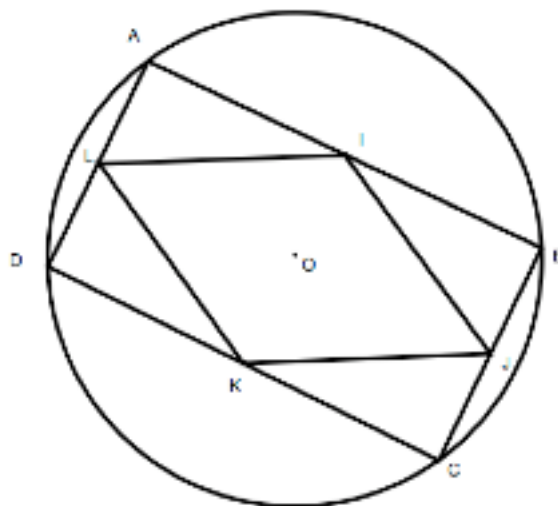


Proposition n°2 pour les sujets 0 de l'épreuve de mathématiques du CRPE session 2014

Première partie : un problème de jardinier (13 points)

Un jardinier veut réaliser un parterre circulaire composé de différentes parties comme l'indique le dessin ci-contre.

Une plate-bande est représentée par le rectangle ABCD, inscrit dans un disque, et le quadrilatère IJKL représente un massif aménagé à l'intérieur de la plate bande.



A- Construire le parterre

Le disque qui constitue le parterre a pour centre O et pour rayon r .

1) a) Prouver que $AC = BD = 2r$.

b) On souhaite que la largeur de la plate-bande mesure les $\frac{3}{4}$ de sa longueur. Prouver qu'alors la longueur du rectangle vaut $\frac{8}{5}r$ et que sa largeur vaut $\frac{6}{5}r$.

2) Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

a) Déterminer la longueur des côtés de IJKL en fonction de r . Justifier la réponse.

b) En déduire la nature du quadrilatère IJKL.

3) À l'échelle 1/60, le disque a pour rayon 5 cm. Construire à la règle et au compas, le plan de ce parterre à cette échelle. *Les traits de construction resteront apparents.*

4) Calculer, en vraie grandeur, l'aire de la surface délimitée par la plate-bande. Les résultats seront donnés en m^2 au centième près.

B- Fleurir le parterre

Le jardinier décide de planter des tulipes sur le contour de la plate-bande et de semer du gazon à l'extérieur de celle-ci. Comme il souhaite tondre le moins possible, il envisage de changer les dimensions de la plate-bande pour que celle-ci ait une aire maximale tout en conservant son périmètre. Il cherche alors quelles pourraient être les dimensions de la plate-bande.

Une modélisation mathématique va permettre de répondre au problème du jardinier.

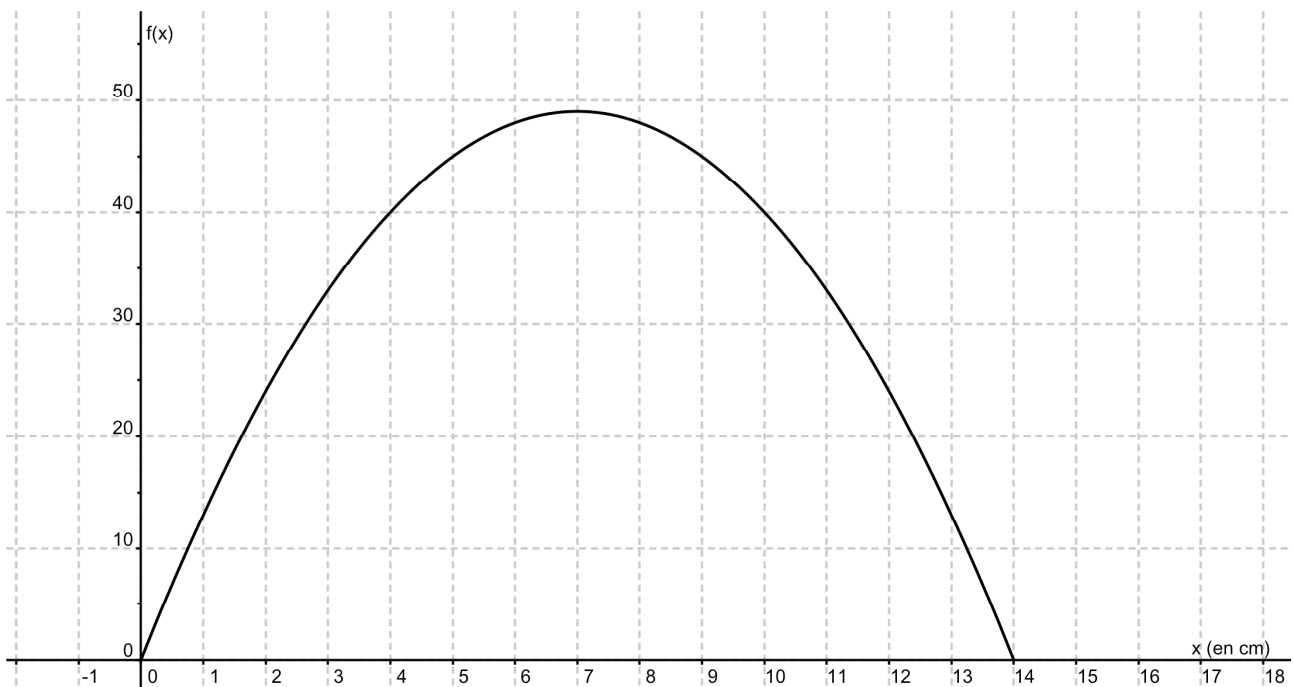
Ainsi pour les questions suivantes, les calculs se feront à partir des dimensions du plan réalisé précédemment (le rayon du disque est de 5 cm).

