DDF de MATHEMATIQUES
Septembre 2011

Pistes de Correction de l'épreuve d'entraînement

PARTIE A

1) Dans une urne républicaine, il y a des boules bleues, blanches et rouges, toutes indiscernables au toucher. La probabilité de tirer une boule bleue est égale à $\frac{2}{5}$, celle de tirer une boule blanche est $\frac{3}{7}$. Déterminer la probabilité de tirer une boule rouge.

CORRECTION. La probabilité de tirer une boule rouge est le complément à 1 de la somme des probabilités de tirer une boule des deux autres couleurs (*les évènements sont disjoints*). En effet, il y a trois couleurs, on connaît la probabilité pour deux de ces trois couleurs, on en déduit la probabilité $\boldsymbol{p}$ de tirer la troisième couleur. On a : $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \boldsymbol{p} = 1$, d'où $\boldsymbol{p} = 1 - (\frac{2}{5} + \frac{3}{7})$.

« Petit bricolage » avec les « fractions »... $\boldsymbol{p} = 1 - \frac{29}{35} = \boldsymbol{\frac{6}{35}}$.

(*Calcul détaillé* : $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{(14+15)}{35} = \frac{29}{35}$).

2) Un automobiliste roule pendant 2h30min à une vitesse moyenne de 45km/h puis parcourt 50km à la vitesse moyenne de 80km/h. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?

CORRECTION. Au lecteur de se souvenir des formules ! Dans la première partie du parcours, l'automobliste a parcouru : 2,5 × 45km = 112,5km en $\frac{5}{2}$h. Dans la seconde partie du parcours, il a parcouru : 50km en $\frac{50\text{km}}{80\text{km/h}} = \frac{5}{8}$h = 37,5 minutes. D'où sa vitesse moyenne **V** : **V** = $\frac{162{,}5\text{km}}{(\frac{5}{2}\text{h} + \frac{5}{8}\text{h})} = \frac{162{,}5\text{km}}{\frac{25}{8}\text{h}} = \frac{162{,}5\text{km}}{3{,}125\text{h}}$ = **52km/h**. (*Toute autre bonne méthode est acceptée*).

3) Deux terrains ont le même prix de vente.

- Le premier est un rectangle de largeur 26m. II est vendu 130 euros le mètre carré.
- Le second est un trapèze qui a pour dimensions : hauteur : 52m, grande base : 80m et petite base : 50m. II est vendu 110 euros le mètre carré. Calculer alors la longueur du premier terrain.

CORRECTION. On note $\boldsymbol{L}$ la longueur cherchée. On a les deux égalités suivantes :
Prix du premier terrain : $\boldsymbol{L} \times 26 \times 130 = 3380 \times \boldsymbol{L}$
Prix du deuxième terrain : ((80 + 50) × 52) ÷ 2 × 110 = 371 800. *Aire du trapèze ?*
Les deux terrains ayant même prix, on a alors $\boldsymbol{L} = \frac{371\,800}{3380}$ = 110 (*mètres*) (> 26m).

4) Déterminer tous les nombres de trois chiffres, notés $\overline{\textbf{abc}}$, non multiples de dix, qui vérifient les deux conditions suivantes :

- Le chiffre des dizaines est le quadruple de celui des unités.
- En retranchant 297 au nombre $\overline{\textbf{abc}}$, on obtient le nombre écrit « à l'envers ».

Rappel : $\overline{\textbf{abc}} = 100 \times \textbf{a} + 10 \times \textbf{b} + 1 \times \textbf{c} = 100\textbf{a} + 10\textbf{b} + \textbf{c}$ (*décomposition canonique*).

CORRECTION. Exploitation des informations. Soit **N** le (ou les) nombre(s) cherché(s).

