Document d'accompagnement du sujet 3

En plus des éléments de correction, ce document permet de synthétiser les notions abordées et les connaissances évaluées chez le candidat.

Le sujet présenté est à spectre large. Il couvre les quatre grands axes d'une formation mathématique ambitieuse mais minimale pour les futurs Professeurs des Écoles.

<u>I- Les savoirs mathématiques pour dominer les notions présentes implicitement et explicitement dans les situations d'enseignement.</u>

Le futur Professeur d'École doit maîtriser un bagage mathématique suffisant (par rapport aux exigences de l'école primaire). Le sujet aborde en profondeur les notions de raisonnement, de numération, de mise en équation, la géométrie plane, la division euclidienne.

<u>II- Les savoirs mathématiques pour comprendre et s'approprier les programmes.</u>

Le futur professeur d'école doit pouvoir interpréter les programmes en termes de continuité (transpositions du savoir savant au savoir enseigné). Le sujet repère si le candidat est capable de reconnaître la genèse, l'évolution et la construction progressive d'une notion mathématique (le nombre à l'école maternelle).

<u>III- Les savoirs mathématiques pour s'approprier des documents pédagogiques et concevoir un enseignement</u>

Le futur professeur d'école doit pouvoir s'approprier des scénarii de classes et anticiper leur mise en œuvre (savoir faire des choix, savoir tirer parti des expériences…). Le sujet repère, dans le cadre de l'apprentissage des décimaux et de la proportionnalité, si le candidat est capable de :

- comprendre et critiquer une progression ;
- étudier le statut et la place des différents types d'activités que l'on peut proposer en mathématiques (résolution de problème, apprentissage de techniques, développement d'automatismes, mémorisation, …) ;
- adapter et faire évoluer une situation (par exemple en jouant sur les variables didactiques) ;

<u>IV- Les savoirs mathématiques pour analyser les procédures des élèves</u>

Le futur professeur d'école doit dominer l'activité mathématique des élèves. Le sujet propose de repérer, dans le cadre des grandeurs et des mesures (aire et périmètre), si le candidat est capable :

- d'interpréter les procédures effectives des élèves ;
- d'interpréter des erreurs en termes de connaissances.

Première partie : numération et opérations *(13 points)*

Cette première partie aborde les notions suivantes :

- Analyse d'un système de numération : symboles utilisés, signification de ces symboles, règles d'écriture
- Analyse d'algorithmes liés aux opérations dans l'ensemble des entiers naturels
-

et évalue chez le candidat les compétences suivantes :

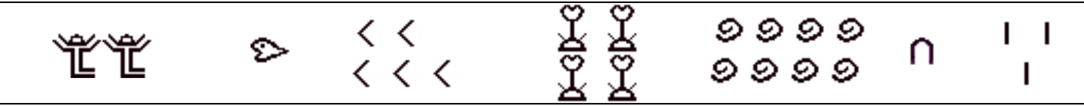
Il s'agit d'évaluer des connaissances disciplinaires relatives au domaine des systèmes de numération et à celui des techniques opératoires dans l'ensemble des entiers naturels à travers l'analyse d'un système « étranger » au candidat.

Des questions d'ordre épistémologique visent à apprécier la capacité à repérer des indicateurs permettant de décrire l'évolution des systèmes de numération à travers les âges.

Ces différentes questions permettent de revenir sur les choix qui fondent notre système de numération écrite avec des chiffres et l'influence de ces choix sur les règles liées aux comparaisons de nombres et au calcul sur ces nombres.

Elles peuvent susciter un questionnement sur l'apprentissage et l'enseignement de ces notions.

1)

	4 258
	2 154 813

Connaissance disciplinaire : domaine des systèmes de numération

2)

a. L'ordre des unités numérales est : trait, anse, spirale, fleur, doigt, têtard, dieu. Dans chaque nombre, on repère l'unité numérale d'ordre supérieur. Si elles sont différentes, le nombre le plus grand est celui qui a utilisé l'unité de plus grande valeur. Si elles sont identiques, on dénombre leurs occurrences : le nombre le plus grand est celui où elle apparaît le plus. En cas d'égalité, on reprend la comparaison avec les unités d'ordre inférieur.

