Proposition n°1 pour les sujets 0 de l'épreuve de mathématiques du CRPE session 2014

Première partie *(13 points)*

L'objectif de ce problème est de résoudre mathématiquement différentes situations mettant en jeu des jetons.

Partie A : Disposer des jetons

Voici 16 jetons disposés « en carré »

O O O O
O O O O
O O O O
O O O O

Maxime possède un certain nombre de jetons et souhaite les disposer « en carré » en les utilisant tous.
Il fait une première tentative : il dispose ses jetons en carré, mais son carré n'est pas assez grand et il lui reste 52 jetons qu'il ne peut pas placer.
Il fait une deuxième tentative : il essaie d'agrandir son premier carré en disposant 4 jetons de plus par côté, il lui manque alors 60 jetons pour finir son carré.
1) Calculer le nombre de jetons que possède Maxime.
2) Maxime peut-il placer tous ses jetons en carré ? Justifier la réponse.
3) Sans utiliser la calculatrice, expliquer s'il est possible de placer 2700 jetons en carré.

Partie B : Organiser des jetons

Dans un sac, il y a 84 jetons bleus, 60 jetons rouges et 48 jetons jaunes.
1) On souhaite répartir ces jetons dans des boîtes qui contiennent toutes la même quantité de jetons de chaque couleur. Donner le nombre possible de boîtes et pour chaque possibilité préciser le contenu de la boîte.
2) Pour remplir ces boîtes, on pioche au hasard les jetons dans le sac.
   a) Combien de jetons au minimum faut-il piocher successivement pour être sûr d'avoir au moins un jeton jaune ? Justifier la réponse.
   b) Quelle est la probabilité de « piocher un jeton jaune en premier » ?

Partie C : Jouer avec les jetons

Dans cette partie, des points sont affectés aux différents jetons.
- les jetons bleus font gagner 3 points,
- les jetons rouges font gagner 7 points.

Un meneur de jeu distribue à ses amis des jetons bleus et des jetons rouges et chacun doit calculer son total de points.

1) Bernard a autant de jetons bleus que de jetons rouges. Son nombre total de points est 70. Combien a-t-il de jetons de chaque couleur ?

2) Paul dit qu'il a 29 jetons qui représentent une valeur totale de 159 points.
   Trouver la composition de la collection de jetons de Paul :
   a) par une résolution algébrique ;
   b) par une résolution arithmétique.

3) Céline possède des jetons bleus et des jetons rouges pour une valeur totale de 34 points.
   a) Combien de jetons de chaque couleur possède-t-elle ? Trouver toutes les solutions.
   b) Sur l'annexe 1, la droite d'équation $3x + 7y = 34$ a été représentée. En explicitant la méthode, retrouver graphiquement les solutions obtenues précédemment.

4) Pierre n'a que des jetons bleus et Jean n'a que des jetons rouges. Pierre doit donner 34 points à Jean. Comment Pierre et Jean peuvent-ils procéder ? Décrire une solution.

Deuxième partie *(13 points)*

Cette deuxième partie est constituée de questions à choix multiples (partie A) et d'une analyse de production d'élèves sur les décimaux (partie B)

Partie A : questions à choix multiples *(6 points)*
Dans cette partie, aucune justification n'est demandée.
Chaque question appelle une ou deux réponses exactes.
- *une bonne réponse rapporte soit 1 point, soit 0,5 point ;*
- *une absence de réponse ne pénalise pas (0 point) ;*
- *une réponse fausse enlève 0,5 point.*

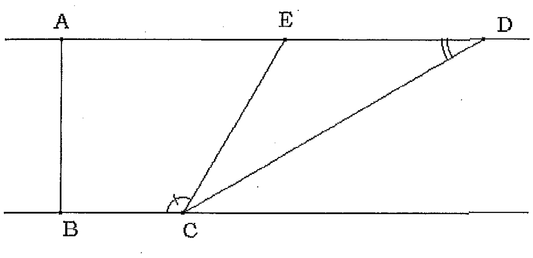
Vous indiquerez Vrai ou Faux dans les cases qui correspondent aux affirmations A, B, C ou D dans le tableau réponse de chaque question.

1) Un quadrilatère ABCD est appelé isocervolant en A si l'angle $\widehat{A}$ est droit et si la droite (AC) est un axe de symétrie de la figure.