- Si **c** désigne le chiffre des unités, avec **c** non nul, car **N** non multiple de dix, et **b** celui des dizaines, on a alors les deux possibilités suivantes : **c** = 1 et **b** = 4 ou **c** = 2 et **b** = 8 ; si **c** = 3, **b** = 12, impossible. Donc **N** = $\overline{\mathbf{a}41}$ ou **N** = $\overline{\mathbf{a}82}$.
- On a aussi : $\overline{\mathbf{abc}}$ – 297 = $\overline{\mathbf{cba}}$; c'est-à-dire : (100**a** + 10**b** + **c**) – 297 = (100**c** + 10**b** + **a**). Suivant l'expression consacrée, on fait passer d'un même côté et on isole 297, ce qui donne : (100**a** + 10**b** + **c**) – (100**c** + 10**b** + **a**) = 297…

Il reste 99**a** – 99**c** = 297 ou 99 × (**a** – **c**) = 297 = 3 × 99 ; c'est-à-dire : (**a** – **c**) = 3. Or, on sait que **c** peut valoir 1 ou 2 d'où les valeurs possibles de **a** : 4 ou 5. Ce qui donne alors deux possibilités : **N** = 441 ou **N** = 582.

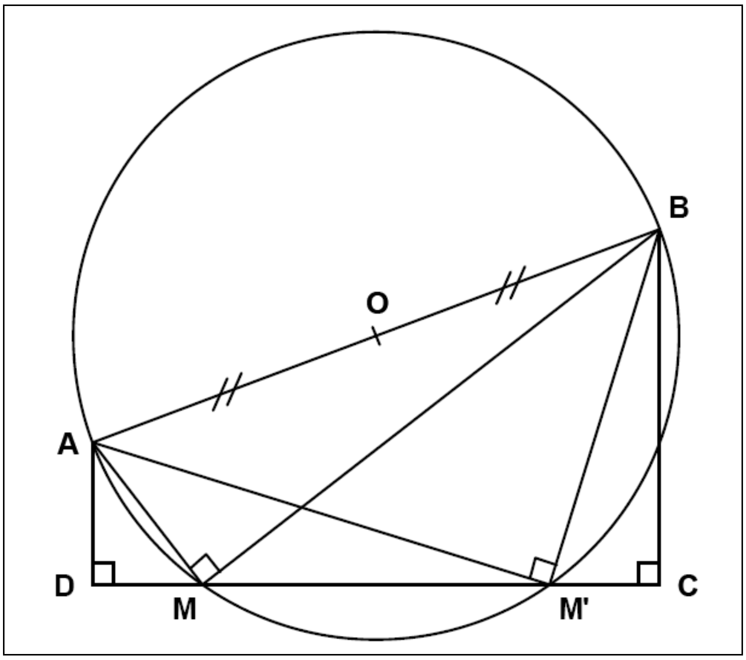
Vérification : 441 – 144 = 297 et 582 – 285 = 297, ce problème admet donc deux solutions.

Remarque : toute solution empirique est acceptée, comme par exemple, une étude des cas possibles en « vrai », une fois qu'on a extrait qq conditions.

PARTIE B

1) Construction des points **M** et **M'**

*Remarque. La construction demandée suppose que le trapèze **ABCD** est déjà représenté en vraie grandeur. La restriction des instruments autorisés ne s'applique donc pas à la construction de **ABCD**.*



Le triangle **ABM** étant rectangle en **M**, il est inscrit dans le cercle de diamètre **[AB]**. Donc le point **M** est sur le cercle de diamètre **[AB]**.

De même, puisque le triangle **ABM'** est rectangle en **M'**, le point **M'** est sur le cercle de diamètre **[AB]**. De plus, par hypothèse, les points **M** et **M'** sont sur le segment **[DC]**.

Les points **M** et **M'** sont donc les points d'intersection du cercle de diamètre **[AB]** et du segment **[DC]**, le point **M** étant le plus « proche » du point **D**.

2) a) Calcul de **AB**

Soit **E** le projeté orthogonal de **A** sur la droite **(BC)**. Ou plus simplement, soit **E** le pied de la perpendiculaire à **[BC]** issue de **A**. Le quadrilatère **AECD** possède trois angles droits donc c'est un rectangle.

On en déduit que **AE** = **DC** = 8 cm.

Dans le triangle **AEB**, rectangle en **E**, on applique le théorème de Pythagore.

Ainsi : $\mathbf{AB}^2 = \mathbf{AE}^2 + \mathbf{EB}^2 = (8^2 + 3^2)\ (\text{cm}^2) = 73\ (\text{cm}^2)$.