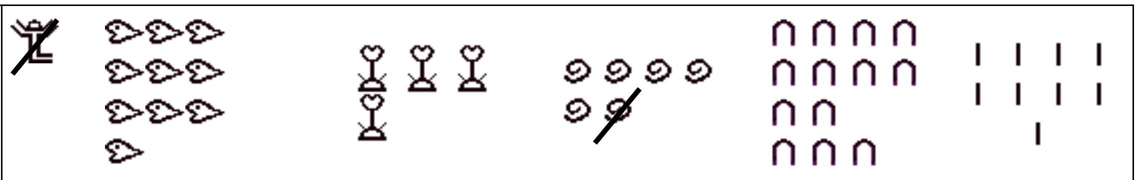
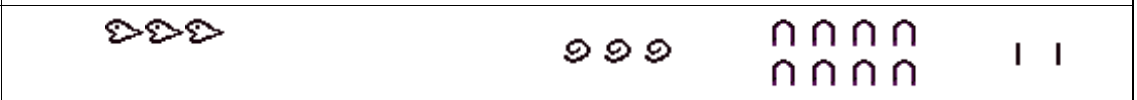
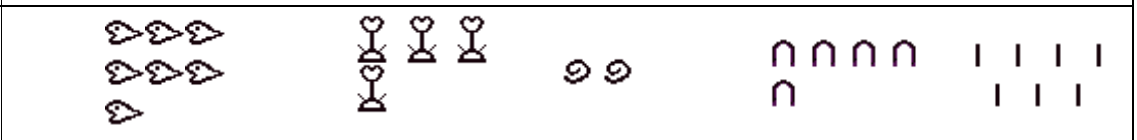
Connaissance disciplinaire : domaine des systèmes de numération

b. dans notre système de numération, la longueur de l'écriture du nombre est suffisante pour comparer différents nombres (s'ils sont de longueurs différentes). On n'a pas besoin de dénombrer les symboles de même espèce, tout se fait sur les écritures.

c. Le « 0 » par exemple. Ou alors tout nombre supérieur à dix millions.

Question d'ordre épistémologique (évolution des systèmes de numération à travers les âges)

3) Pour pouvoir calculer la différence entre ces deux nombres, on va réorganiser A pour avoir plus de symboles de chaque sorte que dans B. Chaque symbole d'un certain ordre vaut dix symboles de l'ordre immédiatement inférieur.

A	
B	
A-B	

Connaissance disciplinaire : domaine des techniques opératoires. Mobiliser une technique de soustraction (par exemple celle par emprunt) sur un support autre que chiffré

4)

a.

1	~~34~~
2	~~68~~
4	136
8	272
16	544
28	952

donc $28\times34=952$

Identifier un algorithme d'une technique opératoire et le reproduire sur un exemple

b.

$$\begin{aligned} 35 \times 47 &= (32 + 2 + 1) \times 47 \\ &= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 2 + 1) \times 47 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 47 + 2 \times 47 + 1 \times 47 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 94 + 94 + 47 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 188 + 94 + 47 \\ &= 2 \times 2 \times 376 + 94 + 47 \\ &= 2 \times 752 + 94 + 47 \\ &= 1504 + 94 + 47 \end{aligned}$$

Connaissance disciplinaire : propriétés mathématiques sur les nombres et les opérations

c.

Soit à calculer le produit $N \times P$, avec $P > N$.
Dans un tableau à deux colonnes, on place sur la première ligne 1 à gauche et P à droite. Pour chaque nouvelle ligne, on double chaque nombre placé au-dessus. Le processus se poursuit tant que le nombre à écrire à gauche est plus petit que N.
Dans la colonne de gauche, on trouve dans l'ordre toutes les puissances de 2 inférieures à N. On entoure celles qui sont présentes dans la décomposition additive de N suivant les puissances de 2 et on barre les nombres de la colonne de droite qui ne sont pas en regard de nombres entourés.
On fait alors la somme de tous les nombres non barrés de la colonne de droite, c'est le produit cherché.
Tout nombre entier est décomposable en somme de puissances de 2, cet algorithme est utilisable pour calculer le produit de deux entiers, quels qu'ils soient.

Connaissance disciplinaire (nombres entiers) en citant les propriétés et en explicitant clairement (utilisation d'un vocabulaire précis).

