

Nom-Prénom :

EXERCICE 1:

dans cet exercice f désignera une primitive de f sur I

1) Déterminer une primitive sur $I =]0; +\infty[$ de la fonction définie par $f(x) = -2 + 12x^8 - \frac{8}{x^5} + 9x^{1/4}\sqrt{x}$.

$$f(x) = -2 + 12x^8 - 8x^{-5} + 9x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{2}}$$

$$= -2 + 12x^8 - 8x^{-5} + 9x^{\frac{3}{4}}$$

$$(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4})$$

Une primitive de f sur I est :

$$F(x) = -2x + 12 \frac{x^{8+1}}{8+1} - 8 \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + 9 \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}$$

$$= -2x + \frac{12}{9} x^9 - \frac{8}{-4} x^{-4} + 9 \times \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}}$$

$$= -2x + \frac{4}{3} x^9 + \frac{2}{x^4} + \frac{36}{7} x^{\frac{7}{4}} = F(x)$$

2) Déterminer une primitive sur $I = \mathbb{R}$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{16x}{3(4x^2+1)^{1/2}}$

$$f(x) = \frac{16}{3} \times x (4x^2+1)^{-1/2} \stackrel{?}{=} k u' u^m$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$u = 4x^2+1 \quad | \quad u' = 8x$$

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{8x}{u'} \frac{(4x^2+1)^{-1/2}}{u^m}$$

$$F(x) = \frac{2}{3} \frac{(4x^2+1)^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \times 2 (4x^2+1)^{1/2} = \frac{4}{3} \sqrt{4x^2+1} = F(x)$$

3) Déterminer une primitive sur $I = \mathbb{R}$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^3}{3+5x^4} \stackrel{?}{=} k \frac{u'}{u}$

$$u = 3+5x^4 \quad | \quad u' = 20x^3$$

$$f(x) = \left(2 \times \frac{1}{20}\right) \times \frac{20x^3 u'}{3+5x^4 u}$$

$$k = \frac{1}{10}$$

$$F(x) = \frac{1}{10} \ln(3+5x^4) = \frac{1}{10} \ln(3+5x^4) = F(x) \quad \text{car } 3+5x^4 \geq 3 > 0$$

4) Déterminer une primitive sur $I = \mathbb{R}$ de la fonction définie par $f(x) = (3x+2)e^{3x^2+4x-3} \stackrel{?}{=} k u' e^u$

$$u = 3x^2+4x-3 \quad | \quad u' = 6x+4 = 2(3x+2)$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{2(3x+2)}{u'} \frac{e^{3x^2+4x-3}}{e^u}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{3x^2+4x-3}$$

5) Déterminer une primitive sur $I =]\frac{9}{2}; +\infty[$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{5x}{2x-9}$.

$$f(x) = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{2x}{2x-9} = \frac{5}{2} \times \frac{2x-9+9}{2x-9} = \frac{5}{2} \left(\frac{2x-9}{2x-9} + \frac{9}{2x-9} \right)$$

$$f(x) = \frac{5}{2} \left(1 + \frac{9}{2x-9} \right) = \frac{5}{2} + \frac{45}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 \times 2}{2x-9}$$

k u' u

$$F(x) = \frac{5}{2}x + \frac{45}{4} \ln(|2x-9|) = \frac{5}{2}x + \frac{45}{4} \ln(2x-9) = F(x)$$

> 0 sur I

EXERCICE 2 1) Soit la fonction définie sur $I =]1/3; +\infty[$ par $g(x) = \frac{x+3}{6x^2+x-1}$.

a) Déterminer les constantes réelles A et B telles que $\frac{x+3}{6x^2+x-1} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{3x-1}$.

$$\begin{aligned} \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{3x-1} &= \frac{A(3x-1) + B(2x+1)}{(2x+1)(3x-1)} \\ &= \frac{3Ax - A + 2Bx + B}{6x^2 - 2x + 3x - 1} = \frac{(3A+2B)x - A+B}{6x^2+x-1} \end{aligned}$$

Il y a égalité avec $g(x)$ si $\begin{cases} 3A+2B=1 \\ -A+B=3 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3A+2B=1 \\ -A+B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=3+A \\ 3A+2(3+A)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=3+A \\ 6+5A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1-6}{5} = -1 \\ B = 3+(-1) = 2 \end{cases}$$

