Document d’accompagnement du sujet 1

En plus des éléments de correction, ce document permet de synthétiser les notions abordées et les connaissances évaluées chez le candidat.

Le sujet présenté est à spectre large. Il couvre les quatre grands axes d’une formation mathématique ambitieuse mais minimale pour les futurs Professeurs des Ecoles.

I- Les savoirs mathématiques pour dominer les notions présentes implicitement et explicitement dans les situations d’enseignement.

Le futur professeur d’école doit maîtriser un bagage mathématique suffisant (par rapport aux exigences de l’école primaire). Le sujet aborde en profondeur les notions de raisonnement, de mise en équation, de probabilités, de numération, la géométrie plane et dans l’espace, les décimaux et la proportionnalité.

II- Les savoirs mathématiques pour comprendre et s’approprier les programmes.

Le futur professeur d’école doit pouvoir interpréter les programmes en termes de continuité (transpositions du savoir savant au savoir enseigné). Le sujet repère si le candidat est capable de reconnaître la genèse, l’évolution et la construction progressive d’une notion mathématique (les décimaux et la proportionnalité).

III- Les savoirs mathématiques pour s’approprier des documents pédagogiques et concevoir un enseignement

Le futur professeur d’école doit pouvoir s’approprier des scénarii de classes et anticiper leur mise en œuvre (savoir faire des choix, savoir tirer parti des expériences…). Le sujet repère, dans le cadre de l’apprentissage des décimaux et de la proportionnalité, si le candidat est capable de :

- comprendre et critiquer une progression ;
- étudier le statut et la place des différents types d’activités que l’on peut proposer en mathématiques (résolution de problème, apprentissage de techniques, développement d’automatismes, mémorisation, …) ;
- analyser une proposition de manuel scolaire (être autonome et critique par rapport à un manuel) ;
- adapter et faire évoluer une situation (par exemple en jouant sur les variables didactiques) ;
- construire une trace écrite conforme aux mathématiques visées et au niveau d’apprentissage.

IV- Les savoirs mathématiques pour analyser les procédures des élèves

Le futur professeur d’école doit dominer l’activité mathématique des élèves. Le sujet propose de repérer, dans le cadre de l’apprentissage des décimaux et de la proportionnalité, si le candidat est capable de :

- prendre en compte les étapes dans la conceptualisation d’une notion ;
- interpréter les procédures effectives des élèves ;
- interpréter des erreurs en termes de connaissances.

Première partie *(13 points)*

Cette première partie aborde les notions suivantes :
- différents types de raisonnement
- équation du premier degré : mise en équation et résolution
- PGCD
- identités remarquables
- probabilités élémentaires
- résolution de systèmes de deux équations à deux inconnues
- interprétation d'une représentation graphique de fonction

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :
- Interpréter des données, être capable de « traduire » un énoncé
- s'adapter aux contraintes d'un énoncé pour envisager des procédures adaptées, changer de point de vue
- mobiliser des connaissances mathématiques dans des contextes variés, voire non usuels (pour dire que les connaissances ne sont pas toujours « appelées » de manière un peu conventionnelle mais que l'on demande une certaine prise d'initiative
- Mobiliser à bon escient une procédure experte : identification des données, choix des inconnues
- Envisager d'autres procédures : prendre conscience que ne pas disposer de la procédure experte n'interdit pas de résoudre un problème

Commentaires sur les questions et Éléments de correction

Partie A : Disposer des jetons

Question 1 :

Interpréter des données (cadre géométrique et numérique), être capable de « traduire » un énoncé et de choisir une inconnue différente de la donnée sur laquelle porte la question (car si on commence par appeler N le nombre de jetons, il faudra ensuite introduire une autre inconnue…) puis de résoudre et d'en déduire la réponse au problème posé

Si on appelle A le nombre de jetons constituant une ligne du premier carré, on peut écrire le nombre N sous la forme $A^2 + 52$ et en tenant compte de la deuxième tentative, on peut aussi écrire N sous la forme $(A + 4)^2 - 60$

Et ensuite résoudre $A^2 + 52 = (A + 4)^2 - 60$

$(A + 4)^2 - A^2 = 112$

$4(2A + 4) = 112$

$A + 2 = 14$

$A = 12$

Donc $N = 12^2 + 52 = 196$

Question 2 :

Reconnaître le carré d'un nombre connu, utiliser à bon escient une fonction de la calculatrice, trouver en testant différents entiers celui dont le carré est 196

Maxime peut placer ses jetons en carré avec 14 jetons sur chaque côté, car $196 = 14^2$.