5) Calculer (en cm) le périmètre du rectangle ABCD.

6) Montrer que si $A'B'C'D'$ est un rectangle ayant le même périmètre que le rectangle ABCD alors son aire vérifie :

$$\text{aire}_{(A'B'C'D')} = 14x - x^2 \text{ où } x \text{ désigne la largeur du rectangle } A'B'C'D'.$$

- 7) À partir du graphique suivant, déterminer graphiquement pour quelle valeur de x le rectangle $A'B'C'D'$ a une aire maximum.



Représentation de la fonction $f(x) = 14x - x^2$ pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 14]$

- 8) En déduire la nature du rectangle $A'B'C'D'$ ayant même périmètre que $ABCD$ et une aire maximale ainsi que la nature du quadrilatère $I'J'K'L'$ associé. Justifier les réponses.
- 9) Le jardinier peut-il construire une plate-bande représentée par ce quadrilatère $A'B'C'D'$ et vérifiant la condition d'être inscriptible dans le disque initial ? Justifier la réponse.

C- Acheter des fleurs

Finalement, pour des raisons esthétiques, le jardinier choisit une plate-bande rectangulaire de 3,60 m sur 4,80 m et veut planter des tulipes sur le pourtour extérieur.

- 10) Sachant que les tulipes se plantent tous les 10 cm et qu'il y en a une à chaque coin de la plate-bande, déterminer le nombre de tulipes nécessaires. Justifier la réponse.
- 11) Par expérience, le jardinier sait que 20% des tulipes plantées ne fleuriront pas. Combien de tulipes devra-t-il commander afin de pouvoir remplacer les défectueuses ? (Il ne les remplacera qu'une seule fois).
- 12) Les tulipes sont vendues par lot de 100 dont un quart sont de couleur rouge, un autre quart de couleur jaune et le reste de couleur panachée.

À partir d'un même lot, le jardinier commence par planter toutes les tulipes rouges. Il tire au hasard dans le lot, un bulbe de tulipe. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un bulbe de tulipe rouge sachant que les quatre premières tulipes tirées étaient rouges ? Justifier la réponse.

Deuxième partie (13 points)

Cette deuxième partie est constituée de questions appelées « Vrai – Faux- Justifier » (partie A) et d'une analyse de production d'élèves sur du calcul mental (partie B).

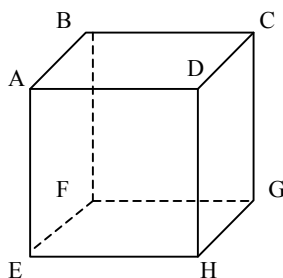
Partie A : Vrai – Faux – Justifier (6 points)

Dans cette partie, des affirmations sont proposées. Pour chacune d'entre elles, dire si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier la réponse.

Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point.

Une réponse fausse n'enlève aucun point.

- 1- Une classe a une moyenne de 9 sur 20 à un devoir surveillé.
Affirmation 1 : La moitié de la classe a eu au moins 9 sur 20 à ce devoir.
- 2- Affirmation 2 : 1 cL de liquide occupe un volume égal à $0,001 \text{ dm}^3$.
- 3- Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, l'arête AB mesure $a \text{ cm}$.