5) La décomposition additive d'un nombre à trois chiffres avec des puissances de 2 nécessite d'utiliser au minimum 64 = 26, il faudra donc écrire au minimum 7 lignes.

Connaissance disciplinaire, nombres entiers.

6) Comme dans la méthode dite « par duplications successives », ce calcul revient à effectuer des produits de 34 par des puissances de 2 puis à les ajouter. Dans la méthode dite « par duplications successives », la décomposition additive d'un nombre en puissances de 2 doit être une capacité supplémentaire.

Capacité à analyser des procédures produites.

Deuxième partie *(13 points)*

Partie A- résolution d'exercices

Cette partie aborde les notions suivantes :
- Résolution algébrique et graphique d'un problème issu de la géométrie plane
- Résolution d'équation du premier degré
- PGCD
- Théorème de Thalès
- Construction de figure géométrique
- Division euclidienne

et évalue chez le candidat les compétences suivantes :

- Mettre en équation un problème
- Résoudre algébriquement et graphiquement une équation du premier degré
- Savoir utiliser le PGCD en résolution de problème, savoir calculer un PGCD.
- Connaître les propriétés des quadrilatères particuliers (le trapèze)
- Reconnaître une configuration du théorème de Thalès pour calculer une longueur.
- Élaborer et suivre un programme de construction
- Utiliser les instruments de géométrie pour construire une figure
- Connaître les relations dividende, diviseur, quotient, reste dans une division euclidienne
- Mobiliser des connaissances disciplinaires alors que celles-ci ne sont pas toujours explicitement évoquées
- Conduire un raisonnement et l'expliciter
- Envisager différents modes de résolution

