**Proposition n°3 pour les sujets 0 de l'épreuve de mathématiques**
**du CRPE session 2014**

## Première partie : numération et opérations *(13 points)*

Dans le tableau ci-dessous, on a écrit quelques nombres avec des hiéroglyphes, tel que des scribes égyptiens auraient pu le faire vers –3000 av. J.C.
On nommera les signes utilisés :

 trait  spirale  fleur (de lotus)  doigt courbé  têtard  dieu  anse

| | |
|---|---|
| 42 209 |  |
| 120 000 |  |
| 1 422 000 |  |
| 400 010 |  |
| 30 031 |  |

1) On admet qu'il existe une écriture unique de chaque nombre dans ce système (à l'ordre près des symboles utilisés), chaque symbole étant utilisé au maximum neuf fois. Traduire les nombres suivants :

| | |
|---|---|
|  | |
| | 2 154 813 |

2)
   a. Expliciter une règle permettant de comparer deux nombres quelconques écrits dans ce système de numération.

   b. Citer un avantage de notre système actuel de numération écrite par rapport au système égyptien du point de vue de la comparaison des nombres.

   c. Citer un nombre que l'on peut écrire dans notre système de numération mais qui ne peut s'écrire dans le système égyptien.

3) Calculer la différence entre les deux nombres A et B suivants, en utilisant exclusivement le système de numération égyptien (on laissera visibles les différentes étapes du calcul).

| | |
|---|---|
| .A |  |
| B |  |

4) Pour multiplier deux nombres, les égyptiens utilisaient une méthode dite « par duplications successives ».

Exemples : pour effectuer les produits $35 \times 47$ et $89 \times 25$ (avec nos symboles de numération)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boxed{\mathbf{1}}$ | 47 | | |
| $\boxed{\mathbf{2}}$ | 94 | | |
| 4 | ~~188~~ | | |
| 8 | ~~376~~ | | |
| 16 | ~~752~~ | | |
| $\boxed{\mathbf{32}}$ | 1504 | | |
| 35 | 1645 | donc | $35 \times 47 = 1645$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boxed{\mathbf{1}}$ | 25 | | |
| 2 | ~~50~~ | | |
| 4 | ~~100~~ | | |
| $\boxed{\mathbf{8}}$ | 200 | | |
| $\boxed{\mathbf{16}}$ | 400 | | |
| 32 | ~~800~~ | donc | $89 \times 25 = 2225$ |
| $\boxed{\mathbf{64}}$ | 1600 | | |
| 89 | 2225 | | |

a. Effectuez ainsi le produit 28 × 34.

b. Montrez la validité de cet algorithme sur l'exemple de 35 × 47 en justifiant chacune des étapes du calcul.

c. Décrivez cet algorithme et justifiez qu'il est toujours utilisable pour calculer le produit de deux entiers, quels qu'ils soient.

5) Dans les exemples donnés, on a utilisé 6 et 7 lignes avant de pouvoir faire l'addition finale. Supposez que l'on ait à effectuer le produit d'un nombre à quatre chiffres par un nombre à trois chiffres, quel nombre minimal de lignes faut-il écrire ? Justifiez votre réponse.

6) Dans une classe de CE1, des élèves confrontés pour la première fois au calcul de 19 × 34, ont calculé ainsi :

34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34 + 34

68 + 68 + 68 + ......................

136 + ................................

.........................................

Trouver deux points communs entre cette procédure et la méthode dite « par duplications successives ». .

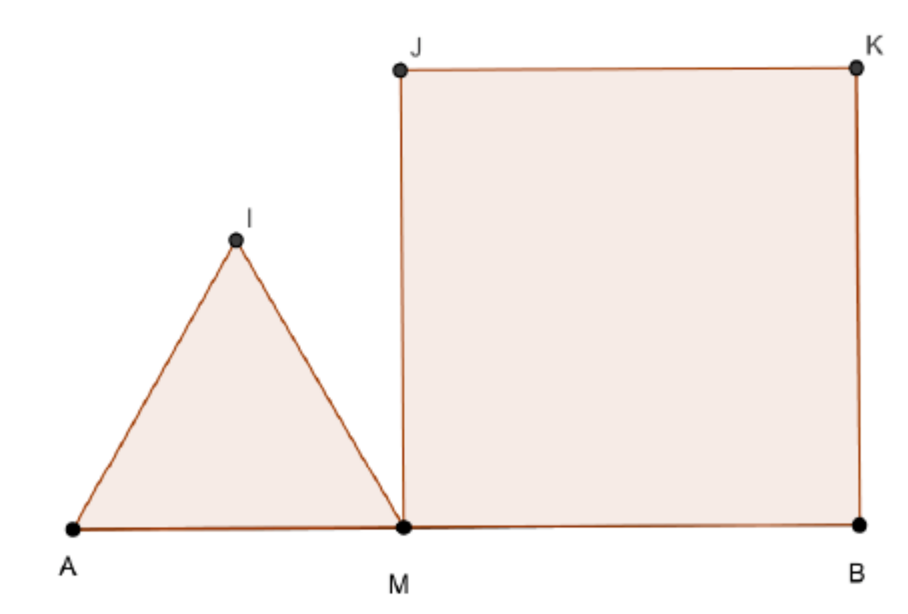
Donner une capacité supplémentaire nécessitée par la méthode dite « par duplications successives ».