Parmi les affirmations suivantes indiquez celle(s) qui est (sont) exacte(s).
A - Tout carré est un isocervolant.
B - Tout rectangle est un isocervolant.
C - Tout isocervolant est un carré.
D - Tout isocervolant est un rectangle.

A	B	C	D

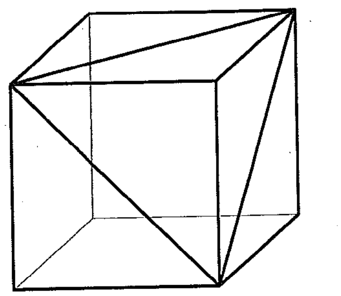
2) Sur la figure ci-dessous :
   - les points A, E et D sont alignés dans cet ordre ;
   - la droite (AB) est perpendiculaire à la droite (AE) et à la droite (BC) ;
   - le triangle DEC est isocèle en E ;
   - la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{CDE}$ est a et celle de l'angle $\widehat{ECB}$ est $4a$.



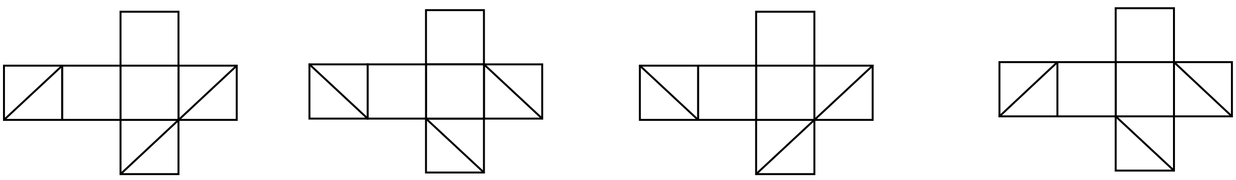
Parmi les affirmations suivantes indiquez celle(s) qui est (sont) exacte(s).
La valeur de *a* est :
A : 45°
B : 30°
C : 20°
D : 25°

A	B	C	D

3) On considère le cube ci-dessous représenté en perspective cavalière.



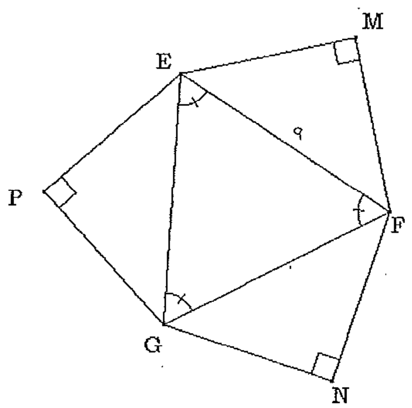
Un seul des patrons suivants correspond à ce cube. Lequel ?



Patron A Patron B Patron C Patron D

A	B	C	D

4) EFG est un triangle équilatéral de côté de longueur *a*. Les triangles EMF, FNG et GPE sont des triangles rectangles isocèles respectivement en M, N et P et disposés comme la figure ci-dessous.



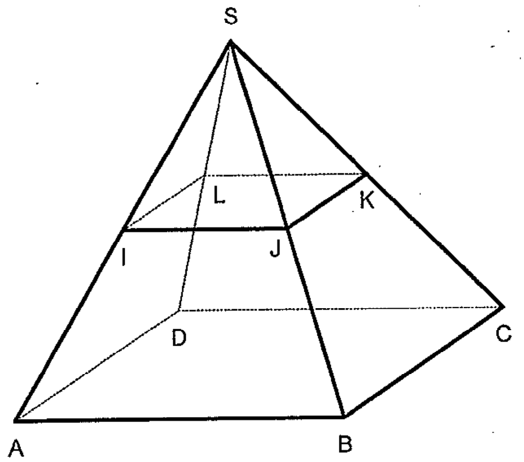
Parmi les affirmations suivantes indiquer celle(s) qui est (sont) exacte(s).
A – EM = $a\sqrt{2}$.
B – L’aire du triangle EMF est égale à $\dfrac{a^2}{4}$.

C – L'aire du triangle EFG est égale à $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$

D – Le périmètre de l'hexagone EMFNGP est égal à $3a\sqrt{2}$.

A	B	C	D

5) On considère la pyramide de sommet S et de base ABCD représentée ci-dessous.
Les points I, J, K et L sont respectivement les milieux des arêtes [SA], [SB], [SC] et [SD].