Question 3 :

Adapter une procédure en tenant compte des contraintes de la question (ici pas de calculatrice) et ainsi montrer sa capacité à envisager d'autres procédures que la procédure experte dans un cas particulier : reconnaître si un entier est un carré. Construire un raisonnement.

$2700 = 3 \times 900 = 3 \times 30^2$ donc ce n'est pas un carré

Ou encadrement entre deux carrés « consécutifs »

$2500 = 50^2$

$51^2 = 2601$ avec par exemple utilisation de $(50 + 1)^2$

$52^2 = 2704$

$51^2 < 2700 < 52^2$ donc 2700 n'est pas le carré d'un nombre entier

Partie B : Organiser des jetons

Question 1 :

Interpréter mathématiquement la question, ici percevoir que le nombre de boîtes doit être un diviseur commun à chacun des nombres donnés et ensuite déterminer ces diviseurs

Pour répartir les jetons pour que chaque boîte contienne la même quantité de jetons de chaque couleur, il faut trouver un diviseur commun à 84, 60, et 48.

Solution experte, déterminer le PGCD et les diviseurs du PGCD

84 = 7 x 12

60 = 5 x 12

48 = 4 x 12

Le PGCD de 84,60 et 48 est 12

Revenir au contexte du problème pour « lire les réponses » dans ces décompositions :

Voir que 12 est le nombre maximum de boîtes et donner du sens aux nombres 7, 5 et 4

Si 12 boîtes, il y aura : 7 jetons bleus, 5 jetons rouges, 4 jetons bleus

Si 6 boîtes (rassembler le contenu de deux des boîtes précédentes !) il y aura : 14 jetons bleus, 10 jetons rouges, 8 jetons bleus …

On peut donc aussi répartir dans moins de boîtes dont le nombre est un diviseur de 12 donc soit 6, 4, 3, 2, et 1. Le cas d'une boîte n'amène pas à envisager de répartition, donc on ne le prendra pas comme solution.

Les répartitions peuvent se faire suivant le tableau suivant :

	Jetons bleus	Jetons rouges	Jetons jaunes
12 boîtes	7	5	4
6 boîtes	14	10	8
4 boîtes	21	15	12
3 boîtes	28	20	16
2 boîtes	42	30	24

Question 2 :

Mettre en œuvre un raisonnement dans le domaine des probabilités (événement certain)

a) Pour être sûr de piocher un jeton jaune, il faut piocher 145 jetons. Si on tire d'abord tous les rouges, puis tous les bleus, le jeton suivant sera jaune.

Mettre en œuvre un raisonnement dans le domaine des probabilités

b) La probabilité de piocher un jeton jaune en premier est 48 / (84 + 60 + 48) = 0,25 soit une chance sur quatre.

Partie C : Jouer avec les jetons

Question 1 :

S'assurer de la bonne compréhension de l'énoncé, en particulier de la reconnaissance du statut des différentes données

Soit b le nombre de jetons bleus et r le nombre de jetons rouges. On doit résoudre 3b + 7r = 70 avec b = r. On a 10b = 70 donc b = r = 7.

Question 2 :

Mobiliser à bon escient une procédure experte : identification des données, choix des inconnues et « traduction » puis résolution du système obtenu

a) Système de deux équations à deux inconnues b + r = 29 et 3b + 7r = 159. On trouve b = 11 et r = 18.

Envisager d'autres procédures : prendre conscience que ne pas disposer de la procédure experte n'interdit pas de résoudre un problème. Derrière l'idée : transposition sur les attentes vis-à-vis des élèves : par exemple on peut proposer un problème qui relève de la division avant que les élèves aient « appris » LA division

b) Si 29 jetons bleus, 29 x 3 = 87 points
Si 28 B et 1R, 91 points

Si 27 B et 2R, 95 points…
…jusqu'à trouver 11 bleus et 18 rouges
Si 11B et 18 R…159 points
Si 29 jetons rouges….
159 points pour 53 jetons bleus…
159 points pour 46 B et 3R…

On peut aussi tester d'abord 15 jetons et 14 jetons rouges et ensuite adapter.
Un raisonnement purement arithmétique (« fausse position ») permet aussi de résoudre le problème : on suppose que tous les jetons sont bleus pour une valeur de 3×29=87 points ce qui est insuffisant, si on échange un jeton bleu contre un rouge on augmente le total de points de 4 points (7-3). 159-87=72, il faut donc échanger (72 :4) jetons bleus, on trouve donc 18 jetons rouges et (29-18)=11 jetons bleus.