Donc **AB** = $\sqrt{73}$cm *(≈ 8,5cm : non attendu dans la question, on demande la valeur exacte*).

2) b) Calcul de AM^2 en fonction de *a*

Remarque :
Dans cette question et dans les suivantes, afin d'alléger la rédaction, nous utilisons abusivement la notation AB (qui normalement est celle de la longueur du segment [AB]) pour désigner la mesure de cette longueur, l'unité choisie étant le cm.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle AMD rectangle en D :

$AM^2 = AD^2 + DM^2 = 2^2 + a^2$

$\mathbf{AM^2 = a^2 + 4}$

Calcul de BM^2 en fonction de *a*

Méthode 1

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BMC rectangle en C :

$BM^2 = BC^2 + CM^2 = 5^2 + (8 - a)^2 = 25 + 64 - 16a + a^2$.

Donc $BM^2 = 89 - 16a + a^2$.

Méthode 2

Après avoir calculé AM^2, on peut utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle ABM rectangle en M. Ainsi, $AB^2 = AM^2 + MB^2$ d'où $BM^2 = AB^2 - AM^2 = 73 - (a^2 + 4)$.

Donc $BM^2 = 69 - a^2$.

Remarque :
Selon la méthode utilisée, les expressions de BM^2 en fonction de a diffèrent. Cependant, a étant fixé par les hypothèses, leurs valeurs numériques sont néanmoins égales. Les questions suivantes permettent de calculer la valeur de a qui assure cette égalité.

2) c) Démonstration de *a* solution de $x^2 - 8x + 10 = 0$

Méthode 1 (si on a utilisé la méthode 1 au 2b)

Avec la première expression de BM^2 calculée ci-dessus : $BM^2 = 89 - 16a + a^2$.
On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle ABM rectangle en M
Ainsi, $AB^2 = AM^2 + BM^2$
Soit d'après 2) a) et 2) b) : $73 = (a^2 + 4) + (89 - 16a + a^2)$
D'où $2a^2 - 16a + 20 = 0$
Ou encore, $a^2 - 8a + 10 = 0$
a est donc solution de l'équation $x^2 - 8x + 10 = 0$.

Méthode 2 (si on a utilisé la méthode 2 au 2b)

Avec la deuxième expression de BM^2 calculée ci-dessus : $BM^2 = 69 - a^2$.
On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle BMC rectangle en C.
Ainsi, $BM^2 = BC^2 + CM^2$.
Soit d'après 2) a) et 2) b) : $69 - a^2 = 5^2 + (8 - a)^2$
Ainsi $69 - a^2 = 25 + 64 - 16a + a^2$
$2a^2 - 16a + 20 = 0$
$a^2 - 8a + 10 = 0$
***a* est donc solution de l'équation $x^2 - 8x + 10 = 0$.**

Méthode 3

On calcule BM dans le triangle rectangle que l'on n'a pas utilisé dans 2b) :
Si on a utilisé la méthode 1, on utilise la 2, et inversement.
On obtient donc deux expressions pour BM^2 : $BM^2 = 89 - 16a + a^2$ et $BM^2 = 69 - a^2$
On a donc $89 - 16a + a^2 = 69 - a^2$
Ce qui est équivalent à : $a^2 - 8a + 10 = 0$

3) a) Utilisation d'un tableur pour la recherche des solutions

Remarque préalable :
Une équation du second degré peut avoir deux solutions. Dans la question 1), on a admis qu'il y avait deux solutions : ce sont les valeurs a = DM et a'= DM'.

Le tableur permet de calculer rapidement $x^2 - 8x + 10$ pour plusieurs valeurs de x et ainsi de mettre en œuvre une procédure de balayages successifs pour approcher les valeurs qui annulent cette expression.
Si x = 1, on a $x^2 - 8x + 10 = 3$ qui est positif.
Si x = 2, on a $x^2 - 8x + 10 = -2$ qui est négatif.
On en déduit que la fonction qui à x associe $x^2 - 8x + 10$ s'annule entre x = 1 et x = 2.
Donc il existe une solution de l'équation $x^2 - 8x + 10 = 0$ comprise entre les nombres entiers 1 et 2.
Il en est de même entre les nombres entiers 6 et 7.
Explorer les valeurs de x entre 1 et 2 et entre 6 et 7 permet bien d'approcher les solutions de l'équation $x^2 - 8x + 10 = 0$.