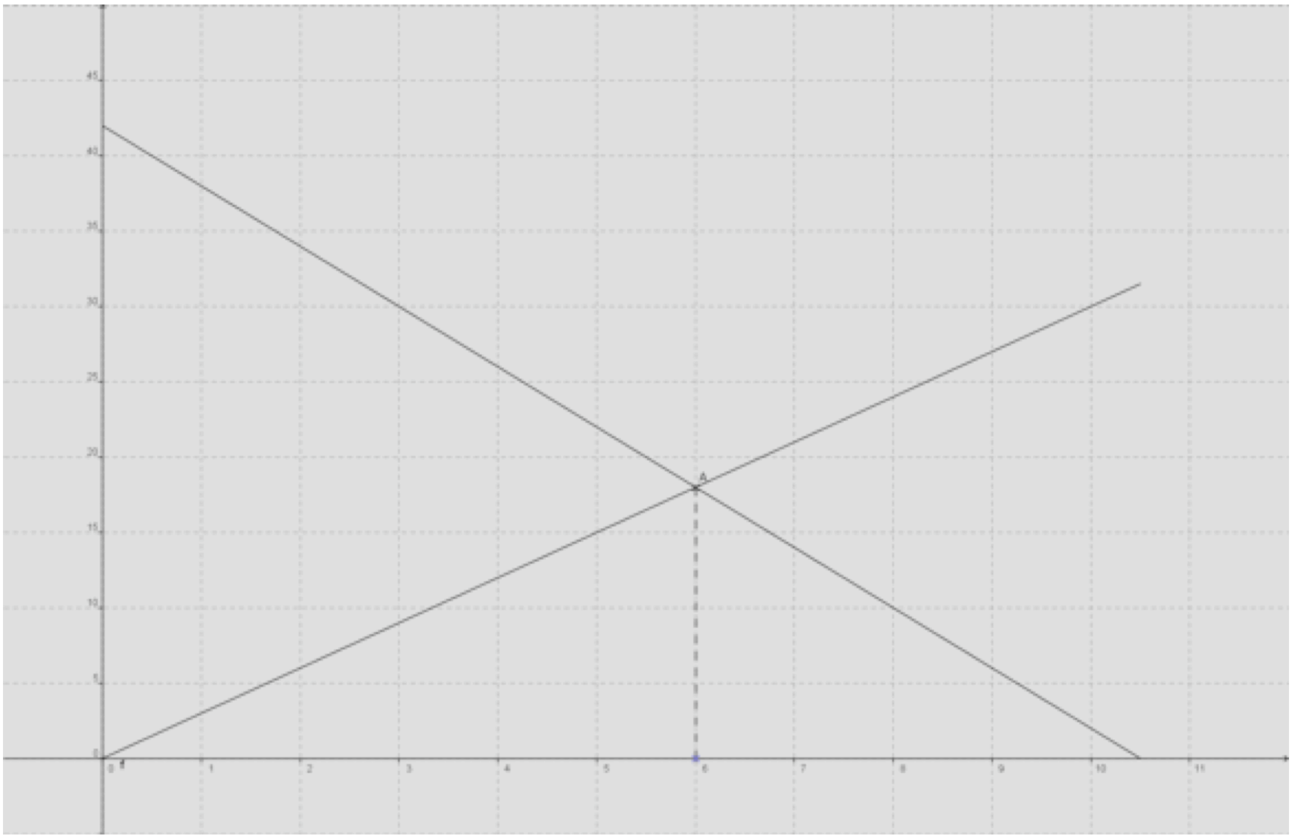
Exercice 1

Traduire algébriquement un problème,

Résoudre algébriquement et graphiquement une équation du premier degré

1) AIM équilatéral donc p(AIM) = 3x
M∈[AB] donc MB = 10,5 – x d'où p(MJKB) = 4 × (10,5 – x)
p(AIM) = p(MJKB) donc 3x = 42 – 4x d'où 7x = 42 ainsi x = 6 (en cm)

2) Tracé de droites dans un repère ; Résolution graphique d'une équation en traçant deux droites.



On trace les deux droites d'équations $y = 3x$ et $y = 42 - 4x$ dans un repère et on lit l'abscisse du point d'intersection des deux droites : 6.

Exercice 2

Interpréter mathématiquement la question, ici percevoir que le nombre de lots doit être un diviseur commun à chacun des nombres donnés et donc que le nombre maximum de lots est le PGCD de ces nombres. Déterminer le PGCD de trois nombres.

a) Soit n un nombre de lots, n est un diviseur commun de 60, 48 et 36. Comme on cherche le nombre maximum de lots, on recherche donc le PGCD de 60, 48 et 36.

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 12 \times 5$

$48 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 12 \times 4$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 12 \times 3$

3, 4 et 5 sont premiers entre eux donc le PGCD de 60, 48 et 36 est 12.

Il pourra constituer 12 lots identiques au maximum.

b) Chaque lot sera constitué de 5 salades, 4 oignons et 3 bottes de radis.

Exercice 3

Connaître les propriétés des quadrilatères particuliers (le trapèze).

Reconnaître une configuration du théorème de Thalès pour calculer une longueur.

1) Dans le trapèze ABCD, on a :
   - (AB)//(CD)
   - (BD) et (AC) sont sécantes en O