On admettra pour continuer que $A = -1$ et $B = 2$.

b) Déterminer une primitive de g sur I , puis la primitive de g sur I qui vaut 1 en 2.

$$g(x) = \frac{-1}{2x+1} + \frac{2}{3x-1} = \left(-\frac{1}{2} \right) \times \frac{2}{2x+1} + \left(\frac{2}{3} \right) \times \frac{3}{3x-1}$$

k u' u k u' u

Une primitive de g sur I est $G(x) = -\frac{1}{2} \ln(|2x+1|) + \frac{2}{3} \ln(|3x-1|)$

> 0 sur I > 0 sur I

$$G(x) = -\frac{1}{2} \ln(2x+1) + \frac{2}{3} \ln(3x-1)$$

Les autres primitives sont de la forme $G(x) + c$.

On cherche c tel que $G(2) + c = 1$ $\Leftrightarrow c = 1 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{2}{3} \ln 5$

$$G(2) + c = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln(5) + \frac{2}{3} \ln(5) + c = 1 \quad = 1 - \frac{1}{6} \ln 5$$

$$G_\lambda(x) = G(x) + 1 - \frac{1}{6} \ln 5$$

c) Déterminer une primitive de g sur l'intervalle $J =]-1/2; 1/3[$.

$$G_2(x) = -\frac{1}{2} \ln(|2x+1|) + \frac{2}{3} \ln(|3x-1|) = -\frac{1}{2} \ln(2x+1) + \frac{2}{3} \ln(1-3x)$$

> 0 sur J < 0 sur J

2) Soit la fonction définie sur $I =]1/3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{36x^4 - 7x^2 + 2x + 3}{6x^2 + x - 1}$. Déterminer une primitive de f sur I .

$$\begin{array}{r} 36x^4 - 7x^2 + 2x + 3 \\ - (36x^4 + 6x^3 - 6x^2) \\ \hline -6x^3 - x^2 + 2x + 3 \\ - (-6x^3 - x^2 + x) \\ \hline x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6x^2 + x - 1 \\ \hline 6x^2 - x \\ \hline \end{array}$$

Une primitive de f sur I est :

$$F(x) = 6 \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} x^2 + 6 \ln x$$

$$F(x) = 2x^3 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{2}{3} \ln(3x-1)$$

$$f(x) = 6x^2 - x + \frac{x+3}{6x^2+x-1} = 6x^2 - x + g(x)$$

EXERCICE 3 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2xy + 3x^2 - 28x + 80$.

1) En utilisant la méthode du Lagrangien, minimiser la fonction f sous la condition $x - y = 1$. Quelle est la valeur du minimum ?

$$x - y = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x - y - 1}_{g(x, y)} = 0$$

$$L(x, y, \lambda) = 2xy + 3x^2 - 28x + 80 - \lambda(x - y - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2y + 6x - 28 - \lambda(1) = 2y + 6x - 28 - \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2x - \lambda(-1) = 2x + \lambda$$

$$\text{On résout (S) : } \begin{cases} 2y + 6x - 28 - \lambda = 0 \\ 2x + \lambda = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ 2y + 6x - 28 + 2x = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ 8x + 2y = 28 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ 4x + y = 14 \\ x = 1 + y \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ x = 1 + y \\ 4(1 + y) + y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2x \\ x = 1 + y \\ 5y + 4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{14 - 4}{5} = 2 \\ x = 1 + 2 = 3 \\ \lambda = -2(3) = -6 \end{cases}$$

f a en $(x=3; y=2)$, sous la condition $g(x, y) = 0$ un minimum égal à

2) Retrouver le résultat en étudiant une fonction à une variable. $f(3; 2) = 12 + 27 - 84 + 80 = 35$

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$$

on étudie, pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x, x-1)$.

$$h(x) = 2x(x-1) + 3x^2 - 28x + 80 = 2x^2 - 2x + 3x^2 - 28x + 80 = 5x^2 - 30x + 80$$

$$h'(x) = 10x - 30; \quad h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

x	3
signe de $h'(x)$	- 0 +
variations de h	

Donc h a en $x=3$ un minimum global sur $\mathbb{R}$.
Dans ce cas $y = 3 - 1 = 2$.
c.à.d. sous la condition, f a en $(3; 2)$ un minimum égal à $f(3; 2) = \dots = 35$

EXERCICE 4 : Soit la fonction définie pour $x > 0$ et $y > 0$ par $f(x, y) = 100 x^{0.4} y^{0.6}$.