## **Deuxième partie** *(13 points)*

Cette deuxième partie est constituée d'exercices (partie A) et d'une analyse de production d'élèves sur la notion d'aire et de périmètre (partie B)

**Partie A** : Résoudre les exercices suivants en justifiant les réponses. *(7 points)*

*Exercice 1*




M est un point du segment [AB] de longueur 10,5cm.
AIM est un triangle équilatéral et BMJK est un carré.
On se propose de rechercher la position du point M pour que AIM et BMJK aient le même périmètre.

1) On note $x$ la mesure en cm de la longueur AM.
   Exprimer en fonction de $x$ le périmètre de AIM et celui de MJBK, et résoudre le problème algébriquement.
2) Donner une résolution graphique du problème.

*Exercice 2*

En fin de marché, un maraîcher décide, alors qu'il lui reste 60 salades, 48 oignons et 36 bottes de radis, de constituer des lots identiques de légumes pour écouler sa marchandise.

1) Quel est le nombre maximum de lots identiques qu'il peut constituer ? Justifier la réponse.
2) Pour ce nombre maximum de lots identiques, quelle est la composition de chaque lot ?

*Exercice 3*

ABCD est un trapèze isocèle dont une des bases est le segment [AB] et dont les diagonales se coupent en un point O, tel que :
AB = 5 cm ; OA= 3 cm et OC= 4 cm.

1) Calculer CD.
2) Construire aux vraies dimensions, en utilisant une règle graduée et un compas, ce trapèze. *Les traits de construction resteront apparents.*

*Exercice 5*

On considère les nombres entiers $N$ et $q$ tels que : $N < 4200$ et $q = 82$. Dans la division euclidienne de $N$ par un nombre entier $d$, on obtient le quotient $q$ et le reste $r$.

1) Dans cette question, $r = 45$.

a) Déterminer $d$ pour $N = 3899$.

b) Dans le cas général où $N < 4200$, rechercher l'ensemble des couples ($N$, $d$) possibles dans cette division euclidienne. Justifier les réponses.

2) Dans cette question, $r = 112$. Dans le cas général où $N < 4200$, rechercher l'ensemble des couples ($N$, $d$) possibles dans cette division euclidienne. Justifier les réponses.

3) Discuter, selon la valeur de $r$, l'existence de couples ($N$, $d$) dans cette division euclidienne.

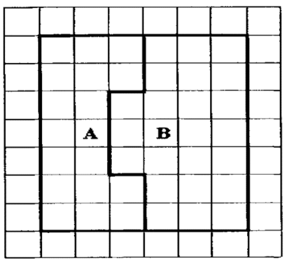
**Partie B : analyse de productions d'élèves sur la notion d'aire et de périmètre** *(6 points)*

Les deux productions suivantes (élève n°1 et élève n°2) sont extraites des cahiers d'évaluation nationale de début $6^{ème}$. Les compétences évaluées sont :

- *Mesurer l'aire d'une surface grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé.*
- *Calculer le périmètre d'un polygone.*
- *Différencier aire et périmètre (en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire).*
- *Formuler et communiquer sa démarche par écrit.*
- *Argumenter à propos de la validité d'une solution.*

1) Pour la comparaison des aires et des périmètres des parcelles A et B de l'évaluation :
   a. donner une solution utilisant des mesures (valeurs numériques),
   b. donner une solution n'utilisant pas les mesures.
2) Comment peut-on expliquer que les élèves privilégient les solutions numériques ?
3) Comment interpréter les réponses de l'élève n°1 ?
4) Comment interpréter les réponses de l'élève n°2 ?

**Élève n° 1**




Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

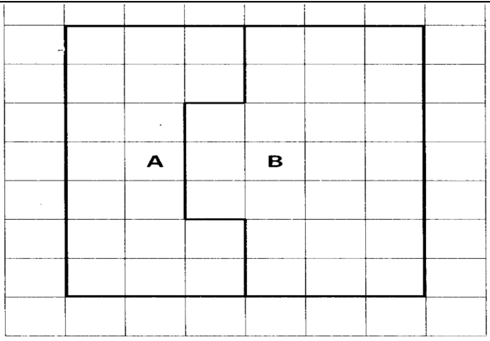
a. L'aire de la parcelle A est la plus grande. — Les deux parcelles ont la même aire. — L'aire de la parcelle B est la plus grande.

**Explique ton choix :** parce qu'il y a plus de carreaux dans la parcelle B.

b. Le périmètre de la parcelle A est le plus grand. — Les deux parcelles ont le même périmètre. — Le périmètre de la parcelle B est le plus grand.