Parmi les affirmations suivantes indiquer celle(s) qui est (sont) exacte(s).
A – L'aire du quadrilatère ABCD est égale à quatre fois l'aire du quadrilatère IJKL.
B – L'aire du quadrilatère IJBA est égale à deux tiers de l'aire du triangle SAB.
C – Le volume de la pyramide SABCD est égal aux huit septièmes du solide ABCDIJKL.
D - Le volume de la pyramide SABCD est égal à trois fois celui de la pyramide SIJKL.

A	B	C	D

6) Parmi les affirmations suivantes indiquer celle(s) qui est (sont) exactes(s).
A : Tout quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
B : Tout parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
C : Tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leurs milieux est un losange.
D : Tout quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur est un losange.

A	B	C	D

Partie B : analyse de productions d’élèves sur les décimaux *(7 points)*

Cet exercice s’appuie sur les documents proposés en annexes 2 et 3.
Annexe 2 : Les réponses de deux élèves (Jeanne et Tiago) à l’exercice n°2 extraites des cahiers des évaluations nationales des acquis des élèves de CM2 en janvier 2011 et les réponses de deux élèves (Samia et Julien) à la multiplication de $23{,}45 \times 10$.
Annexe 3 : Extrait des programmes de mathématiques de l’école (B.O. du 19 juin 2008).

1) Questions A, B et C concernant l’exercice n°2.

a) Pour chaque question A, B et C de l’exercice présenté en annexe 2, identifier de façon précise la connaissance et la compétence issue des programmes de mathématiques de l’école de 2008 qu’elle permet d’évaluer.

Dans une classe de CM1/CM2, voici les résultats obtenus par les 15 élèves de CM2.

Question A		**Question B**	
$\frac{60}{2}$	8 élèves	3,10	8 élèves
$\frac{62}{10}$	4 élèves	0,3	3 élèves
$\frac{602}{100}$	3 élèves	30,00	2 élèves
		3,00	1 élève
		0,03	1 élève

b) Le tableau de résultat ci-dessus montre que les réponses $\frac{60}{2}$ à la question A et 3,10 à la question B sont surreprésentées. Quel renseignement nous donnent ces réponses sur la représentation du lien entre l’écriture à virgule et l’écriture fractionnaire d’un nombre décimal pour les élèves qui commettent cette erreur ?

<u>Analyse des réponses à la question C :</u>

c) Donner une hypothèse permettant d’expliquer l’absence de réponse de Tiago à la question C.

d) Au regard de la réponse donnée par Jeanne à la question C, quel type de connaissances mathématiques faudrait-il retravailler ?