Question 3 :

Envisager ici encore d'autres procédures de résolution, incluant un changement de cadre.

a) On cherche les solutions de l'équation $3b + 7r = 34$. Si $r = 0$ pas de solution. Si $r = 1$ alors $b = 9$. Si $r = 2$ pas de solution. Si $r = 3$ pas de solution. Si $r = 4$ alors $b = 2$. Enfin r ne peut être supérieur ou égal à 5.
b) On cherche les points de coordonnées entières sur la représentation graphique de la fonction.

Question 4 :

Ici encore s'adapter et explorer des pistes de manière plus ou moins empirique selon le niveau où on se place…

Pierre donne 16 jetons bleus à Jean (soit 48 points) et Jean lui rend 2 jetons rouges (14 points). Ainsi Pierre aura donné 34 points à Jean. Il y a d'autres solutions possibles.

Deuxième partie (13 points)

Partie A : QCM

Cette partie aborde les notions suivantes :
- quadrilatères
- triangles
- théorème de Pythagore, Théorème de Thalès
- aire et périmètre
- volume
- angles
- représentation spatiale

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :
- capacité à mobiliser un raisonnement rapide en s'affranchissant d'une rigueur relative
- mobiliser des images mentales géométriques

Commentaires sur les questions et Éléments de correction

Question 1

Connaissances de certaines propriétés du carré et du rectangle (angles et axes de symétrie)
Interpréter l'expression « tout … est … ».

A	B	C	D
V	F	F	F

Question 2

Analyser une figure, repérer les angles de même mesure. Déduire.

A	B	C	D
F	V	F	F

Question 3

Identifier les faces d'un cube, représenté en perspective, sur un patron. Procéder éventuellement par élimination (un seul patron) en repérant les points communs et les différences entre les quatre patrons proposés.

A	B	C	D
F	F	V	F

Question 4

Longueur de la diagonale d'un carré en fonction de la longueur du côté, longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur du côté. Aire d'un triangle.

A	B	C	D
F	V	F	V

Question 5

Proportionnalité, Thalès, Aire d'un quadrilatère, Volume d'une pyramide.

A	B	C	D
V	F	V	F

Question 6

Propriétés du parallélogramme et du losange, en particulier concernant les diagonales.

A	B	C	D
F	V	V	F

Partie B : analyse des productions d'élèves

Cette partie aborde les notions suivantes :
- apprentissage des nombres décimaux à l'école élémentaire
- lien entre écriture fractionnaire et écriture décimale
- interprétation des programmes

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :
- Percevoir la manière dont le programme peut se décliner en tâche à proposer aux élèves dans le cadre d'une évaluation visant à vérifier l'état des connaissances des élèves
- Interpréter des résultats d'un nombre limité d'élèves en se référant à des connaissances plus générales sur l'apprentissage d'une notion, les obstacles…
- Savoir qu'il est difficile d'interpréter, d'inférer les connaissances (ou les non connaissances) d'un élève à partir d'une réponse isolée et qu'il est nécessaire de faire des liens entre plusieurs réponses de cet élève**.**

Commentaires sur les questions et Éléments de correction

Question 1 :

Identifier les liens entre une tâche présentée dans une évaluation et les points du programme

a) Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement dans le cas d'une fraction décimale pour A et B et dans le cas d'une « fraction simple » pour C

Interpréter des résultats d'un nombre limité d'élèves en se référant à des connaissances plus générales sur l'apprentissage d'une notion, les obstacles…

b) La barre de fraction est transformée en virgule ou vice versa (moyennant un décalage dans la réponse A)

Mettre en relation les réponses à différents items proposées par un même élève pour identifier ce qu'il a n'a pas compris ou son interprétation de la notion.

c) Ce n'est plus une fraction décimale (dénominateur différent de 10) ce qui semble déconcerter Tiago.

Envisager de pistes « d'intervention » adaptées aux difficultés spécifiques repérées chez un élève

d) Le sens des fractions simples (quart, demi…) et la numération décimale (dixième, centième…), voire reconnaître les multiples des nombres d'usage courant

Question 2 :

Capacité à inférer à partir des erreurs d'élèves des « malentendus » qui peuvent s'instaurer au cours de la scolarité, ici domaine de validité d'une certaine règle concernant la multiplication d'un entier par une puissance de 10

a) Samia « écrit un zéro à la droite du nombre » quand elle multiplie par 10 et Julien « écrit un zéro à la droite de chaque partie du nombre, située de chaque côté de la virgule ».

