	Licence 2 ECO semestre 3, 2024-2025 ***Mathématiques Appliquées à l'Economie 1*** **CC2, durée: 1:30**
NOM:	**Prénom** :

Toutes les réponses doivent être clairement rédigées et justifiées.

EXO 1: **1)a)** Effectuer la division Euclidienne de $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x$ par $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

Voir le cours. On obtient : $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x = (x^3 - 5x^2 + 8x - 4) \cdot (x+1) + 2x^2 - 5x + 4$

1)b) En déduire l'identité: $\dfrac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = x + 1 + \dfrac{2x^2 - 5x + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$.

Comme $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x = (x^3 - 5x^2 + 8x - 4) \cdot (x+1) + 2x^2 - 5x + 4$,

donc on a bien $\dfrac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - x}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = x + 1 + \dfrac{2x^2 - 5x + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$

1)c) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que: $\dfrac{2x^2 - 5x + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx}{(x-2)^2}$.

On a, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{bx}{(x-2)^2} = \dfrac{a(x-2)^2 + bx^2 - bx}{(x-1)\cdot(x-2)^2} = \dfrac{x^2(a+b) + x(-4a-b) + 4a}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$ donc:

$$\frac{2x^2 - 5x + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx}{(x-2)^2} \iff \begin{cases} 4a = 4 \\ -4a - b = -5 \\ a + b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ -b = -1 \\ a + b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ -b = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Donc $a = 1$, $b = 1$.

2) <u>On suppose ici</u> que $a = 1$ et $b = 1$. <u>En utilisant 1)</u>, déterminer une primitive de la fonction f définie par:

$f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$ sur $I =]2, +\infty[$.

On a, par ce qui précède, pour tout $x \in I$: $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x}{(x-2)^2}$ donc

$f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x-2+2}{(x-2)^2} = x + 1 + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{(x-2)^2}$. Ainsi une primitive de f sur I est

donc $F : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + x + \ln(x-1) + \ln(x-2) - 2(x-2)^{-1} \end{cases}$

EXO 2: Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{1+4x^4} & \text{, si } 0 \leq x < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{x^3} & \text{, si } x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Déterminer $A = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

On a: $A = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{1+4x^4} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{x^3} = \left[\frac{1}{16}\ln(1+4x^4)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[\frac{1}{(-2)}x^{-2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$

donc $A = \dfrac{1}{16}\ln(2) - \dfrac{1}{2}\cdot(1-2) = \dfrac{1}{16}\ln(2) + \dfrac{1}{2}$

EXO 3: Soit, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $I_a = \displaystyle\int_0^1 (x+a)^3\, e^{(x+a)^2}\,dx$ et $K_a = \displaystyle\int_0^1 (x+a)\, e^{(x+a)^2}\,dx$

1) Etant donné $a \in \mathbb{R}$, calculer K_a en fonction de a. Trouver alors $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $K_{a_0} = \dfrac{1-e}{2}$.

On a, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $K_a = \left[\dfrac{1}{2}e^{(x+a)^2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{2}\left[e^{(1+a)^2} - e^{a^2}\right]$. Donc pour $a_0 = -1$ on obtient: $K_{a_0} = \dfrac{1-e}{2}$

2)a) Calculer à l'aide d'une IPP, la valeur de I_a en fonction de a et de K_a.

On a, par IPP: $I_a = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}(x+a)^2}_{U} \cdot \underbrace{2(x+a)\,e^{(x+a)^2}}_{V'}\,dx = \left[\frac{1}{2}(x+a)^2 e^{(x+a)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 (x+a)\cdot e^{(x+a)^2}dx$

$= \dfrac{1}{2}\left[(1+a)^2 e^{(1+a)^2} - a^2 e^{a^2}\right] - K_a$

b) On suppose ici que $a_0 = -1$. Déduire de ce qui précède la valeur de I_{a_0} .

D'après ce qui précède, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$I_a = \dfrac{1}{2}\left[(1+a)^2 e^{(1+a)^2} - a^2 e^{a^2}\right] - \dfrac{1}{2}\left[e^{(1+a)^2} - e^{a^2}\right]$. Donc pour $a_0 = -1$:

$I_{a_0} = \dfrac{1}{2}[-e] - \dfrac{1}{2}[1-e]$, c'est-à-dire: $I_{a_0} = -\dfrac{1}{2}$

EXO 4: Soit f la fonction définie par: $f(x) = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$, pour tout x dans $I = [1,3]$.

1) Etudier les variations de f. En déduire que, pour tout $x \in I$, on a: $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{5}$.

On a $\quad f(x) = (1-x)^2(1+x^2)^{-1}$ donc $\; f'(x) = 2(1-x)(-1)(1+x^2)^{-1} + (1-x)^2(-1)(1+x^2)^{-2}(2x)$

c'est-à-dire: $\; f'(x) = \dfrac{-2(1-x)}{(1+x^2)} - \dfrac{2x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-2-2x^2+2x+2x^3-2x+4x^2-2x^3}{(1+x^2)^2}$

c'est-à-dire: $f'(x) = \dfrac{-2+2x^2}{(1+x^2)^2}$.