Affirmation 3 : On peut alors affirmer que le volume du solide dont les sommets sont A, B, D et E est égal à $\frac{a^3}{6} \text{ cm}^3$.

- 4- Soit a, b, c trois entiers compris entre 0 et 9.
Affirmation 4 : Les nombres qui s'écrivent $abcabc$ en base dix sont des multiples de 13.
- 5- Sur une carte au $1/25000$ deux villages sont distants de 7 cm.
Affirmation 5 : Ces villages seront distants de $\frac{35}{8} \text{ cm}$ sur une carte au $1/40000$.
- 6- On considère le nombre $10^9 - 9$.
Affirmation 6 : Lorsque l'on fait la somme des chiffres composant l'écriture usuelle de ce nombre, on obtient 73.

Partie B : Analyse de productions d'élèves sur un exercice de calcul réfléchi. (7 points)

Lors d'une séance de calcul mental, un enseignant écrit au tableau le calcul. Après un moment de recherche, au signal, les élèves écrivent leur résultat sur l'ardoise et lèvent celle-ci. Afin de faire apparaître les différentes procédures, l'enseignant demande alors à certains élèves d'expliquer oralement comment ils ont obtenu leur résultat.

Les réponses et les explications orales fournies par huit élèves que l'on désignera par les lettres, A, B, C, D, E, F, G et H sont indiquées ci-dessous.

- 1) Relever et analyser les erreurs commises.
- 2) Identifier trois procédures qui ont permis d'obtenir le résultat et qui amènent à mobiliser des propriétés de la multiplication qui seront explicitées.
- 3) Pour chacune des procédures repérées, indiquer les élèves qui l'ont employée.

Calcul : 18×5

- Elève A *sur l'ardoise* : 90
Explications : 18 c'est presque 20, je calcule 20×5 , c'est 100. Il faut enlever 5 et encore 5.
- Elève B *sur l'ardoise* : 90
Explications : 18 plus 18 ça fait 36 et encore 36, 72, et encore 18, 90.
- Elève C *sur l'ardoise* : 45
Explications : je compte 5 fois 8 quarante et 5 fois 1 cinq. Ça fait 45.
- Elève D *sur l'ardoise* : 90
Explications : 5 c'est la moitié de 10, je fais 18 multiplié par 10 ça fait 180 puis je prends la moitié 50 et 40.
- Elève E *sur l'ardoise* : 94
Explications : j'ai posé l'opération dans ma tête: 5 fois 8 quarante, 0 et je retiens 4, 5 fois 1 cinq et 4 neuf.
- Elève F *sur l'ardoise* : 90
Explications : 18 fois 5 c'est comme 9 fois 2 fois 5.
- Elève G *sur l'ardoise* : 72
Explications : 18 plus 18, 36 plus 18 c'est comme 20 moins 2 ça fait 54, plus 18, 72 plus 18; 90. J'avais faux.
- Elève H *sur l'ardoise* : 90
Explications : 10 multiplié par 5 cinquante, 8 multiplié par 5 quarante, 40 plus 50, 90.

Troisième partie : Analyse de documents pédagogiques sur l'enseignement de la division (14 points)

I. Analyse d'une séance en CE2 (Annexe 1)

Dans l'annexe 1 figure un extrait du manuel CapMaths CE2 (Hatier 2011) présentant le support écrit d'une séance. L'objectif de cette séance porte sur la résolution de problèmes de partage.

- 1) Exprimer les solutions de chaque problème de la partie « Chercher » au moyen d'une égalité.
- 2) Citer trois connaissances ou compétences préalables nécessaires à cette activité (partie « Rechercher »).
- 3) Les élèves sont mis en équipes de deux. Ils sont d'abord invités à répondre à la première question de la partie « Chercher ». Après un temps de recherche, l'enseignant organise une mise en commun.
 - a) Décrire trois procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour répondre à la question 1 concernant le nombre de rubans de Tim.
 - b) Expliciter deux types d'erreurs envisageables.
 - c) Quel est le rôle d'une mise en commun à l'issue de la première question ?
 - d) De quelle manière peut-on envisager la vérification des réponses ?

4) Dans un deuxième temps, les élèves doivent résoudre les deux autres questions de la partie « Chercher ». Le déroulement est identique à celui de l'étape précédente.

