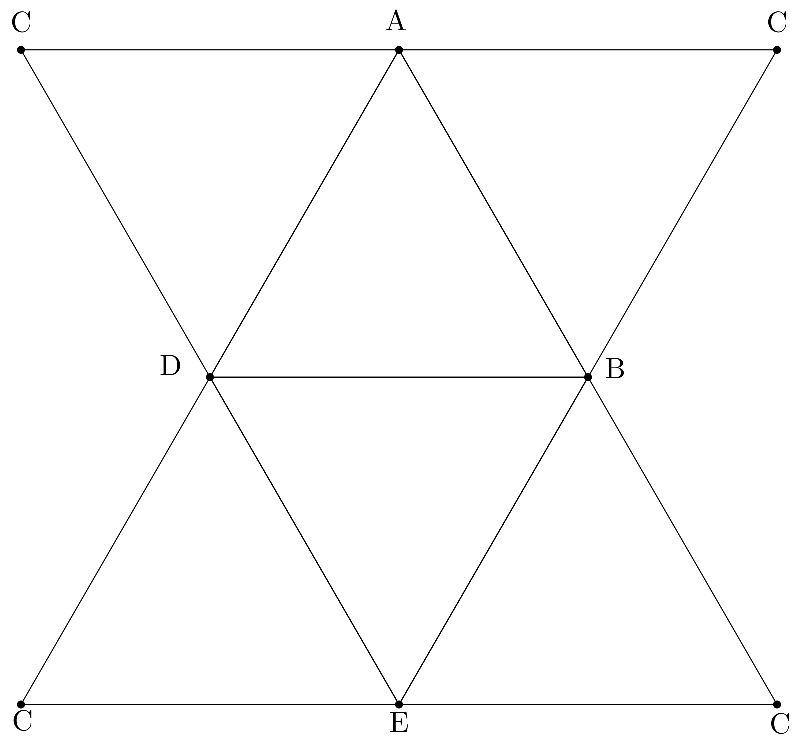
Finalement Pat gagne son pari.

Exercice 4

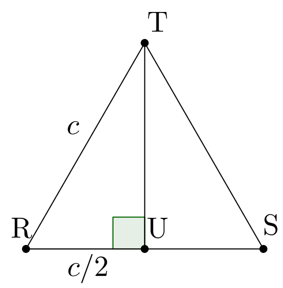
1a. **0.5 pt** Il y a 9 arêtes, 6 faces et 5 sommets. On vérifie que le nombre de faces plus le nombre de sommets est égal au nombre d'arête auquel on a ajouté 2. C'est la fameuse formule d'Euler.

`http ://fr.wikipedia.org/wiki/Theoreme_de_Descartes-Euler`

1b. **1 pt** En coupant suivant les arêtes AC, CB, CD et CE, on obtient le patron suivant.



1c. **0.5 pt** Il y a 9 arêtes de 5cm soit 45cm. Il y a 6 faces qui sont des triangles équilatéraux de coté 5cm. La hauteur d'un triangle équilatéral est égal à $\sqrt{3}/2$ fois la longueur de son côté (comme on le voit, sur la figure suivante, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle RTU rectangle en U).



On obtient ainsi que l'aire d'un triangle équilatéral de côté 5cm est égal

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{5 \times \dfrac{5 \times \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$$

L'aire totale du patron est alors 6 fois la précédente c'est-à-dire $75\sqrt{3}/2\text{cm}^2$.

2a. **1 pt** Le point H est le centre de gravité du triangle BCD. Il est donc situé à 2/3 de la hauteur issue de D. Ainsi DH est égal à 2/3 de la hauteur du triangle équilatéral BCD. On obtient ainsi

$$\text{DH} = \frac{2}{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\text{cm}$$

2b. **0.5 pt** En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ADH rectangle en H, on obtient

$$\text{AH}^2 + \text{DH}^2 = \text{AD}^2.$$

Ainsi, on obtient $\text{AH}^2 = 25 - 25/3 = 50/3 = 25 \times 6/9$ et donc $\text{AH} = 5\sqrt{6}/3$.

2c. **0.5 pt** L'hexaèdre est composé de deux tétraèdres réguliers identiques ABCD et BCDE. Ainsi, le volume V de hexaèdre est le double de celui de ABCD qu'on note V′. On obtient donc

$$V = 2V' = 2\frac{\text{(aire de la) base}\times\text{hauteur}}{3} = 2\frac{\text{(aire de BCD)}\times\text{AH}}{3} = 2\frac{\frac{25\sqrt{3}}{4}\times\frac{5\sqrt{6}}{3}}{3} = \frac{125\sqrt{2}}{6}\text{cm}^3.$$

Exercice 5

1a. **0.5 pt** On a $R(20) = 300$€ et $C(20) = -0.5 \times 20^2 + 25 \times 20 + 192 = -200 + 500 + 192 = 492$€. Lorsqu'il produit et vend 20 objets, l'artisan perd 192€. En lisant sur le tableur, on a $R(45) = 675$€ et $C(45) = 304,5$€. Le coût est maintenant inférieur à la recette et l'artisan gagne de l'argent.

1b. **0.5 pt** On a bien sûr $R(n) = 15n$.

2. **0.5 pt** En C5, on a la formule « =15*B5 » et en D5, on écrit « =-0,5*B5^2 + 25*B5+192 »

3a. **0.5 pt** Sur le graphique, on trouve un nombre proche de 30. Disons 31. (Les gens malins répondront 32 à cette question et changeront en conséquence leur réponse à la question 3c).

3b. **0.5 pt** Sur le tableur, on voit qu'à 30 objets, le coût est encore supérieur à la recette mais que ce n'est plus le cas à 33 objets. Ainsi, le passage d'un travail à perte à un travail qui rapporte de l'argent a bien lieu entre 30 et 33 objets.

3c. **0.5 pt** On a $R(31) = 31\times 15 = 465$€ et $C(31) = 973/2 = 486,5$€. Ainsi le coût est encore inférieur à la recette. Cela ne confirme pas la lecture graphique, il faut explorer le cas $n = 32$ pour lequel on trouve $C(32) = R(32) = 480$€.

3d. **1 pt** L'équation $R(n) = C(n)$ s'écrit $-0.5n^2 + 25n + 192 = 15n$. En multipliant par -2, on obtient ainsi l'équation équivalente $n^2 - 50n - 384 = -30n$ ce qu'on réécrit en ajoutant $30n$ de part et d'autre, $n^2 - 20n - 384 = 0$.

3e. **1.5 pt** On a $(n-10)^2 = n^2-20n+100$. Ainsi, $(n-10)^2-484 = n^2-20n+100-484 = n^2-20n-384$. L'équation $R(n) = C(n)$ est donc équivalente à $(n-10)^2 = 484 = 22^2$ et donc $n - 10 = 22$ ou $n - 10 = -22$ c'est-à-dire $n = 32$ (et le calcul algébrique confirme bien les résultats des questions précédentes) ou $n = -12$ (qui est en dehors du domaine d'étude : on ne peut pas construire un nombre négatif d'objets).