UNIVERSITE D'ORLEANS UNIVERSITÉ FRANÇOIS - RABELAIS TOURS	**DDF de MATHEMATIQUES** **ELEMENTS de CORRECTION du CT** **M2, Seconde session** **JUIN 2012**	iufm Centre Val de Loire

EXERCICE 1. Barème indicatif : un point par item = 7 points

1. Question vaste : il y en a beaucoup de « caractéristiques ». Ce corrigé en propose trois.

Caractéristique 1. Le système décimal est un système positionnel : il y a donc lieu de distinguer, en particulier, ***valeur*** et ***quantité***.

Caractéristique 2. Le changement de rang d'un chiffre correspond à un nouveau groupement et, en même temps, à un échange (*Exemple* : à proposer !).

Caractéristique 3. Du côté de l'ordre. Une procédure experte de comparaison de deux nombres écrits en chiffres peut s'énoncer ainsi :

- Si les deux nombres n'ont pas le même nombre de chiffres, celui qui en possède le plus est le plus grand.
- Si les deux nombres ont autant de chiffres, on compare les " *chiffres* " des deux nombres rang par rang à partir de la gauche, dès qu'ils diffèrent on peut conclure que celui qui a " *le plus grand chiffre* " est le plus grand des deux nombres.

Caractéristique 4. Toute autre bonne « caractéristique » est acceptée !

2. Classer. (= *« Mettre » ensemble ce qui se ressemble, ne pas confondre dans le langage scientifique avec ranger. Cf. ci-dessous*). C'est regrouper en classes (*ou faire des paquets de …*) tous les objets possédant une caractéristique commune parmi d'autres, par rapport à une relation donnée. *Exemple. A choisir parmi tous ceux déjà vus en TD.*

Trier. C'est choisir des objets selon une et une seule caractéristique ou propriété donnée, en écartant ceux qui ne possèdent pas cette propriété. On fait donc deux « paquets ».

Exemple. A choisir parmi tous ceux déjà vus en TD.

Ranger. *(= « Ordonner » les éléments d'une collection*). C'est disposer des objets selon leurs différences ordonnées précisées par une relation. *Exemple. A choisir parmi tous ceux déjà vus en TD.*

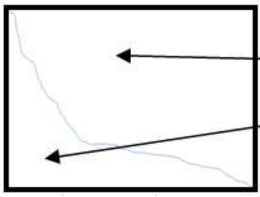
Compléments. Il est aussi important, à ce niveau, de s'interroger sur ce qu'est une **COLLECTION**, sur ce que veut dire **DESIGNER** un objet d'une collection et tout autre vocabulaire « environnant » ces trois verbes rencontrés par les élèves dès la Maternelle.

3. Quelques procédures de calcul de **W** = 53 – 27 : on est dans du *CALCUL REFLECHI* ou du *CALCUL RAISONNE*.

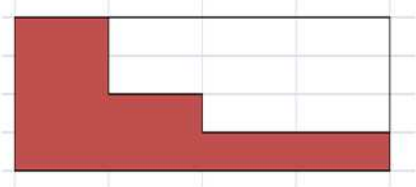
- **W** = 53 – 27 = 53 – 20 – 7 = 33 – 7 = 26. *Remarque* : 53 – 27 est aussi « difficile » à traiter que 33 – 7.
- **W** = 53 – 27 = 53 + 3 – 27 – 3 = 56 – 30 = 26 ; 53 – 27 = 53 – (30 – 3) = 53 - 30 + 3 = 23 + 3 = 26.
- **W** = 27 + … = 53 : « addition à trous ».
- Passage par les compléments à la dizaine, « *par au-dessus* » ou « *par en dessous* » :

W = 53 – 27 = 54 – 28 = 55 –29 = 56 – 20 = 26 ou bien **W** = 53 – 27 = 52 – 26 (*tiens, un double, au passage !*) = 51 – 25 = 50 – 24 = 26. (…)

4. Faux : « nécessité » de produire contre-exemple, condition suffisante. Cf. le TD consacré aux GRANDEURS. Périmètres et aires sont deux grandeurs indépendantes **:** leurs variations ne sont pas « associées ».