- a) De quelle manière peut-on envisager la validation des réponses de la question 3 ?
- b) Analyser le choix des nombres dans toute cette activité.

5) Quels éléments de synthèse pourrait-on mettre en avant à l'issue de cette activité ?

6) Six exercices numérotés de 4 à 9 sont proposés à la suite de l'activité de recherche. Analyser le choix de ces exercices en relevant un point commun et trois différences d'ordre mathématique.

II. La division en CM2

1) Analyse de deux exercices.

Les deux problèmes suivants (ERMEL CM2, Hatier) sont proposés aux élèves :

Problème 1

Michel veut faire des étagères de bibliothèque.
Avec toute une planche de 350 cm, il découpe 8 étagères de même longueur.
Quelle est la longueur des étagères ?

Problème 2

Une planche mesure 350 cm.
Combien de morceaux de 8 cm de long Jean peut-il faire avec cette planche ?

- a) Résoudre les deux problèmes proposés.
- b) Citer une ressemblance et une différence d'ordre mathématique entre ces deux problèmes ?
- c) Pour chacun de ces deux problèmes, dire s'il renvoie à un problème de division-partition ou de division-quotition.
- d) Pour résoudre ce problème, les élèves ne disposeront pas de calculatrices. Justifier ce choix.

2) Dans le cadre de l'Évaluation nationale d'entrée en sixième, il a été proposé aux élèves d'effectuer, sans calculatrice, la division euclidienne de 4 584 par 8. En Annexe 2 sont reproduits les travaux d'Aliette, Béatrice et Christian.

- a) Décrire pour chaque élève les procédures utilisées pour effectuer la division proposée. Relever et caractériser les erreurs éventuelles.
- b) Quelle technique intermédiaire de la division pourrait-on proposer pour aider Béatrice et Christian ?

CHERCHER Combien de parts ?

Maïa et Tim découpent des rubans dans des bandes de différentes couleurs. Dans chaque bande, ils doivent découper le plus possible de rubans.

Maïa découpe des rubans qui mesurent tous 2 cm de long et Tim des rubans qui mesurent tous 6 cm de long.



- 1 Ils ont chacun une bande rouge de 32 cm. Combien de rubans peuvent-ils découper ?
- 2 Ils ont chacun une bande bleue de 67 cm. Combien de rubans peuvent-ils découper ?
- 3 Ils ont chacun une bande jaune de 248 cm. Combien de rubans peuvent-ils découper ?

EXERCICES

- 4 Une bande mesure 30 cm. Combien de rubans de 5 cm peux-tu découper ?
- 5 Une bande mesure 78 cm. Combien de rubans de 5 cm peux-tu découper ?
- 6 Dans une bande, Maïa a découpé 9 rubans de 7 cm chacun. À la fin, il lui reste un petit ruban de 4 cm de long. Quelle était la longueur de la bande ?
- * 7 Une bande mesure 200 cm. Combien de rubans de 9 cm peux-tu découper ?
- * 8 Un mini-car permet de transporter 8 passagers. Combien faut-il prévoir de mini-cars pour emmener 54 passagers en promenade ?
- * 9 Les 52 élèves de CE1 et de CE2 se répartissent en équipes de 7. Les élèves restants seront arbitres. Combien y aura-t-il d'arbitres ?

Annexe 2

Aliette

$$\begin{array}{r}
 1 \times 8 = 8 \quad 8 \quad 800 \\
 2 \times 8 = 16 \quad 160 \quad 1600 \\
 3 \times 8 = 24 \quad 240 \quad 2400 \\
 4 \times 8 = 32 \quad 320 \quad 3200 \\
 5 \times 8 = 40 \quad 400 \quad 4000 \\
 6 \times 8 = 48 \quad 480 \\
 7 \times 8 = 56 \quad 560
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4584 \\
 - 4000 \\
 \hline
 0584 \\
 - 5600 \\
 \hline
 024 \\
 24
 \end{array}$$

Christian

$$\begin{array}{r}
 4584 \\
 - 47 \\
 \hline
 3964 \\
 - 172 \\
 \hline
 3892 \\
 - 42 \\
 \hline
 3850 \\
 - 71 \\
 \hline
 3778 \\
 - 172 \\
 \hline
 3606
 \end{array}$$

Béatrice

$$\begin{array}{r}
 4584 \\
 - 4000 \\
 \hline
 0584 \\
 - 500 \\
 \hline
 184 \\
 - 160 \\
 \hline
 024 \\
 24
 \end{array}$$