

Nom-Prénom :

EX1 : 1) Calculer les intégrales $K = \int_1^2 \frac{2}{(2x-1)^2} dx$ et $L = \int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx$.

$$K = \int_1^2 \frac{2}{(2x-1)^2} dx = \left[\frac{(2x-1)^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{2x-1} \right]_1^2 = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$L = \int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx = \left[\frac{1}{3} \ln(3x-2) \right]_1^2 = \frac{1}{3} \ln(4) - \frac{1}{3} \ln(1) = \frac{1}{3} \ln 4$$

sur $[1;2]$

2) Soit la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-24x^2 + 27x - 8}{(3x-2)(2x-1)^2}$.

a) Déterminer les réels A et B tels que, pour tout x de I, $f(x) = \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{(2x-1)^2}$.

$$\frac{A}{3x-2} + \frac{B}{(2x-1)^2} = \frac{A(2x-1)^2 + B(3x-2)}{(3x-2)(2x-1)^2} = \frac{A(4x^2 - 4x + 1) + 3Bx - 2B}{(3x-2)(2x-1)^2} = \frac{4Ax^2 + (3B - 4A)x + A - 2B}{(3x-2)(2x-1)^2}$$

On identifie et on obtient s :

$$\begin{cases} 4A = -24 \\ 3B - 4A = 27 \\ A - 2B = -8 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} A = -6 \\ B = \frac{27+4A}{3} = \frac{27-24}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ B = \frac{-8-A}{-2} = \frac{-8+6}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \end{cases}$$

On admettra pour continuer que $A = -6$ et $B = 1$.

b) Calculer l'intégrale $M = \int_1^2 f(x) dx$.

$$M = \int_1^2 \left(\frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{-6}{3x-2} \right) dx = \int_1^2 \frac{2}{(2x-1)^2} dx - \int_1^2 6 \times \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{2} K - 6L = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right) - 6 \left(\frac{1}{3} \ln 4 \right) = \frac{1}{3} - 2 \ln 4$$

EX2 : Déterminer la valeur moyenne M sur $I = [1; 4]$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 6x + 2$.

$$M = \frac{1}{4-1} \int_1^4 (x^2 + 6x + 2) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 + 6 \times \frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^4 = \frac{1}{3} \left(\frac{64}{3} + 48 + 8 - \left(\frac{1}{3} + 3 + 2 \right) \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{64}{3} + 56 - \frac{1}{3} - 5 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{62}{3} + 51 \right) = \frac{72}{3} = 24$$

EX3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x(4x^2-1)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{9}{x^4} & \text{si } 1 < x \end{cases}$

On admet que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Calculer l'intégrale $A = \int_0^2 f(x) dx$.

$$A = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = A_1 + A_2$$

$$A_1 = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{coefficient}} \underbrace{4x}_{u'} \underbrace{(4x^2-1)^3}_{u^m} dx = \left[\frac{1}{4} \times \frac{(4x^2-1)^4}{4} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{16} (4x^2-1)^4 \right]_0^1 = \frac{1}{16} \underbrace{(4-1)^4}_{=3^4} - \frac{1}{16} (-1)^4$$

$$A_2 = \int_1^2 -\frac{9}{x^4} dx = \int_1^2 -9x^{-4} dx = \left[-9 \frac{x^{-4+1}}{-4+1} \right]_1^2 = \left[\frac{3}{x^3} \right]_1^2 = \frac{3}{8} - \frac{3}{1} = \frac{3-24}{8} = -\frac{21}{8}$$

$$A = 5 - \frac{21}{8} = \frac{40-21}{8} = \frac{19}{8}$$

EX4 :

1) Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \underbrace{(x^2 - 2x + 2)}_u \underbrace{e^x}_v$ est une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^x$.

$$F'(x) = u'v + uv' = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x = e^x (\cancel{2x-2} + x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2}) = x^2 e^x = f(x) : F \text{ est bien une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}.$$

2) Vérifier à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$, que $J = \int_1^4 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$ est égale à $4e^2 - 2e$.

$$t = \sqrt{x} \text{ donc } \frac{dx}{dt} = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ d'où } dx = 2\sqrt{x} dt$$

$$J = \int_1^4 \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{coefficient}} \times \underbrace{2\sqrt{x}}_{\text{coefficient}} \times \underbrace{e^{\sqrt{x}}}_{\text{fonction}} \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}} dx}_{\text{coefficient}} = \int_1^4 \sqrt{x} \times 2\sqrt{x} \times e^{\sqrt{x}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} \times e^{\sqrt{x}} = 2t^2 e^t$$

nouvelles bornes: si $x=1$, $t=\sqrt{1}=1$

si $x=4$, $t=\sqrt{4}=2$

$$\text{donc } J = \int_1^2 2t^2 e^t dt = \left[2F(t) \right]_1^2 = 2(4-4+2)e^2 - 2(1-1+2)e = 4e^2 - 4e$$

EX5 :

1) Calculer l'intégrale $A = \int_0^3 e^t dt$.

$$A = [e^t]_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

2) Calculer l'intégrale $B = \int_{-1/2}^1 4x e^{2x+1} dx$. (indication : faire une intégration par parties)

$$v = 4x \quad | \quad v' = 4$$

$$u = \frac{1}{2} e^{2x+1} \quad | \quad u' = e^{2x+1}$$

$$B = \left[4x \times \frac{1}{2} e^{2x+1} \right]_{-1/2}^1 - \int_{-1/2}^1 \frac{4}{2} e^{2x+1} dx$$

$$= 2e^3 - (-e^0) - [e^{2x+1}]_{-1/2}^1$$

$$= 2e^3 + 1 - (e^3 - e^0) = 2e^3 + 1 - e^3 + 1 = e^3 + 2$$

3) Montrer à l'aide du changement de variable $t = 2x + 1$ dans l'intégrale B que $B = \int_0^3 (t-1)e^t dt$.