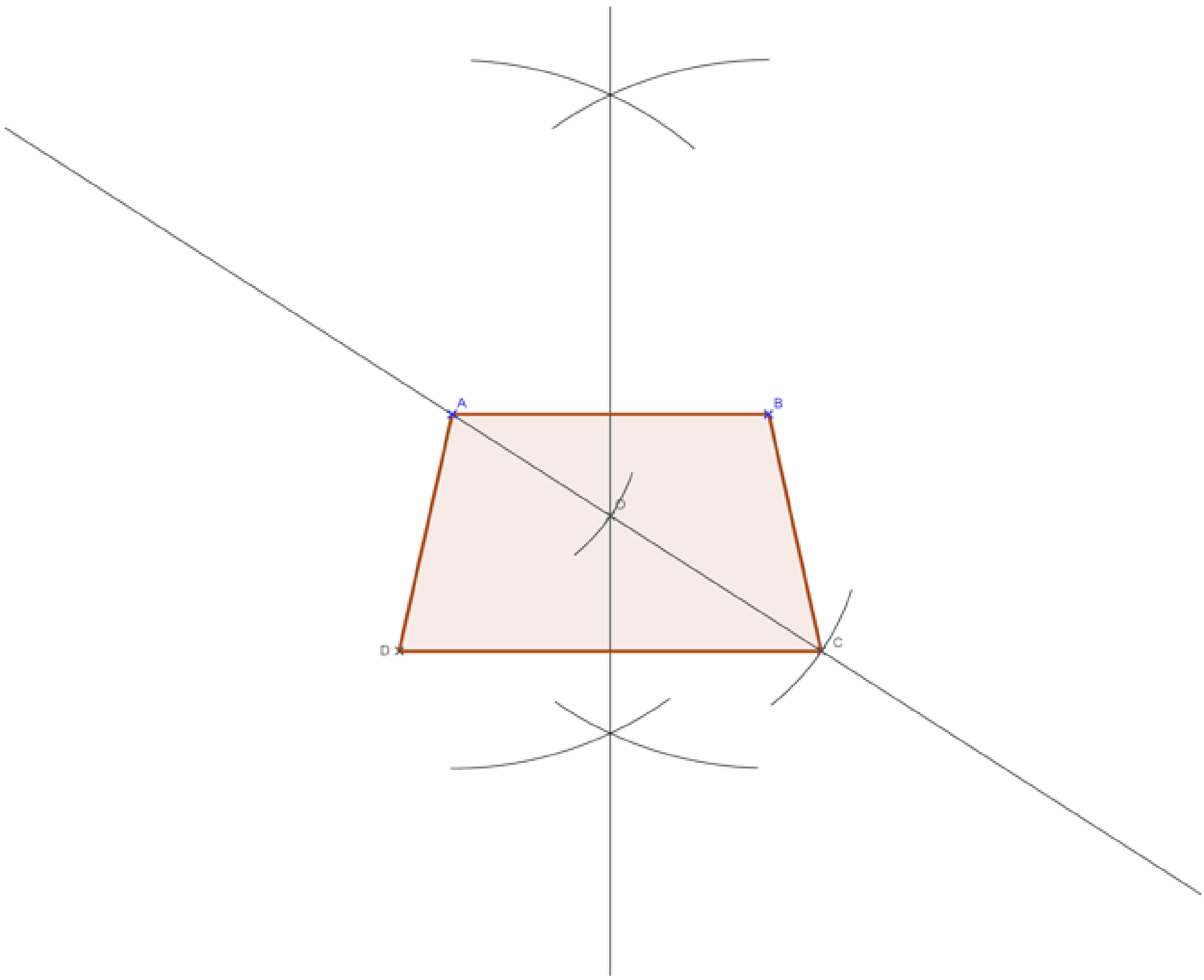
   D'après le théorème de Thalès, on a les égalités suivantes :

   $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$ donc $CD = \frac{AB \times OC}{OA}$ soit $CD = \frac{20}{3}$ cm

2) Élaborer et suivre un programme de construction

Connaître les propriétés du trapèze isocèle (axe de symétrie…)

Utiliser les instruments de géométrie pour construire une figure.



Exercice 5

Connaître les relations dividende, diviseur, quotient, reste dans une division euclidienne.

1)
   a) On a $3899 = d \times 82 + 45$ et donc d=47.
   b) Dans $N = d \times 82 + 45$ et $0 \leq 45 < d$

$N < 4200$ donc $d \times 82 + 45 < 4200$ soit $d \leq 50$. Ainsi : $45 < d \leq 50$.

On a donc les couples (N ; d) suivants : (3817 ; 46), (3899 ; 47), (3981 ; 48), (4063 ; 49), (4145 ; 50)

2) Si r=112, on a d>112 d'où $d \times 82 + 112 > 113 \times 82 + 112$ soit N>4200 ce qui est impossible.
   Il n'y a pas de couple solution.
3) $N = d \times 82 + r$ et $0 \leq r < d$
   r étant un entier, la plus grand valeur possible pour r est $d - 1$.
   On a donc $0 \leq r \leq (N - r) / 82$ - 1soit $0 \leq 82r \leq N - r - 82$
   Donc $83r \leq N - 82 < 4118$ soit $r \leq 49$.
   Si $0 \leq r \leq 49$, il existe des couples (N, d).
   Si r>49, il n'existe pas de couple (N, d).

Partie B- analyse de productions d'élèves

Cette partie aborde les notions suivantes :
- Grandeurs et mesures : aire et périmètre
et évalue chez le candidat les compétences suivantes :
- Distinguer grandeur et mesure
- Connaître et mettre en œuvre des procédures de comparaison d'aires et de périmètres dans le cadre des grandeurs et dans le cadre des mesures.
- Reconnaître et savoir analyser des erreurs identifiées dans les procédures de comparaison d'aires et de périmètres mises en œuvre par les élèves.