De là on peut faire un tableau de variations (cf cours de L1).

x	1		3
f '(x)		+	
f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{5}$

2) En déduire, à l'aide de l'inégalité de la moyenne, un encadrement de l'intégrale: $\quad B = \displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

D'après le cours on a: $\; (3-1)\cdot 0 \leq B \leq (3-1)\dfrac{2}{5}$ $\;$ donc : $\quad 0 \leq B \leq \dfrac{4}{5}$

<u>EXO 5</u>: 1)a) Calculer à l'aide d'un changement de variable la valeur de: $A = \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$

(on pourra poser: $u = x^3$)

On a, posant $\begin{cases} u = x^3 \\ du = 3x^2\,dx \end{cases}$ $\; : \; A = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+u}\left(\frac{1}{3}\right)du = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{9}\cdot[2\sqrt{2}-1]$

2)a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que: $\dfrac{1}{3+u}\cdot\dfrac{1}{3u} = \dfrac{a}{3+u} + \dfrac{b}{3u}$

On a, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $\dfrac{a}{3+u} + \dfrac{b}{3u} = \dfrac{u(3a+b)+3b}{3u(3+u)}$ $\quad$ donc

$\dfrac{1}{3+u}\cdot\dfrac{1}{3u} = \dfrac{a}{3+u} + \dfrac{b}{3u} \iff \begin{cases} 3a+b=0 \\ 3b=1 \end{cases}$. Donc $a = \dfrac{-1}{9}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

2)b) En déduire, à l'aide d'un changement de variable, la valeur de $\; B = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{3+e^{-3t}}\,dt$

On pose $\begin{cases} u = e^{-3t} \\ du = -3u\,dt \end{cases}$. Alors $\; B = \displaystyle\int_{e^{-3}}^{e^{-9}} \frac{1}{3+u}\cdot\frac{1}{(-3u)}\,du$ donc par 2)a):

$$B = -\int_{e^{-3}}^{e^{-9}} \left(\frac{a}{3+u} + \frac{b}{(3u)}\right) du = -a\int_{e^{-3}}^{e^{-9}} \frac{1}{3+u}\,du - \frac{1}{3}b\int_{e^{-3}}^{e^{-9}} \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{9}\left[\ln(3+e^{-9}) - \ln(3+e^{-3})\right] - \frac{1}{9}[-9-(-3)]$$

c'est-à-dire encore: $B = \frac{1}{9}\left[\ln(3+e^{-9}) - \ln(3+e^{-3})\right] + \frac{2}{3}$

<u>EXO 6</u>: **1)** A l'aide d'une IPP, calculer la valeur de $A = \int_0^{1/2} \ln(1-x)\,dx$ et $B = \int_0^{1/2} \ln(1+x)\,dx$.

On, par IPP: $A = \int_0^{1/2} 1\cdot\ln(1-x)\,dx = \left[x\cdot\ln(1-x)\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{(-x)}{1-x}\,dx = \frac{-\ln(2)}{2} + \int_0^{1/2} \frac{(x-1+1)}{1-x}\,dx$

donc $A = \frac{-\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} - \left[\ln(1-x)\right]_0^{1/2} = \frac{-\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \ln(2) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}$ et de même:

$B = \int_0^{1/2} \ln(1+x)\,dx = \left[x\cdot\ln(1+x)\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{1+x}\,dx = \frac{\ln(3)-\ln(2)}{2} - \int_0^{1/2} \frac{(x+1-1)}{1+x}\,dx$ donc:

$B = \frac{\ln(3)-\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \left[\ln(1+x)\right]_0^{1/2} = \frac{3\ln(3)}{2} - \frac{3\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}$

2)a) En déduire la valeur de $C = \int_0^{1/2} \ln(4-4x^2)\,dx$.

Par 1), il vient: $C = \int_0^{1/2} (\ln(4) + \ln(1-x^2))\,dx = \frac{\ln(4)}{2} + A + B$ car $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$. Donc

$C = \int_0^{1/2} (\ln(4) + \ln(1-x^2))\,dx = \frac{\ln(4)}{2} + \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3\ln(3)}{2} - \frac{3\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3\ln(3)}{2} - 1$

2)b) Retrouver la valeur de C directement par une IPP.

$C = \int_0^{1} 1\cdot\ln(4-4x^2)dx = \left[x\ln(4-4x^2)\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} x\frac{(-8x)}{4-4x^2}\,dx = \left[x\ln(4-4x^2)\right]_0^{1/2} + 2\int_0^{1/2} \frac{4x^2}{4-4x^2}\,dx$

Donc $C = \left[x\ln(4-4x^2)\right]_0^{1/2} + 2\int_0^{1/2} \frac{x^2}{1-x^2}\,dx = \left[x\ln(4-4x^2)\right]_0^{1/2} + 2\int_0^{1/2} \frac{(x^2-1+1)}{1-x^2}\,dx$, puis:

$C = \left[x\ln(4-4x^2)\right]_0^{1/2} + 2\int_0^{1/2} \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right) dx = \left[x\ln(4-4x^2)\right]_0^{1/2} + 2\left[-x\right]_0^{1/2} + 2\int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx.$

Alors, (déjà vu en exercices) on peut séparer la somme $\frac{1}{1-x^2}$ en deux termes: $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$,

d'où: $C = \left[x\ln(4-4x^2)\right]_0^{1/2} + 2\left[-x\right]_0^{1/2} + \left[-\ln(1-x) + \ln(1+x)\right]_0^{1/2}$. Finalement, on a:

$C = \frac{1}{2}\ln(3) - 1 + \left(\ln(2) + \ln(\frac{3}{2})\right) = \frac{3\ln(3)}{2} - 1$

<u>EXO 1</u>: Soit, pour tout $c \in \mathbb{R}$, F_c la fonction définie par: $F_c(x) = (3x+4)\,\mathrm{Ln}\,(3x+4) - cx$, pour $x \geq 0$.

1) Déterminer le réel c tel que F_c soit une primitive de f définie par: $f(x) = 3\,\mathrm{Ln}(3x+4)$, pour $x \geq 0$.

2) En déduire une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation: $g(x) = \mathrm{Ln}\,[(3x+4)^2]$

3) C= $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1}\,dx$ (Hint: set $U = \sqrt{e^x - 1}$)

4) D= $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}\,dx$