$$t = 2x+1 \text{ donc } \frac{dt}{dx} = (2x+1)' = 2 \text{ d'où } dt = 2dx$$

$$B = \int_{-1/2}^1 4x e^{2x+1} dx = \int_{-1/2}^1 (2x+1) e^{2x+1} \times 2 dx$$

$$dt = 2dx$$

$$t = 2x+1 \Leftrightarrow t-1 = 2x$$

$$2x e^{2x+1} = (t-1)e^t$$

bornes: si $x = -\frac{1}{2}$, $t = 2(-\frac{1}{2})+1 = -1+1=0$
 si $x = 1$, $t = 2+1=3$

$$\text{Donc } B = \int_0^3 (t-1)e^t dt$$

4) Soit $C = \int_0^3 t e^t dt$. Exprimer C en fonction de A et B ; En déduire la valeur de C.

$$B = \int_0^3 (t-1)e^t dt = \int_0^3 (te^t - e^t) dt = \int_0^3 te^t dt - \int_0^3 e^t dt = C - A$$

$$\text{donc } C = A + B = e^3 - 1 + e^3 + 2 = 2e^3 + 1$$

EX6 :

1) Déterminer une primitive sur $I =]-\frac{5}{4}; +\infty[$ de la fonction définie par $g(t) = \frac{4t}{4t+5}$.

$$g(t) = \frac{4t + 5 - 5}{4t+5} = \frac{4t+5}{4t+5} - \frac{5}{4t+5} = 1 - \frac{5}{4t+5} = 1 - 5 \times \frac{1}{4t+5}$$

une primitive est donc

$$G(t) = t - \frac{5}{4} \ln(4t+5)$$

$> 0 \text{ sur } I$

2) Soit la fonction f définie pour $x \in (I =]-\frac{5}{4}; +\infty[)$ par $f(x) = 8x \ln(4x+5)$.

a) Soit $x \in I$. Calculer grâce à une intégration par partie l'intégrale $h(x) = \int_{-1}^x 8t \ln(4t+5) dt$.

$$\begin{array}{l|l} u' = 8t & u = 8 \times \frac{1}{2} t^2 = 4t^2 \\ v = \ln(4t+5) & v' = \frac{4}{4t+5} \end{array}$$

$$h(x) = \left[4t^2 \ln(4t+5) \right]_{-1}^x - \int_{-1}^x \frac{16t^2}{4t+5} dt$$

$$= 4x^2 \ln(4x+5) - 4(-1)^2 \ln(1) - \int_{-1}^x \left(4t - 5 + \frac{25}{4t+5} \right) dt$$

$$= 4x^2 \ln(4x+5) - \int_{-1}^x \left(4t - 5 + \frac{25}{4} \frac{1}{4t+5} \right) dt$$

$$= 4x^2 \ln(4x+5) - \left[2t^2 - 5t + \frac{25}{4} \ln(4t+5) \right]_{-1}^x$$

$$= 4x^2 \ln(4x+5) - \left(2x^2 - 5x + \frac{25}{4} \ln(4x+5) - \left(2 + 5 + \frac{25}{4} \ln(1) \right) \right)$$

$$= 4x^2 \ln(4x+5) - 2x^2 + 5x - \frac{25}{4} \ln(4x+5) + 7$$

$$\begin{array}{r|l} 16t^2 & 4t+5 \\ \hline (16t^2+20t) & 4t-5 \\ -20t & \\ -(-20t-25) & \\ \hline & 25 \end{array}$$

b) Que représente précisément h pour f ?

h est la primitive de f sur I qui s'annule en -1 .

EX7 : Soit la fonction définie sur $I = [-2; 1]$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

1) Etudier les variations de f sur I . En déduire que lorsque $x \in I$, $\frac{1}{e^2} \leq f(x) \leq 1$.

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x e^{-\frac{1}{2}x^2} = -x e^{-\frac{1}{2}x^2} ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	-2	0	1
signe de $f'(x)$		+	-
variation de f	e^{-2}		$e^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{array}{l} f(-2) = e^{-\frac{1}{2} \times 4} = e^{-2} \\ f(0) = e^0 = 1 \\ f(1) = e^{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

$e^{-2} < e^{-\frac{1}{2}}$
donc d'après le tableau de variations $\frac{1}{e^2} \leq f(x) \leq 1$

2) Déterminer alors un encadrement de l'intégrale $A = \int_{-2}^1 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.

$$\frac{1}{e^2} \leq e^{-\frac{1}{2}x^2} \leq 1 \quad \text{donc} \quad \int_{-2}^1 \frac{1}{e^2} dx \leq A \leq \int_{-2}^1 1 dx$$

$$\text{or } \int_{-2}^1 \frac{1}{e^2} dx = \left[\frac{x}{e^2} \right]_{-2}^1 = \frac{1}{e^2} - \left(\frac{-2}{e^2} \right) = \frac{3}{e^2}$$

$$\text{et } \int_{-2}^1 1 dx = [x]_{-2}^1 = 1 - (-2) = 3$$

donc $\frac{3}{e^2} \leq A \leq 3$