Comparaison d'aires dans le cadre de la mesure
Comparaison d'aires dans le cadre des grandeurs sans recours à la mesure.
Capacité à anticiper des procédures d'élèves et à analyser le support proposé aux élèves en utilisant un vocabulaire adapté

1)
   a. Choisissons pour unité d'aire le carreau carré du quadrillage et comme unité de longueur son côté. L'aire de la parcelle A a pour mesure 18 et la parcelle B 24 donc l'aire de la parcelle B est la plus grande. Les périmètres des parcelles A et B ont pour mesure 22, les deux parcelles ont donc même périmètre.
   b. Par superposition, on constate que la parcelle B recouvre entièrement la parcelle A, on peut donc dire que l'aire de la parcelle B est la plus grande. Les côtés des parcelles sont deux à deux superposables, les deux parcelles ont donc même périmètre.

Connaître l'influence de certaines variables (nature des supports)

2) La présentation utilisant le quadrillage renforce l'idée de comptage de carreaux ou de côtés de carreaux. Les élèves privilégient donc l'utilisation de la mesure pour comparer les grandeurs.

Reconnaître la validité d'une réponse et que l'on ne peut « s'arrêter » à ce seul constat. Ici deux réponses (justes ou erronées) qui sont la conclusion de démarches (procédures) différentes. « Lire » des productions d'élève.

3) Sa réponse à la question a est correcte. La comparaison du nombre de carreaux peut avoir été faite globalement, sans comptage effectif. Pour la comparaison de périmètre, il évoque aussi une mesure d'aire (en commettant une erreur de comptage, 17 carreaux au lieu de 18). Il ne semble pas distinguer aire et périmètre, sa réponse est erronée.
4) Sa réponse à la question a. est correcte, il compare les aires par découpage et superposition (mentales).

Par contre, il se trompe pour les périmètres : pour lui, les aires et les périmètres sont deux grandeurs qui varient dans le même sens. Si l'aire de la parcelle B est la plus grande, son périmètre le sera aussi.

d) et e) Savoir donner une interprétation de production d'élèves. Reconnaître un obstacle dans la comparaison des grandeurs aire et périmètre.

Troisième partie : Analyse de situations de classe en maternelle *(14 points)*

Cette partie aborde les notions suivantes :
- Dénombrement de collections
- Constitution de collections de cardinal donné
- Comparaison de collections

et évalue chez le candidat les compétences suivantes :
- Connaître des procédures de dénombrement
- Connaître des procédures de comparaison de collections
- Connaître les principes faisant de la comptine un outil efficace de dénombrement
- Connaître l'effet de variables de la situation sur les procédures de dénombrement et de comparaison
- utiliser à bon escient le vocabulaire

PARTIE A : dénombrer des collections

Connaître des procédures de dénombrement mobilisables par des élèves de maternelle

1. Tâche A : désigner chacun des jetons (le toucher voire le déplacer) et associer un mot-nombre de la comptine ; énoncer à la fin le dernier mot-nombre prononcé en réponse à la question « Combien ».

Tâche B : mémoriser le nombre douze, prendre un jeton et le mettre dans le panier tout en énonçant un mot-nombre de la comptine, s'arrêter après avoir énoncé douze et placé ce dernier jeton dans le panier.

Connaître des erreurs fréquentes chez les élèves dans des tâches de dénombrement.

2. Erreurs possibles : ne pas énoncer la comptine dans l'ordre conventionnel, ne pas énoncer un seul mot-nombre pour chaque jeton désigné, compter plusieurs fois le même jeton, oublier des jetons, ne pas prendre conscience que le dernier mot-nombre prononcé détermine la quantité.

Connaître l'influence de certaines variables dans des tâches de dénombrement.

3. L'enfant doit effectuer un comptage des jetons comme dans la tâche A mais il doit également s'arrêter à douze en gardant en mémoire cette condition d'arrêt : c'est une difficulté supplémentaire.