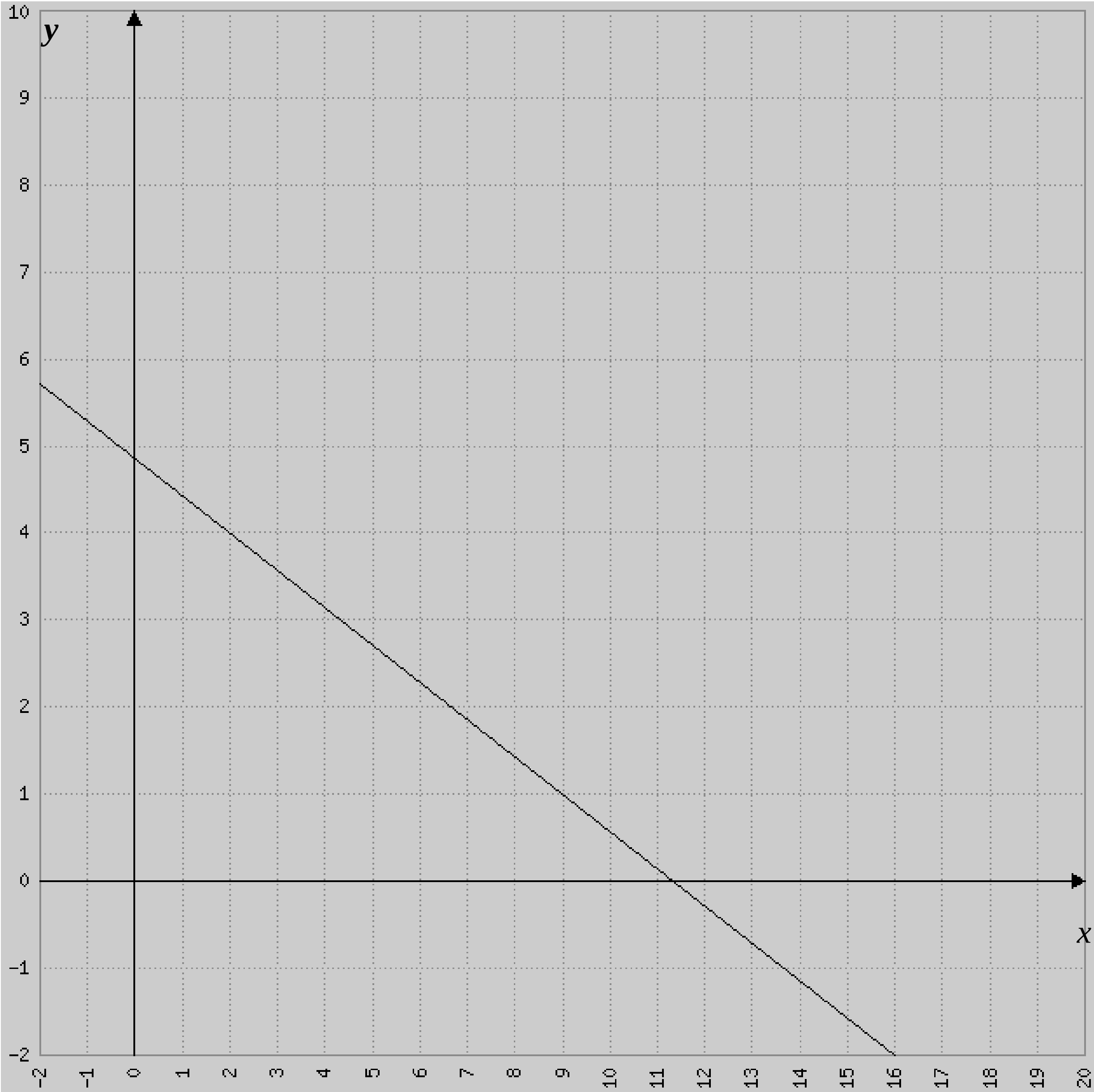
2) Des réponses argumentées d’élèves à qui il est demandé de calculer : $23{,}45 \times 10$ sont présentées en annexe 2.

a) Quelle règle semble appliquer les deux élèves Samia et Julien ?

b) Préciser leurs erreurs et formuler une hypothèse sur la représentation du nombre décimal chez ces élèves.

Annexe 1

Représentation graphique de la droite 3x + 7y = 34



Annexe 2

Réponses de deux élèves à l’exercice n°2 extrait des évaluations nationales des acquis des élèves de CM2 en janvier 2011.

<u>Production de Jeanne :</u>

A/ Entoure la fraction égale à 6,02

$\frac{60}{2}$ $\frac{62}{10}$ $\frac{602}{100}$ $\frac{620}{100}$

B/ Entoure le nombre à virgule égal à $\frac{3}{10}$

3,10 0,3 0,03 30,00 3,0 3,00

C/ Écris $\frac{1}{4}$ *sous forme de nombre à virgule :*

$\boxed{\frac{1}{4} = 0,4}$

Item 66			Item 67			Item 68		
1	9	0	1	9	0	1	9	0

<u>Production de Tiago :</u>

A/ Entoure la fraction égale à 6,02

$\frac{60}{2}$ $\frac{62}{10}$ $\frac{602}{100}$ $\frac{620}{100}$

B/ Entoure le nombre à virgule égal à $\frac{3}{10}$

3,10 0,3 0,03 30,00 3,0 3,00

C/ Écris $\frac{1}{4}$ *sous forme de nombre à virgule :*

$\boxed{\frac{1}{4} =}$

Item 66			Item 67			Item 68		
1	9	0	1	9	0	1	9	0

Réponses argumentées concernant le calcul de 23,45 x 10

Samia a écrit :	Julien a écrit :
23,450 parce que quand on multiplie par dix on met un zéro.	*230,450 car* *23 × 10 = 230* *45 × 10 = 450 donc* *ça fait 230,450*

Annexe 3

Extrait des programmes de l'école de mathématiques 2008

Les tableaux suivants donnent des repères pour l'organisation de la progressivité des apprentissages par les équipes pédagogiques.
Seules des connaissances et compétences nouvelles sont mentionnées dans chaque colonne.
Pour chaque niveau, les connaissances et compétences acquises dans la classe antérieure sont à consolider.
La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages.