Les deux surfaces ci-contre ont le même périmètre car les côtés du rectangle sont égaux deux à deux et la ligne tracée est la même pour les deux figures.
L'aire de la surface $\boxed{S1}$ est plus petite que l'aire de la surface $\boxed{S2}$ (*comparaison perceptive, directe : procédure suffisante*).



Les deux surfaces ci-contre ont la même aire mais pas le même périmètre.
Ici, il y a apparition du NOMBRE : on compte les carreaux et les longueurs et largeurs de ces carreaux.

Note de PM et de PW. Les exemples vus dans les copies sont pour la plupart corrects et les calculs justes, mais ils sont trop génériques : les figures proposées sont des carrés ou des rectangles, rarement d'autres. Oui, mais ça marche, c'est ce qui compte !

5. Si $\boldsymbol{a}$ désigne un entier naturel quelconque et $\boldsymbol{b}$ un entier naturel non nul, la division euclidienne de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$ fait correspondre au couple ($\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$) l'unique couple d'entiers naturels ($\boldsymbol{q}$; $\boldsymbol{r}$) tel que : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$ avec $0 \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$. *Vocabulaire* : le nombre $\boldsymbol{a}$ s'appelle le dividende, $\boldsymbol{b}$ le diviseur, $\boldsymbol{q}$ le quotient et $\boldsymbol{r}$ le reste.

- La division peut intervenir dans des situations de *partage*, de *distribution*, … situations où on est amené à chercher « ***la valeur d'une part*** » : on parle de « *Division-Partition* ».

Exemple. Je distribue 32 cartes entre 5 joueurs. Combien de cartes aura chaque joueurs ?

- La division peut intervenir dans des situations de *regroupement*, …, situations où on est amené à chercher « ***le nombre de parts*** » : on parle de « *Division-Quotition* ».

Exemple. Des baguettes identiques mesurent 23cm chacune. La longueur totale des baguettes juxtaposées est 276cm. Combien y-a-t-il de baguettes ?

6. Avec les instruments, il y a deux méthodes ou techniques scolairement usuelles :

- Vérifier que le « l'écart » est constant (*on peut plutôt vérifier que les droites ne sont pas parallèles dès que l'écart n'est plus constant*) ;
- Utiliser, en acte, la « double perpendicularité ». *Rédiger le programme*.

Un élève de cycle III peut utiliser une équerre, un gabarit d'angle droit pour vérifier que deux droites sont « localement » parallèles. Il peut également utiliser le pliage. La propriété mise en œuvre dans ce cas est que si une droite est perpendiculaire à l'une des deux droites parallèles elle l'est également à l'autre. D'autres techniques sont à explorer, mais on doit retenir les plus « usuelles ». Le compas est l'autre instrument à investir, plus tard…

7. La règle non graduée.

Vérifier un ***alignement***, « réaliser » un alignement, tracer des droites, des segments de droite, des côtés de figures polygonales, …

Remarque. La règle n'est pas le seul instrument pour travailler le concept d'alignement ; on pourra aussi utiliser la corde ou le ficelle tendue, la visée, …

La règle graduée.

Cet instrument va être utilisé dans le cadre du mesurage de **longueurs**. La longueur est la première grandeur rencontrée à l'école et il ne faut pas confondre travail sur les longueurs et mesure de longueurs. Avant d'arriver à l'utilisation de la règle graduée, d'autres travaux sur les longueurs sont à envisager : Comparaison directe puis indirecte d'objets du point de vue de leur longueur, sans recours à la mesure, qui est un NOMBRE. La règle graduée va servir aussi pour effectuer des calculs, plus tard…

EXERCICE 2. Barème indicatif : 13 points

1. Les élèves rencontrent « une » technique opératoire de la multiplication et l'utilisent pour effectuer des multiplications d'un entier par un nombre à un chiffre en classe de CE1.

Exemple : pour la résolution d'un problème : Alex a 3 boîtes d'images contenant chacune 103 images. Combien a-t-il d'images au total ?

