Licence EG - Semestre 3 - 2024-2025
Mathématiques appliquées à l'économie I
Calcul intégral (exercices) (1/2)

Exercice 1

Montrer que la fonction F définie sur $I = \mathbb{R}^{+*}$ $F(x) = 9x+4+\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^4}$ est une primitive sur I de la fonction définie par $f(x) = \frac{9x^5-x^3+6}{x^5}$.

Déterminer une autre primitive de f sur I.

Exercice 2 La fonction définie sur $I =]0, +\infty[$ par $g(x) = -1$ a-t-elle pour primitive sur I la fonction définie sur I par $G(x) = \ln(1 + e^{-x}) - \ln(1 + e^{x})$?

Exercice 3 Soient a et b deux réels. Soit $I =]\frac{3}{4} ;+\infty[$.

Soient les fonctions f et g définies sur I par $f(x) = \frac{-30x+19}{\sqrt{4x-3}}$

et $g(x) = (ax + b)\sqrt{4x-3}$.

1) Quelles doivent–être les valeurs des réels a et b pour que g soit une primitive de f sur I ?
2) Déterminer la primitive sur I de la fonction f qui vaut 6 en 3.

Exercice 4 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

$a(x) = 1 + x - 8x^2 + \frac{5}{2}x^9$, $I = \mathbb{R}$

$b(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{5}{\sqrt{x}} + 12$, $I = \mathbb{R}^{+*}$

$c(x) = -4\sqrt{x} + \frac{2}{x^3}$, $I = \mathbb{R}^{+*}$

$d(x) = 2x^{1/3} + \frac{6}{x\sqrt{x}}$, $I = \mathbb{R}^{+*}$

$e(x) = 1 - (5 - 2x)^9$, $I = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x^2+x}{(2x^3+3x^2+5)^4}$, $I =]0, +\infty[$

$g(x) = 2x\sqrt{7x^2+4}$, $I = \mathbb{R}$

$h(x) = \frac{9}{2x(\ln(x))^3}$, $I =]1, +\infty[$

$k(x) = 5e^{x} - 9$, $I = \mathbb{R}$

$p(x) = 2e^{4x+3}$, $I = \mathbb{R}$

$q(x) = -5e^{-x}$, $I = \mathbb{R}$

$r(x) = (5 - 2x^4)e^{2x^5-25x+1}$, $I = \mathbb{R}$

$s(x) = \frac{5}{6x^2}e^{\frac{2}{3x}}$, $I =]0, +\infty[$

$t(x) = \frac{1}{x}$, $I =]0, +\infty[$

$\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $J =]-\infty, 0[$

$\beta(x) = \frac{5}{5x+1}$, $I =]-\frac{1}{5},+\infty[$ puis $v(x) = \frac{5x}{5x+1}$.

$\gamma(x) = \frac{4x^3+5x}{2x^4+5x^2+5}$, $I = \mathbb{R}$

$f1(x) = \frac{x}{3x+1}$, $I =]-\frac{1}{3},+\infty[$.

$f2(x) = \frac{2x}{3x+4}$, $I =]-\frac{4}{3},+\infty[$.

Exercice 5 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

$a(x) = \frac{6e^{3x}}{1+2e^{3x}}$, $I = \mathbb{R}$

$b(x) = 3(e^{-x})^4$, $I = \mathbb{R}$

$c(x) = 3e^{x}(1 + 5e^{x})^3$, $I = \mathbb{R}$

$g(x) = 3e^{x}(1 + 5e^{x})$, $I = \mathbb{R}$

$d(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, $I =]0, +\infty[$

$f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$, $I =]1, +\infty[$

Exercice 6 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

$a(x) = \frac{-10x+8}{5x^2-8x-4}$, $I =]2, +\infty[$

$b(x) = \frac{2x}{5x^2-8x-4}$, $I =]-2/5, 2[$

$c(x) = \frac{1}{4x^2-12x+9}$, $]3/2, +\infty[$.

Exercice 7 :

Soit la fonction définie sur $I =]3 ;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^4-x^3-9x^2+13x+5}{x^2-4x+3}$.

1) Déterminer les réels a, b ,c, et d tels que $f(x) = ax^2 + bx + \frac{cx+d}{x^2-4x+3}$.

2) Déterminer les réels A et B tels que $\frac{4x+5}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$.

3) Déterminer une primitive de f sur I.

Exercice 8

1) Déterminer les réels a et b telles que, pour tout $x \neq 4$

$f(x) = \frac{17-5x}{(4-x)^2} = \frac{a}{4-x} + \frac{b}{(4-x)^2}$.

2) En déduire les primitives de f sur $]-\infty, 4[$.