	Cours élémentaire deuxième année	Cours moyen première année	Cours moyen deuxième année
Nombres et calcul	**Les nombres entiers jusqu'au million** - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au million. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier. - Connaître et utiliser certaines relations entre des nombres d'usage courant : entre 5, 10, 25, 50, 100, entre 15, 30 et 60.	**Les nombres entiers jusqu'au milliard** - Connaître, savoir écrire et nommer les nombres entiers jusqu'au milliard. - Comparer, ranger, encadrer ces nombres. - La notion de multiple : reconnaître les multiples des nombres d'usage courant : 5, 10, 15, 20, 25, 50.	**Les nombres entiers**
		Fractions - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. - Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.	**Fractions** - Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.
		Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée, . les comparer, les ranger, . les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, . passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.	**Nombres décimaux** - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, . les comparer, les ranger, . produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001... - Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.
	Calcul sur des nombres entiers **Calculer mentalement** - Mémoriser et mobiliser les résultats des tables d'addition et de multiplication. - Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction et multiplication. - Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. - Organiser ses calculs pour trouver un résultat par calcul mental, posé, où à l'aide de la calculatrice. - Utiliser les touches des opérations de la calculatrice. **Problèmes** - Résoudre des problèmes relevant des quatre opérations.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. **Effectuer un calcul posé** - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers. - Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. **Problèmes** - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier. - Utiliser sa calculatrice à bon escient. **Problèmes** - Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

Troisième partie : Analyse d’éléments d’enseignement de la proportionnalité

(14 points)

Les différentes questions visent l’analyse de plusieurs énoncés de problèmes et une proposition de mise en œuvre en classe.

Partie A : Analyse d’un premier énoncé de problème et de productions d’élèves

Le problème ci-dessous a été donné à des élèves de cycle 3 pour aborder la notion de proportionnalité.

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 mètres de papier, et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 mètres de ce papier.
a- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 mètres de papier ?
b- Quelle longueur de papier lui faut-il pour emballer 50 livres ?
c- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 mètres de papier ?

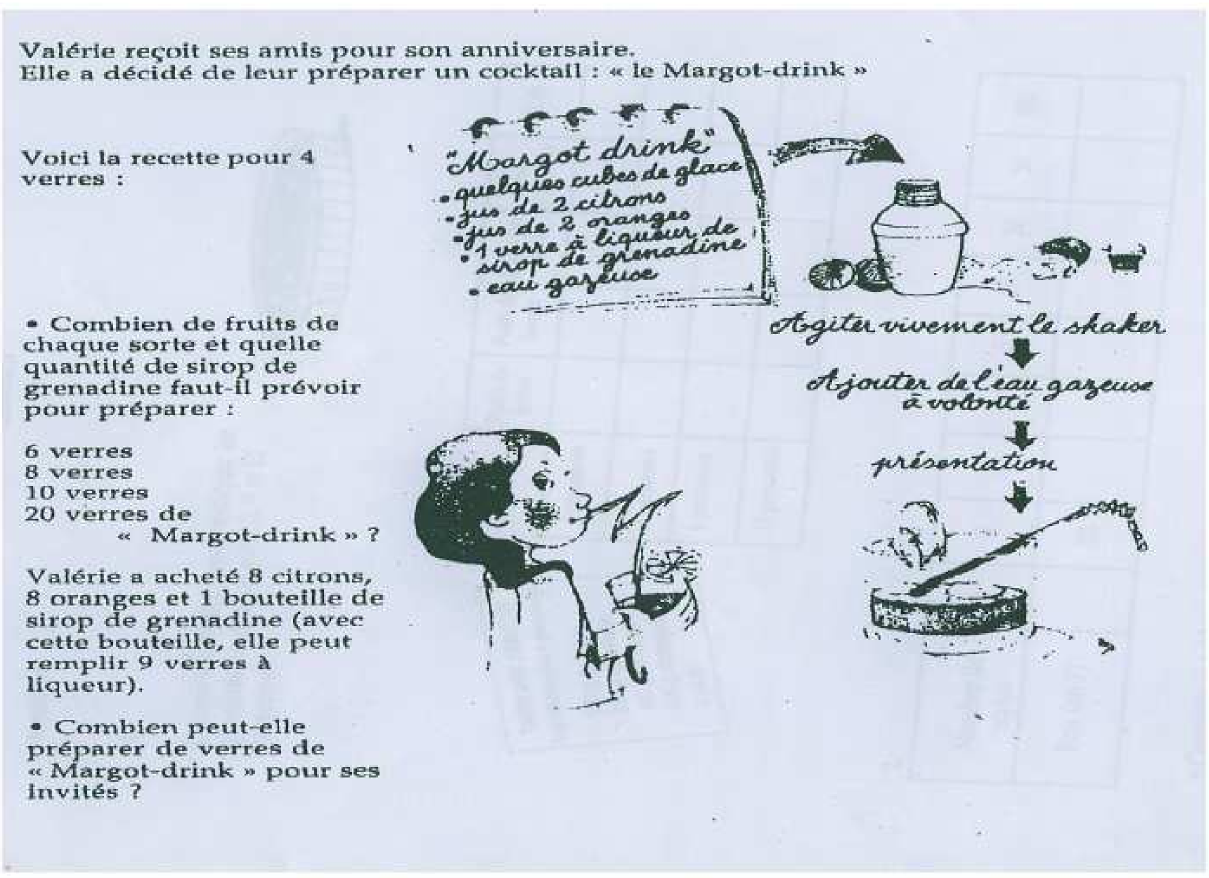
1- Cette situation semble être une situation de proportionnalité.
Donner un élément implicite (non dit) de l'énoncé qu'il serait bon de préciser pour lever toute ambiguïté lors de la résolution de ce problème.