Maximiser f sous la condition $2x + 3y = 5$. Quelle est la valeur du maximum ?

$$g(x, y) = 2x + 3y - 5$$

$$L(x, y, \lambda) = 100 x^{0.4} y^{0.6} - \lambda (2x + 3y - 5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 100 \times 0.4 x^{-0.6} y^{0.6} - \lambda (2) = 40 x^{-0.6} y^{0.6} - 2\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 100 \times x^{0.4} \times 0.6 y^{-0.4} - \lambda (3) = 60 x^{0.4} y^{-0.4} - 3\lambda$$

$$(S) \begin{cases} 40 x^{-0.6} y^{0.6} - 2\lambda = 0 \\ 60 x^{0.4} y^{-0.4} - 3\lambda = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40 x^{-0.6} y^{0.6} = 2\lambda \\ 60 x^{0.4} y^{-0.4} = 3\lambda \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 40 x^{-0.6} y^{0.6} = 2\lambda \\ 60 x^{0.4} y^{-0.4} = 3\lambda \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{60 x^{0.4} y^{-0.4}}{40 x^{-0.6} y^{0.6}} = \frac{3\lambda}{2\lambda} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \frac{x^{0.4+0.6}}{y^{0.4+0.6}} = \frac{3}{2} \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \frac{x}{y} \Rightarrow x = y$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = \dots \\ y = x \\ 2x + 3x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = \dots \\ x = \frac{5}{5} = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

cd : sous la condition $g(x, y) = 0$, f a en $(x=1, y=1)$ un maximum

EXERCICE 5 : égal à $f(1, 1) = 100 \times 1^{0.4} \times 1^{0.6} = 100 \times 1 \times 1 = 100$.

1) Déterminer une primitive sur $I =]1; +\infty[$ des fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{(5x-4)^2}$ et $g(x) = \frac{1}{5x-4}$.

$$f(x) = (5x-4)^{-2} = \frac{1}{5} \times 5 (5x-4)^{-2}; \quad F(x) = \frac{1}{5} \frac{(5x-4)^{-2+1}}{-2+1} = \frac{1}{5} (5x-4)^{-1} = \frac{1}{5(5x-4)}$$

$$g(x) = \frac{1}{5} \frac{1 \times 5}{5x-4}; \quad G(x) = \frac{1}{5} \ln(5x-4) = \frac{1}{5} \ln(5x-4)$$

2) En déduire une primitive sur $I =]1; +\infty[$ de la fonction définie par $h(x) = \frac{5x}{(5x-4)^2}$, puis de la fonction

$$\text{définie par } w(x) = \frac{x+9}{(5x-4)^2} \quad \left| \quad W(x) = \frac{1}{25} \ln(5x-4) + \frac{19}{25(5x-4)} \right.$$

$$h(x) = \frac{5x-4+4}{(5x-4)^2} = \frac{5x-4}{(5x-4)^2} + \frac{4}{(5x-4)^2} = \frac{1}{5x-4} + 4 \times \frac{1}{(5x-4)^2} = g(x) + 4f(x)$$

$$\text{donc une primitive est } H(x) = G(x) + 4F(x) = \frac{1}{5} \ln(5x-4) + \frac{4}{5(5x-4)}$$

$$w(x) = \frac{x}{(5x-4)^2} + \frac{9}{(5x-4)^2} = \frac{1}{5} \times \frac{5x}{(5x-4)^2} + \frac{9}{(5x-4)^2} = \frac{1}{5} h(x) + 3f(x)$$

$$\text{donc } W(x) = \frac{1}{5} H(x) + 3F(x) = \frac{1}{5} (G(x) + 4F(x)) + 3F(x) = \frac{1}{5} G(x) + \left(\frac{4}{5} + 3\right) F(x)$$