FDEG Faculté de Droit Économie & Gestion	**Licence 2 ECO semestre 3, 2024-2025** *Mathématiques Appliquées à l'Economie 1* **CC1, durée: 1:30**
NOM:	**Prénom :**

Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

EXERCICE 1:

Soit f la fonction définie sur $I =]\frac{1}{3}, +\infty[$ par la relation: $f(x) = \frac{1}{9x^2+3x-2}$.

1)a) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in I$ on ait: $f(x) = \frac{a}{3x-1} + \frac{b}{3x+2}$

On a, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I$: $f(x) = \frac{3ax+3bx+2a-b}{9x^2+3x-2}$ donc $f(x) = \frac{a}{3x-1} + \frac{b}{3x+2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3b=0 \\ 2a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ 3a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{1}{3} \\ a=\frac{1}{3} \end{cases}$. Donc $\forall x \in I$ $f(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+2}\right]$

b) En déduire une primitive de f sur I.

Par 1)a), $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{3}\left[\frac{\ln(3x-1)}{3} - \frac{\ln(3x+2)}{3}\right] = \frac{1}{9}\ln\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)$ est une primitive de f sur I.

c) Déterminer la primitive de f sur I qui prenne la valeur 0 en $x = \frac{2}{3}$.

Pour $x = \frac{2}{3}$ on a : $F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{\ln(4)}{9}$ donc la primitive de f sur I qui prend la valeur 0 en $\frac{2}{3}$ est :

$G : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) - F\left(\frac{2}{3}\right)$ càd $G : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{9}\ln\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right) + \frac{\ln(4)}{9}$

2) On se place maintenant sur l'intervalle $J =]0, \frac{1}{3}[$. Déterminer une primitive de f sur cet intervalle J.

$\forall x \in J$, on a $3x-1<0$ (car $x<\frac{1}{3}$) et $f(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{\underbrace{1-3x}_{>0}} - \frac{1}{\underbrace{3x+2}_{>0}}\right]$

Donc une primitive de f sur J est $F_2 : J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{3}\left[\frac{\ln(1-3x)}{3} - \frac{\ln(3x+2)}{3}\right]$

càd $F_2 : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{9}\ln\left(\frac{1-3x}{3x+2}\right)$

3) Déduire de 1)a) et 1)b) une primitive de g définie sur $I =]\frac{1}{3}, +\infty[$ par: $g(x) = \frac{9x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 2x + 1}{9x^2 + 3x - 2}$.

Effectuons la division euclidienne de $9x^4-6x^3-5x^2+2x+1$ par $9x^2+3x-2$:

$$\begin{array}{r|l} 9x^4-6x^3-5x^2+2x+1 & 9x^2+3x-2 \\ \hline 9x^4+3x^3-2x^2 & x^2-x \\ \hline -9x^3-3x^2+2x+1 & \\ -9x^3-3x^2+2x & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Donc $g(x) = x^2 - x + \frac{1}{9x^2+3x-2}$

Donc une primitive de g sur I est

$G_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{9}\ln\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)$

EXERCICE 2:

1) Déterminer une primitive des fonctions définies par les relations suivantes sur l'intervalle I indiqué.

a) $f_1(x) = x + x^3 + \frac{1}{x} + x^{1/3}$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$

$F_1 : I \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \ln(x) + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$ est une primitive de f sur I car $F_1'(x) = f_1(x)$ pour tout $x \in I$.

b) $f_2(x) = (\frac{x}{3} + \frac{1}{3})e^{(x+1)^2}$, sur $I = \mathbb{R}$.

$F_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{6} e^{(x+1)^2}$ est une primitive de f_2 sur I

car $F_2'(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in I$.

d) $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}\,(1 + \sqrt{3x})}$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$

On pose $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \ln(1+\sqrt{3x})$ alors $\forall x \in I$ $G'(x) = g(x)$

donc G est bien une primitive de g sur I.

e) $h(x) = \dfrac{1}{(3x-7)^4} - 4$, sur $I =]\dfrac{7}{3}, +\infty[$

On a : $h(x) = (3x-7)^{-4} - 4$ donc une primitive de h sur I est $H : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{1}{(-3)\times 3}(3x-7)^{-3} - 4x = -\dfrac{1}{9(3x-7)^3} - 4x$

2) Déduire de 1)e) une primitive de $h_1(x) = \dfrac{x}{(3x-7)^5} - 4$ pour $x \in I =]\dfrac{7}{3}, +\infty[$

On a, $\forall x \in I$: $h_1(x) = \dfrac{1}{3}\dfrac{3x}{(3x-7)^5} - 4 = \dfrac{1}{3}\dfrac{(3x-7+7)}{(3x-7)^5} - 4$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{(3x-7)^4} + \dfrac{7}{3} \times \dfrac{1}{(3x-7)^5} - 4$

donc une primitive de h_1 sur I est $H_1 : I \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -\dfrac{1}{27(3x-7)^3} - 4x + \dfrac{7 \times 1}{3 \times 3(-4)(3x-7)^4}$

cad $H_1 : I \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -\dfrac{1}{27(3x-7)^3} - 4x - \dfrac{7}{36(3x-7)^4}$

3) Déduire de de 1)e) une primitive de $g_1(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3x})}$, sur $I = \mathbb{R}_+^*$

On a, $\forall x \in I$: $g_1(x) = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{3x})} = \dfrac{\sqrt{3x}+1-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{3x})} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{3x})}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{3x})} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} g(x)$.