Prendre du recul en identifiant ce que cela révèle sur les conceptions des élèves relatives à ces nouvelles écritures qui désignent de nouveaux nombres

b) Ces deux élèves ne conçoivent pas un décimal comme un « nouveau nombre ». L'erreur commise est une généralisation abusive aux décimaux d'une procédure correcte dans l'ensemble des nombres entiers. Pour Samia, un nombre décimal semble considéré comme un entier. La virgule est ignorée. Pour Julien, un nombre décimal semble considéré comme étant constitué de deux entiers accolés. La virgule sert à les séparer.

Troisième partie

Cette troisième partie aborde les notions suivantes :
- la proportionnalité d'un point de vue théorique
- la linéarité, les fonctions linéaires
- la proportionnalité d'un point de vue enseignement en primaire

Cette partie évalue chez le candidat les compétences suivantes :
- capacité à prendre du recul face à une notion mathématique enseignée à l'école
- capacité à modéliser
- capacité à adapter un modèle mathématique
- capacité à développer un regard critique
- capacité à repérer les implicites
- capacité à interpréter de procédures

Commentaires sur la question et Éléments de correction

Partie A : Analyse d'un premier énoncé de problème et de productions d'élèves

Question 1 :

S'interroger entre un énoncé issu de la réalité et le traitement mathématique de la situation : les mathématiques comme production de modèles pour la situation « réelle ».

Développer un regard critique de travaux présentés par des manuels et en particulier apprendre à repérer les implicites.

Il suffit de dire que tous les livres sont les mêmes et que le libraire les emballe un par un avec la même longueur de papier pour chaque livre.

Pour traiter cette question il faut identifier « l'invariant » qui caractérise la proportionnalité :

c'est-à-dire :

« tous les livres sont les mêmes » définit l'unité ;

« Un par un avec la même longueur de papier » : élément invariant qui détermine le coefficient.

Question 2 :

La proportionnalité, modèle de résolution de la situation, repose sur la fonction linéaire. Pour répondre aux questions, l'étudiant doit repérer et utiliser deux fonctions linéaires (réciproques l'une de l'autre) en mettant en œuvre soit le coefficient de linéarité, soit l'une des deux propriétés de linéarité.

a) La fonction qui au nombre de livres donne le métrage de papier est $f(x) = 0{,}4 \times x$. La fonction, qui au nombre de mètres de papier donne le nombre de livres maximum que l'on peut emballer est $g(y) = 2{,}5\times y$

Ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre.

Utiliser un modèle mathématique. Modéliser.

b) Question a) $g(14) = 2,5 \times 14 = 35$ ou alors $g(14) = g(10) + g(4) = 25 + 10 = 35$. Donc 35 livres emballés avec 14 mètres de papier.

Question b) $f(50) = 0,4 \times 50 = 20$ ou alors $f(50) = 5 \times f(10) = 5 \times 4 = 20$. Il faut 20 mètres de papier pour emballer 50 livres

Question c) $g(6) = 2,5 \times 6 = 15$ ou alors $g(6) = g(2) + g(4) = g(4) / 2 + g(4) = 5 + 10 = 15$

Donc 15 livres emballés avec 6 mètres de papier.

Question 3 :

La question 2) a posé la question de la connaissance mathématique. La procédure de l'élève est identifiée du point de vue mathématique et elle peut alors être rattachée à un type de raisonnement.

Elle permet aussi de repérer les connaissances et les procédures différentes des élèves.

a) Pour la question a) : Laurène utilise en acte la propriété additive de linéarité

$g(14) = g(10 + 4) = g(10) + g(4) = 25 + 10 = 35$

Pour la question b) : $f(50) = f(10 + 10 + 10 + 10 + 10) = f(10) + .. + f(10) = 4 + .. + 4 = 20$.

Pour la question c) : Elle décompose 6 en 4 + 2. Elle ne détaille pas sa manière de dire qu'avec 2 m de papier on emballe 5 livres. On peut cependant supposer qu'intuitivement elle divise 10 par 2.

(Ce qui revient au même de dire, « avec la moitié de 4 m j'emballe la moitié de 10 livres »).