2- D'un point de vue mathématique, cette situation de proportionnalité peut être modélisée par une fonction linéaire (ou par sa réciproque).
a) Expliciter ces deux fonctions.
b) Donner la réponse attendue aux questions a, b et c du problème en utilisant l'une ou l'autre de ces fonctions.

3- Le problème a été proposé à trois élèves, Laurène, Farida et Yann dont les productions sont données en annexe 4.
a) *Analyse de la copie de Laurène.*
Expliciter les procédures utilisées par Laurène pour répondre aux questions en vous référant aux propriétés mathématiques sous jacentes à ces procédures.
b) *Analyse de la copie de Farida*.
Donner une explication plausible aux erreurs commises par Farida pour répondre aux questions a) et c).
Farida a-t-elle reconnu une situation de proportionnalité ? Justifier la réponse.
c) *Analyse de la copie de Yann*.
Comment interpréter la réponse de Yann à la question b) ?

Partie B : Analyse d’une séquence d’enseignement se référant à deux énoncés de problèmes

Pour introduire la notion de proportionnalité en classe de CM1, un enseignant décide d’utiliser le document suivant :


Valérie reçoit ses amis pour son anniversaire.
Elle a décidé de leur préparer un cocktail : « le Margot-drink »

Voici la recette pour 4 verres :

• Combien de fruits de chaque sorte et quelle quantité de sirop de grenadine faut-il prévoir pour préparer :

6 verres
8 verres
10 verres
20 verres de « Margot-drink » ?

Valérie a acheté 8 citrons, 8 oranges et 1 bouteille de sirop de grenadine (avec cette bouteille, elle peut remplir 9 verres à liqueur).

• Combien peut-elle préparer de verres de « Margot-drink » pour ses invités ?

Il décide de préparer sa séquence en se référant au canevas présenté ci-dessous.

Étape 1 : Seule la recette est affichée au tableau. Ensuite la première question portant sur le nombre de fruits et la quantité de sirop est écrite au tableau. Les élèves sont invités à rechercher les informations utiles pour répondre à cette question.
Étape 2 : Les élèves sont répartis en groupes hétérogènes. Ils ont à chercher une solution et à la présenter sur une affiche.
Étape 3 : Le maître procède à la mise en commun des affiches rédigées dans chaque groupe. Des explications orales peuvent être demandées aux producteurs des affiches et des arguments portant sur la validité ou la non validité de la réponse sont échangés entre élèves.
Étape 4 : Une synthèse collective permet à l'enseignant de mettre en évidence les éléments pertinents et les erreurs contenus dans les affiches.
a) Il met en place un modèle de présentation qui permet d'écrire les données, les résultats calculés et de schématiser la méthode utilisée.
b) Il organise la correction de la première question en séparant le calcul des ingrédients pour 8 verres et 20 verres de celui pour 6 verres et 10 verres. Il fait intervenir comme intermédiaire le calcul pour 2 verres indiqués par une affiche. Il fait apparaître ainsi les propriétés qu'il veut mettre en place.
Étape 5 : Les élèves prennent connaissance de la deuxième question portant sur le nombre de verres et essaient d'y répondre individuellement. Le maître conduit une correction collective à partir