PARTIE B : Variations autour de la tâche A

Analyser les effets de changements de valeurs de certaines variables de la tâche sur les procédures des élèves.

Connaître des procédures de dénombrement.

4. Il peut percevoir globalement la quantité sans recourir au comptage un à un.

Connaître des représentations du nombre, leur utilisation dans des procédures de dénombrement.

5. Il peut surcompter à partir de 5, reconnu grâce à la constellation, ou de 10 reconnu à partir des deux constellations.

L'élève peut aussi reconnaitre les constellations, associer directement la quantité et s'appuyer sur certains résultats mémorisés. Il en voit ainsi cinq et encore cinq et puis deux : cinq et cinq, dix et deux, ça fait douze.

Connaître l'effet de la nature des collections sur les procédures de dénombrement.

6. Les objets ne sont plus déplaçables, l'élève doit organiser son pointage pour énumérer la collection.

PARTIE C : Variations autour de la tâche B

Analyser les effets de changements de valeurs de certaines variables de la tâche sur les procédures des élèves.

7. Le nombre douze peut ne plus être utilisé ici : l'élève fait une correspondance terme à terme des jetons avec les points de la constellation de sa carte.
Connaître différentes procédures pour constituer des collections de cardinal donné

8. Reconnaissance de l'écriture chiffrée d'un nombre.
Connaître différentes représentations du nombre (écrit, oral, analogique)

9. En commençant par le 1 et dans l'ordre, il pointe chaque élément de la bande numérique tout en énonçant le nombre oralement. Lorsqu'il « entend » douze, il s'arrête et lit l'écriture chiffrée correspondante. Il peut aussi trouver des repères intermédiaires, par exemple reconnaître 10 et dire 11, 12 pour reconnaître le nombre écrit sur sa carte.
Connaître les outils d'aide à l'apprentissage du nombre

PARTIE D: Variations autour de la tâche « Comparer des quantités »

Globalement dans cette partie, il s'agit de mobiliser des connaissances sur les différentes procédures correctes susceptibles d'être mises en œuvre par un élève de GS dans une tâche de comparaison de deux collections en les référant à la façon dont ces collections sont présentées. Dans les questions 10 et 11, les variables sont énoncées (proximité ou éloignement des deux collections constituées d'objets mobiles) dans la question alors que dans la question 12, le candidat doit identifier les variables (collections dessinées, cardinal de chaque collection, écart entre les deux, disposition des éléments dans les collections…) et les choix relatifs à celles-ci pour chaque item.

Identifier différentes procédures non numériques et numériques permettant de comparer des quantités.

10. L'élève peut désigner parallèlement un élément de chaque collection et continuer tant qu'une collection n'est pas épuisée. À la fin, la collection qui contient encore des jetons est celle qui a le plus grand nombre d'éléments.
11. L'élève peut dénombrer la première collection puis la seconde et comparer les cardinaux
10. et 11. Connaître l'influence du dispositif sur la mobilisation de telle ou telle procédure de comparaison du cardinal de collections.

12.
Identifier l'influence auprès des élèves du jeu sur les valeurs de variable dans le choix de procédures de comparaison du cardinal de collections.

Item 1 : estimation ; collections non organisées, la différence entre les nombres d'éléments est assez marquée pour que la comparaison par estimation soit possible.
Item 2 : comparaison directe ; différence faible mais le fait que les collections soient organisées, « en parallèle », permet de voir facilement l'élément en plus.
Item 3 : reconnaissance immédiate (subitizing) de la collection de cardinal le plus important ; c'est la faible taille des collections qui autorise cette procédure.
Item 4 : reconnaissance immédiate des constellations pour comparer 5 et 6 ; c'est l'organisation en constellation qui autorise cette procédure.

Item 5 : recours au comptage et à la comparaison des nombres ; c'est le fait que les cardinaux des collections soient élevés, que leur différence soit faible et qu'une des collections soit désorganisée qui induit le comptage.
Item 6 : recours au comptage et à la comparaison des nombres induit par des collections de grande taille, non organisées mais de différence de cardinal faible. La grande taille des collections incite à faire des groupements pour dénombrer des sous-collections. Il faudra ensuite comparer le nombre de groupements de même cardinal obtenus en prenant en compte éventuellement des éléments isolés.