Pour résumer ses opérations :

$g(6) = g(2) + g(4) = g(4)/2 + g(4) = 5 +10 = 15$.

b) Il semble que Farida n'a pas reconnu une situation de proportionnalité. Pour la question a) Farida traduit la phrase « avec 4 mètres de plus j'emballe 4 livres de plus ». En acte, elle fait l'erreur suivante $g(14) = g(10 + 4) = g(10) + 4 = 25 + 4 = 29$. (Persistance du modèle additif).

Pour la question c) : Même style d'erreur $g(6) = g(10 - 4) = g(10) - 4 = 25 - 4 = 21$ (« avec 4 mètres de moins j'emballe 4 livres de moins »).

c) Yann utilise la même procédure que Laurène en a) et c) (en moins explicite). En revanche, pour le b) il a tenté d'utiliser la propriété d'additivité de la proportionnalité mais mélange le nombre de livres et le nombre de mètres de papier. (Il répond à la question, combien de livres peut-on emballer avec 50 mètres de papier). Ainsi il décompose 50 en additions de 4 et à chaque 4 fait correspondre 10 (il fait correspondre 5 au 2). Il répond avec les bonnes unités.

Partie B : Analyse d'une séquence d'enseignement se référant à deux énoncés de problèmes

L'analyse des connaissances préalables développe une connaissance essentielle qui contribue d'une part à étudier les apprentissages en lien avec les programmes et à analyser les propositions trouvées dans les manuels ou autres ressources.

Question 1 :

Analyser des conditions préalables suppose que l'on soit capable d'identifier savoir et savoir-faire nécessaires et d'analyser la tâche par rapport au travail dont elle relève (entreprendre et conduire une recherche,...) et par rapport à la continuité du curriculum.

On pourrait citer ici :

Connaître le sens des opérations multiplication et addition.

Connaître ½ ou 0,5 et savoir calculer avec ce nombre.

Savoir élaborer une démarche originale dans un problème pour lequel on ne dispose pas de solution déjà éprouvée.

Formuler et communiquer sa démarche.

Question 2 :

Analyse mathématique, didactique et pédagogique des différentes étapes (obstacles, aides,...).

Etape1 : Appropriation individuelle (lecture et recherche d'informations pertinentes). Les élèves se familiarisent avec l'énoncé.

Etape 2 : Recherche par groupe. Action. Formulation écrite. Les groupes travaillent ensemble, les élèves échangent pour construire une solution.

Etape 3 : Mise en commun. Formulation orale. Débat. Argumentation. Les élèves prennent conscience des autres procédures.
Etape 4 : Synthèse collective. Le maître met en évidence une procédure « expert » si possible en se basant sur les écrits des élèves.
Etape 5 : Approfondissement individuel. Les élèves ré-investissent ce qu'ils ont fait.
Etape 6 : Consolidation. Entraînement.
Etape 7 : Ré-investissement. Les élèves transposent ce qu'ils viennent d'apprendre dans un autre contexte.

Question 3 :

Capacité à analyser une situation donnée.
Identification des données essentielles.
Données : Recette. Nombre de verres (4), nombre de citrons (2), nombre d'oranges (2), nombre de verres à liqueur (1).
Question : Nombre de verres (6), nombre de citrons ? Nombre d'oranges ? Nombre de verres à liqueur ?
Idem pour 8, 10 et 20 verres.

Question 4 :

Transposer le savoir savant à niveau donné pour atteindre un objectif, en principe, explicite.
Prévoir une trace écrite adaptée au niveau de l'élève.
Le maître peut récapituler les données et les questions sous forme d'un tableau. Il peut également schématiser la méthode utilisée au moyen de flèches pour passer d'une colonne à l'autre...

Nb de verres	4	8	20	2	6	10
Nb de citrons	2					
Nb d'oranges	2					
Nb de verres à liqueur	1					

Question 5 :

Prise de recul de la compétence mathématique (démarche de recherche) et lien entre modèle et situation « réelle ».
Nécessité de connaître les programmes.
S'interroger sur la place et le rôle d'une proposition de travail dans un parcours d'apprentissage.
Identification des procédures possibles des élèves.
L'exercice proposé à l'étape 7 utilise la proportionnalité en tant qu'outil. Les élèves doivent trouver un raisonnement qui leur permet de comparer les deux recettes. On ne leur demande pas de calculer les quantités pour un certain nombre de personnes. Une procédure peut être la suivante :
calculer les quantités pour un même nombre de personnes pour les deux recettes, on choisira de calculer les quantités pour 2 personnes ou pour 12 personnes. Ensuite, on compare les quantités trouvées.