Exercice 9 : Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_1^2 \frac{-t^4+10t+15}{3t}dt$

$B = \int_{-1}^1 x(2-5x)^3dx$

$C = \int_{-1}^{3/5} \frac{9}{(4-5t)^3}dt$

$D = \int_{-1}^1 \frac{2u}{5+4u^2}du$

$E = \int_{-1}^2 3^x dx$.

Exercice 10

1) Pour quelle(s) valeur(s) du réel b l'intégrale

$$A = \int_2^b \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}dx \text{ est–elle égale à } \frac{10}{3} \text{ ?}$$

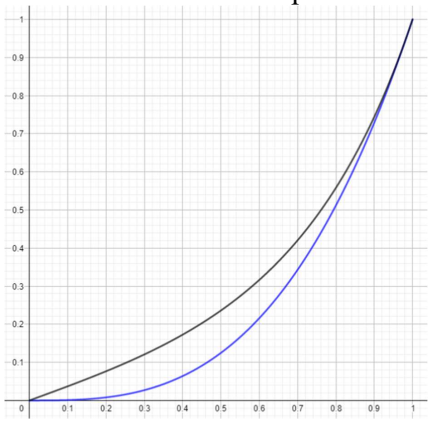
2) Trouver c > 0 tel que $\int_c^4 \frac{2}{2t+1}dt = (1/2)\ln(9)$.

Exercice 11 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{3}{2} \text{ si } x<4 \\ \frac{2}{5\sqrt{x}} \text{ si } x \geq 4 \end{cases}$$

Calculer $\int_{-3}^2 f(t)dt$, $\int_9^{36} f(t)dt$ et $\int_1^{49} f(t)dt$.

Exercice 12 : Soient f et g les fonctions définies sur [0, 1] par $f(x) = xe^{x^2-1}$ et $g(x) = x^3$. On suppose que les représentations graphiques de ces deux fonctions sont des Approximations des courbes de Lorenz permettant d'étudier la concentration des salaires dans deux entreprises F et G. Ces deux fonctions sont représentées ci-dessous.



1) Interpréter f(0,5) et g(0,5).

2) a) Quel pourcentage de la masse salariale de l'entreprise F se partagent 80 % des Employés ayant les salaires les plus faibles ?

b) Quelle part du total des salaires les 30% des salariés les mieux payés dans l'entreprise G se partagent-ils ?

3) Calculer l'intégrale $\int_0^1 (x - f(x))dx$. En déduire le **coefficient de Gini** du salaire pour l'entreprise F.

4) Déterminer l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.

Exercice 13 Calculer, grâce à une intégration par parties, les intégrales suivantes :

$A = \int_{1/4}^1 \sqrt{x}\ln(x)dx$ $B = \int_{3/4}^{5/2} (2x+3)e^{4x-3}dx$ $C = \int_0^1 \ln(16x+9x^2)dx$ $D = \int_0^1 6x^3e^{3x^2}dx$

Exercice 14 : Utiliser un changement de variable pour calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^{\ln 3} \frac{dx}{3+5e^{2x}}$ $B = \int_1^{e^2} \frac{(\ln(t)-1)^2+3\ln(t)}{t}dt$ $C = \int_4^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

Exercice 15

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive sur I qui vaut 2 en 1 de la fonctio définie par :

1) f(x) = ln(x), I = $\mathbb{R}^{+*}$ 2) $f(x) = 5x(\frac{1}{2}x-5)^{-1/3}$, $I =]\frac{2}{5}; +\infty[$

Exercice 16 : Soient $A = \int_2^6 \frac{1}{t^3}e^{\frac{2}{t}}dt$ et $B = \int_{1/3}^1 x\,e^x dx$.

1) Calculer, grâce à une intégration par parties, l'intégrale B.

2) Soit $A = \int_2^6 \frac{1}{t^3}e^{\frac{2}{t}}dt$. Déterminer le réel k tel que $A = k \int_{1/3}^1 x\,e^x dx$.

En déduire la valeur de A.

Exercice 17

La fréquentation d'un magasin (en nombre de clients par heure) est modélisée par la Fonction f définie sur l'intervalle [9, 18] par $f(t) = 100\left(\frac{t}{9}\right)^2 \ln\left(3-\frac{t}{9}\right)$, où t désigne l'heure de la journée entre 9 et 18 heures.

Calculer la valeur moyenne du nombre de visiteurs entre 9 et 18 heures.

Exercice 18

Soit $A = \int_0^2 \frac{1}{1+x}dx$. Montrer, sans calculer A, que $A \in [2/3 ; 2]$.

Exercice 19

Soit f une application continue de I vers $\mathbb{R}$ où I est un intervalle.

Soient a et b deux réels distincts de I. On suppose que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Montrer qu'il existe alors un réel $c \in]a ;b[$ tel que f(c) = 0.