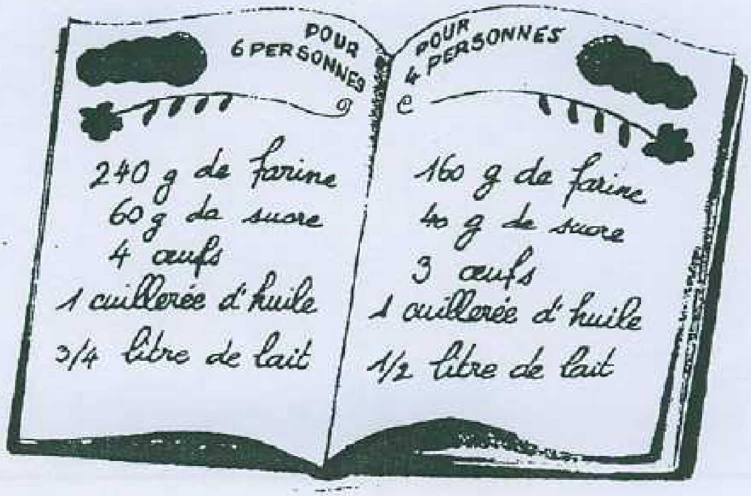
des différentes propositions.
Étape 6 : Les élèves ont ensuite à résoudre trois exercices du même style.
Étape 7 : L’exercice suivant est proposé pour cette fin de séance :

Voici 2 recettes de crêpes

a/ Compare les 2 recettes.

b/ La maîtresse désire faire des crêpes pour les 30 élèves de la classe.

Quelles quantités doit-elle prévoir ?



1- Expliciter deux connaissances mathématiques et deux compétences d’ordre général que les élèves doivent avoir préalablement acquis pour résoudre le problème « Margot –drink ». Justifier les réponses.

2- Pour chacune des étapes de cette séquence, caractériser le moment de l'étude correspondant et préciser l’intérêt spécifique de l’étape.

3- Concernant *l'étape 1,* recenser les informations utiles à rechercher et que le maître veut mettre en relief.

4- Proposer un modèle que l’enseignant peut mettre en place dans la partie a) de l’étape 4. Comment schématiser la méthode utilisée ?

5- À l'étape 7, le maître propose un exercice de ré-investissement.
En quoi cet exercice est-il différent de celui proposé dans l’étape 1 ? Décrire une procédure correcte qu'un élève de CM1 est susceptible de mettre en œuvre pour répondre à la question b) de cet exercice.

Annexe 4

Productions des élèves : Laurène, Farida et Yann

LAURÈNE

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier,
et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier.

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papi

10 m + 4 m = 14 m

10 livres + 25 livres = 35 livres

Il peut emballer 35 livres.

2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50

4 m + 4 m + 4 m + 4 m + 4 m = 20 m

Il faut 20 m de papier.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier

4 m 4 m − 2 2 − 2 m 2 m 6 m

10 m − 5 = 5

Il peut emballer 15 livres.

FARIDA

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier,
et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier.

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

pour 25 livres il lui faut 10 m
pour 14 m de papier 25+4 = 29 livres
10 pour aller à 14 on ajoute 4.

2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

21+29 = 50
29 − 21 = 8
Il faut 8 m de papier pour 50 livres.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?

10 − 4 = 6
25 − 4 = 21
Avec 6 m de papier le libraire peut emballer 21 livres

YANN

Pour emballer 10 livres, un libraire utilise 4 m de papier,
et pour emballer 25 livres, il lui faut 10 m de ce papier.

1- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 14 m de papier ?

25 + 10 = 35

Le libraire a pu emballer 35 livres dans 14 m de papier.

2- Quelle longueur de papier faut-il pour emballer 50 livres ?

4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+2 = 125 m

Il lui fot 125 m pour emballe 50 livre.

3- Combien de livres le libraire peut-il emballer avec 6 m de papier ?

Le libraire peut emballer avec 6 m de papier 15 livres

10 = 4 m 5 = 2 m

10 + 5 = 15 livres