Donc une primitive de g_1 sur I est $G_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} \ln(1+\sqrt{3x})$

EXERCICE 4: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par: $f(x,y) = x^4 + y^4$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par: $g(x,y) = x + y - 500$. On admet que f possède un minimum sous la contrainte $g(x,y) = 0$.
En utilisant une fonction à une variable, déterminer ce minimum.

On a, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$: $g(x,y)=0 \iff y=500-x$. Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto 500-x$. Alors

minimiser f sous $g(x,y)=0$ $\iff$ minimiser $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto g(x,h(x)) = x^4+(500-x)^4$

Alors, $\forall x\in\mathbb{R}$, $H'(x) = 4x^3+4(500-x)^3\times(-1) = 4\left[x^3-(500-x)^3\right]$

Donc $H'(x)=0 \iff x^3=(500-x)^3 \iff x=500-x \iff x=250$ (par bijectivité de $z\mapsto z^3$)

x	$-\infty$		250		$+\infty$
$H'(x)$		$-$	0	$+$	
H		$\searrow$	$2^5\times5^{12}$	$\nearrow$	

$H(250) = 2\times250^4 = 2\times5^8\times10^4 = 2^5\times5^{12}$

f admet en $x=250$, $y=250$ un min sous la contrainte $g(x,y)=0$. Sa valeur est $2^5\times5^{12}$.

EXERCICE 5: Soit $f:U\to\mathbb{R}$ définie par: $f(x,y)=xy$ sur $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_-^*$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par: $g(x,y)=x^2+y^2-1$. On admet que f possède sur U un minimum sous la contrainte $g(x,y)=0$.
Par la méthode du Lagrangien, déterminer ce minimum.

On pose, d'après la méthode du Lagrangien: $\mathcal{L}: U\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y,\lambda)\mapsto xy-\lambda(x^2+y^2-1)$

Alors, pour tout $(x,y,\lambda)\in U\times\mathbb{R}$,

$$\begin{cases}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda)=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda)=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0\end{cases} \iff \begin{cases}y-2\lambda x=0\\ x-2\lambda y=0\\ (x^2+y^2-1)=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=2\lambda x\\ x(1-4\lambda^2)=0\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}y=2\lambda x\\ \lambda^2=\frac14 \text{ car } x>0\\ x^2+y^2-1=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=x \text{ ou } -x\\ \lambda=\frac12 \text{ ou } -\frac12\\ x^2+x^2-1=0\end{cases} \iff \begin{cases}y=-x\\ \lambda=-\frac12\\ x^2+y^2-1=0\end{cases} \text{car } y<0 \text{ et } x>0 \iff \begin{cases}y=-x\\ \lambda=-\frac12\\ x=\frac{1}{\sqrt2}\end{cases} \iff \begin{cases}y=-\frac{\sqrt2}{2}\\ \lambda=-\frac12\\ x=\frac{\sqrt2}{2}\end{cases}$$

EXERCICE 6: Soit $f:U\to\mathbb{R}$ définie par: $f(x,y)=20x^{0.3}y^{0.7}$ sur $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par: $g(x,y)=5y+2x-10$. On admet que f possède sur U un maximum sous la contrainte $g(x,y)=0$.
Déterminer ce maximum.

On pose $\mathcal{L}: U\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y,\lambda)\mapsto f(x,y)-\lambda(5y+2x-10)$ alors, pour tout $(x,y,\lambda)\in U\times\mathbb{R}$:

$$\begin{cases}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda)=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda)=0\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0\end{cases} \iff \begin{cases}6x^{-0.7}y^{0.7}-2\lambda=0\\ 14y^{-0.3}x^{0.3}-5\lambda=0\\ -(5y+2x-10)=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=3\left(\frac{y}{x}\right)^{0.7}\\ \lambda=\frac{14}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^{0.3}\\ 5y+2x-10=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\lambda=3\left(\frac{y}{x}\right)^{0.7}\\ 3\left(\frac{y}{x}\right)^{0.7}=\frac{14}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^{0.3}\\ 5y+2x-10=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=3\left(\frac{y}{x}\right)^{0.7}\\ \frac{y}{x}=\frac{14}{15}\\ 5y+2x-10=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=3\left(\frac{14}{15}\right)^{0.7}\\ y=\frac{14}{15}x\\ \frac{14}{3}x+2x-10=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=3\left(\frac{14}{15}\right)^{0.7}\\ x=\frac32\\ y=\frac75\end{cases}$$

Donc le max est atteint en $\left(\frac32,\frac75\right)$.