Cette technique évolue et s'amplifie lorsque le multiplicateur possède plus d'un chiffre, à partir du CE2.

2. Ce qui compte, c'est de repérer « l'essentiel » et de proposer des hypothèses mathématiquement cohérentes.

Opération **b** : erreur de « décalage » qui peut correspondre à l'existence d'un « 0 » implicite comme chiffre des unités. Les produits de 459 par 7 et de 459 par 3 sont effectués correctement (tables connues, retenues bien gérées). Mais l'élève n'a pas tenu compte du fait que le produit par 3 représente en réalité un produit par 30. Il a donc calculé le produit : 459 × (7 + 3) et non 459 × (7 + 30).

Opération **d** : mauvais « alignement » des nombres. Multiplication par 370 au lieu de multiplication par 37.

Opération **e** : multiplication de 6 par 4 et de 25 par 4 puis multiplication de 6 par 3 et de 25 par 3. Au lieu de multiplication de 6 par 4 et de 250 par 4, puis multiplication de 6 par 30 et de 250 par 30. « Mauvais » repérage de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture d'un nombre.

3. a)

37	459
~~18~~	~~918~~
9	1836
~~4~~	~~3672~~
~~2~~	~~7344~~
1	14688

37×459 =	**16983**

b) Propriétés mathématiques justifiant cette technique :

- Tout entier naturel est soit une puissance de 2, soit une somme de puissance de 2.
- Soit **P** = $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}$, alors **P** = $2\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m}/2$, indépendamment de la parité. (A détailler suivant la parité de $\boldsymbol{n}$ et celle de $\boldsymbol{m}$, un peu long à transcrire, mais ça « marche »).
- *Toute autre « bonne » propriété contextualisée à cette technique est acceptée. Idem pour les items suivants.*

c) « Kolossal » avantage : cette technique n'utilise que la « table de deux » (Connaitre la division (euclidienne) par 2, connaitre le double et la moitié d'un nombre entier (*pair pour la moitié*) et connaitre la technique opératoire de l'addition).

d) Un point-fort : cette technique ne fait intervenir que les connaissances de la multiplication par 2, de la division par 2 et de l'addition. Un point-faible : trop de calculs intermédiaires.

4. a)

$$\begin{array}{rr} & 459 \\ \times & 37 \\ \hline & 63 \\ & 350 \\ & 2800 \\ & 270 \\ & 1500 \\ & 12000 \\ \hline & 16983 \end{array}$$

b) Cette technique utilise :

- la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
- la décomposition canonique d'un nombre entier : tout nombre entier admet une et une seule décomposition dans la base dix du système de numération.

c) Pré requis ou plutôt connaissances pour cette mobiliser cette technique :

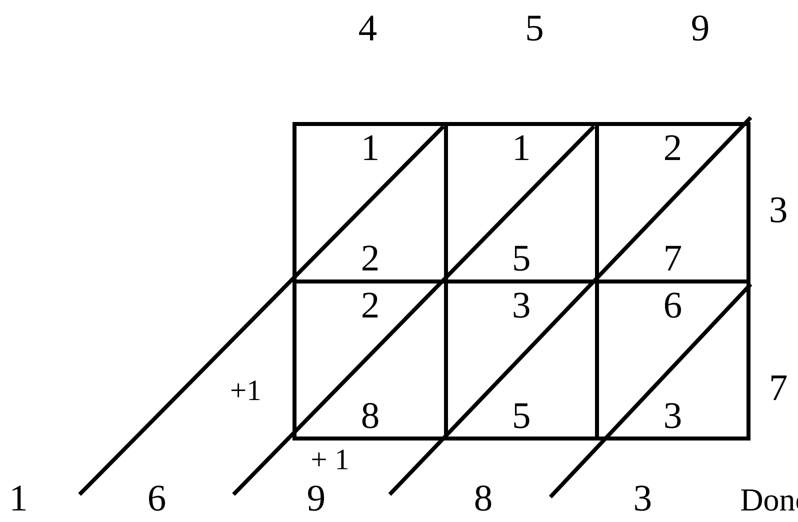
- connaître les tables de multiplication
- connaitre une technique opératoire de l'addition.

d) Un point-fort : on n'utilise pas de retenue pour la multiplication, autre point –fort : plus besoin de faire un décalage pour tenir compte du zéro.