**Explique ton choix :** Parce qu'il y a 17 carreaux dans la parcelle A.

**Élève n°2**




Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

*a.* L'aire de la parcelle A est la plus grande. | Les deux parcelles ont la même aire. | L'aire de la parcelle B est la plus grande.

Explique ton choix : Si le terrain serait coupé en deux au milieu, elles auraient toutes les deux la même aire mais comme la parcelle B possède un morceau de plus que A elle est plus grande

*b.* Le périmètre de la parcelle A est le plus grand. | Les deux parcelles ont le même périmètre. | Le périmètre de la parcelle B est le plus grand.

Explique ton choix : Comme l'aire la parcelle B est plus grande que A : le périmètre de la parcelle B est aussi plus grand.

## Troisième partie : Analyse de situations de classe en maternelle *(14 points)*

Ce sujet propose d'analyser quelques types de tâches rencontrés dans le domaine numérique par des élèves de Grande Section (GS) de l'école maternelle.

**PARTIE A : dénombrer des collections**

Un élève de Grande Section, en fin d'année, est confronté successivement aux deux tâches suivantes :

| |
|---|
| Tâche A :<br>Un tas d'une vingtaine de jetons est devant lui. On lui demande combien il y a de jetons.<br>Tâche B :<br>L'élève reçoit une barquette ; le maître dit à l'élève d'aller chercher douze jetons dans la réserve et de les rapporter dans son panier. |

1. Pour chacune de ces tâches, décrire une procédure utilisant la comptine numérique permettant de réaliser la tâche.

2. Cette question porte sur la tâche A. Décrire deux erreurs qu'un élève peut faire en dénombrant par comptage la vingtaine de jetons qui est devant lui.

3. La tâche B est plus complexe que la tâche A. En s'appuyant sur les procédures décrites dans la question 1, donner un argument permettant de justifier cette affirmation.

## PARTIE B : Variations autour de la tâche A

Dans cette partie, certaines valeurs des variables de la tâche A vont être modifiées. Il va s'agir d'analyser les effets de ces changements de valeur sur les procédures des élèves.

4. Le tas de jetons proposé contient moins de quatre jetons, quelle autre procédure peut utiliser un élève dans ce cas ?

5. Le nombre de jetons proposé : 12. Par ailleurs, les jetons ne sont pas présentés en tas, mais organisés sur la table de l'élève comme ci-dessous :

```
O     O     O     O     O
   O           O        O
O     O     O     O
```

Quelle procédure, différente de celle décrite en question 1, peut alors être utilisée par un élève pour réaliser la tâche ?

6. On remplace le tas d'une vingtaine de jetons par une collection d'une vingtaine de points dessinée sur une feuille et non organisée. En quoi cela peut-il obliger à modifier une procédure possible dans le cas 1 ?

## PARTIE C : Variations autour de la tâche B

Dans cette partie, certaines valeurs des variables de la tâche B vont être modifiées. Il va s'agir d'analyser les effets de ces changements de valeur sur les procédures des élèves.

7. Au lieu de dire à l'élève de ramener douze jetons, le maître donne à l'élève une carte constellation représentant une collection de douze éléments organisée ainsi :

```
O     O     O     O     O
   O           O        O
O     O     O     O
```

et lui demande de rapporter autant de jetons que de points représentés sur la carte.
Décrire une procédure, différente de celle décrite dans la question 1, que l'élève peut utiliser pour réaliser la tâche ?

8. Le maître place dans un sac des cartes sur lesquelles sont inscrites les écritures chiffrées des nombres jusqu'à 15. Un élève pioche dans le sac la carte « 12 » et doit apporter autant de jetons que le nombre inscrit sur la carte. Quelle connaissance le maître souhaite-t-il évaluer ?

9. Le maître met maintenant la réserve de jetons à proximité de la bande numérique affichée dans la classe (bande numérique allant de 1 à 31). Décrire comment l'élève peut utiliser la bande numérique pour lire le nombre « 12 » inscrit sur la carte.

## PARTIE D: Variations autour de la tâche « Comparer des quantités »

Dans cette partie, il va s'agir d'identifier différentes procédures non numériques et numériques permettant de comparer des quantités.

On considère deux collections de jetons que l'on désire comparer. Les deux collections comportent une quinzaine de jetons. Une collection est composée de jetons bleus, l'autre de jetons rouges.

10. Donner une procédure non numérique permettant de réaliser cette tâche lorsque les collections sont proches (sur une même table par exemple).

11. Donner une procédure permettant de réaliser cette tâche lorsque les collections sont éloignées (sur deux tables séparées).

12. Ci-dessous, sont présentés des items portant sur la comparaison de collections selon leur quantité. Ces items sont donnés sur feuille. Par un jeu sur les valeurs des variables de la situation, chaque item induit une procédure de comparaison différente des autres.

    Pour chaque item, décrire la procédure de comparaison induite et expliquer quelle valeur des variables de la situation favorise cette procédure.