Un point-faible : le nombre de termes à additionner peut être important. Un autre point-faible : l'addition se fait « en diagonale », ce qui peut être « perturbant » pour les élèves.

e) Le passage à la technique usuelle à partir de la technique de Leïla permet de comprendre le « principe » de la retenue. Une fois la technique de Leïla bien comprise, cette dernière permet de mieux comprendre la « gestion » des retenues de la technique usuelle qui est plus rapide.

5. a) Cette technique ne vise pas à remplacer la technique usuelle mais vient plutôt en complément. Elle constitue une autre approche de la multiplication, qui permet ainsi d'éclairer la technique usuelle.



Donc 459 × 37 = 16983

b) Cette technique utilise les propriétés mathématiques suivantes :

- la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
- tout nombre entier peut être décomposé dans la base décimale.
- Il ne suffit que de connaître les tables de multiplication « simples ». *Cf. ci-dessous*.

c) Pré requis ou plutôt connaissances pour cette technique :

- connaître les tables de multiplication
- connaitre une technique opératoire de l'addition.

d) Cette technique présente les avantages suivants :

- elle est plus « simple » que la méthode usuelle moderne ;
- les erreurs sont faciles à détecter : chaque cellule ne contient qu'un nombre-produit ou nombre-résultat d'une table de multiplication (*Cf. question suivante*) ;
- pas de gestion des retenues de multiplication, les seules retenues proviennent d'une addition ;
- on peut s'arrêter et reprendre le calcul quand on veut ;
- pas de décalage de ligne à « gérer » ; pas de difficulté pour les zéros intercalés comme dans 205.

Son seul inconvénient est une certaine lourdeur de mise en œuvre car il faut dessiner un tableau, avec la trace d'une diagonale (*Ce qui peut constituer aussi, un bon exercice !*). Autre point-faible : calculer « en diagonale » des sommes partielles de nombre à un chiffre et reporter la retenue éventuelle dans la « diagonale » au dessus.

6. **a)** On ne peut pas avoir 57 car 57 n'est pas un nombre-produit ou un nombre-résultat d'une table de multiplication. 57 n'est pas le produit de deux nombres à un chiffre.

b) On peut avoir dans la demi-case du bas un « 1 » avec un « 8 » dans la demi-case du haut car : $9 \times 9 = 81$. Par contre, on ne peut pas avoir de chiffre dans la demi-case du bas avec un « 9 » dans la demi-case du haut car le plus grand nombre qu'on peut avoir avec un produit de deux nombres à un chiffre est 81 (9×9).

c) _Une piste_ : proposer une solution qui « marche ». _Exemple_ : on peut avoir dans la demi-case du haut un « 2 » sachant que dans la demi-case du bas on a un « 4 », car on peut avoir $24 = 4 \times 6$.
Maintenant, on généralise. On peut passer en revue tous les nombres à deux chiffres se terminant par « 4 » et regarder parmi ceux-ci ceux qui sont des nombres-produits ou des nombres-résultats, au sens défini à la question précédente.
Autres bonnes solutions : 14 (2×7), 54 (9×6) , 64 (8×8), sont possibles.
Les nombres 34, 44, 74, 84 et 94 ne conviennent pas.

BAREME

EXERCICE 1 : **sept** points = un point par question.

EXERCICE 2 : **treize** points, dont **un** point pour la présentation, une orthographe correcte et une certaine qualité dans les diverses rédactions et mises en forme des raisonnements.

1 : sur 1 point	**2** : sur 1,5 point	**3** : sur 2 points	**4** : sur 2,5 points	**5** : sur 2 points	**6** : sur 3 points
1 pt	$3 \times 0{,}5$ pt	$4 \times 0{,}5$ pt	$5 \times 0{,}5$ pt	$4 \times 0{,}5$ pt	3×1 pt