Dans les colonnes D et E, l'utilisateur calcule $x^2 - 8x + 10$ pour x variant de 1 à 2 (et de 6 à 7) par pas de 0,1. Cela lui permet d'obtenir un **encadrement des solutions au dixième**.

Remarque
On utilise ainsi implicitement :
- *le fait que la fonction qui à x associe $x^2 - 8x + 10$ est continue,*
- *un cas particulier du « théorème des valeurs intermédiaires » :*
  « Si f est continue entre a et b et $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$ (car 0 est compris entre f(a) et f(b)). ».

3) b) Encadrement des deux solutions de $x^2 - 8x + 10 = 0$

On recherche dans la colonne K deux valeurs successives de signes contraires : les valeurs correspondantes dans la colonne J encadrent une solution de l'équation.
On trouve ainsi que **l'une des solutions est comprise entre 1,550 et 1,551 et que l'autre est comprise entre 6,449 et 6,450.**

4) Valeurs approchées de DM et DM'

D'après ce qui précède DM et DM' sont les solutions de l'équation $x^2 - 8x + 10 = 0$ et on sait que DM < DM'.
On en déduit que :
- une valeur approchée de DM au millimètre près par défaut est **1,5 cm** ;
- une valeur approchée de DM' au millimètre près par défaut est **6,4 cm**.

PARTIE C

1. **a)** Le solide **HBCD** est une pyramide à base triangulaire ou tétraèdre (non régulier).
On peut utilement faire un retour sur la géométrie des solides pour préciser le vocabulaire, les caractéristiques et autres propriétés qu'on a toujourss du mal à garder en mémoire !

b) Exprimer les longueurs des arêtes **[HC]** et **[HB]** en fonction de $\boldsymbol{a}$.

Le segment **[HC]** est la diagonale du carré **CDHG** de côté $\boldsymbol{a}$ donc **HC** = $\boldsymbol{a}\sqrt{2}$ = **DB** (ou par application du théorème de Pythagore, oui, mais, à quel triangle rectangle ?).

Le solide **ABCDEFGH** est un cube, donc **[HD]** est perpendiculaire au plan **ABC** et le triangle **HDB** est rectangle en **D**. D'après le théorème de Pythagore, appliqué à ce triangle, on a : $\mathbf{HB^2} = \mathbf{HD^2} + \mathbf{DB^2} = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^2 = 3\mathbf{a}^2$ d'où $\mathbf{HB} = \boldsymbol{a}\sqrt{3}$.

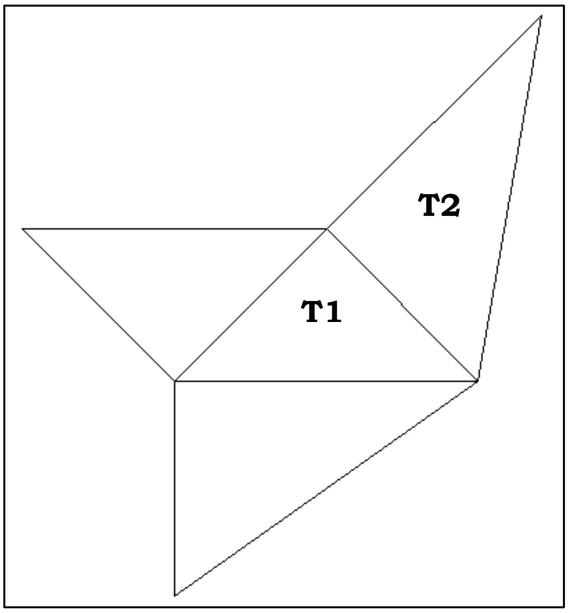
c) Le triangle **HBC** est rectangle en **C** car **[BC]** est perpendiculaire au plan **CDH** donc **[BC]** est orthogonal à toute droite de ce plan, en particulier **(HC)**.

Attention, une « lecture » sur le dessin autoriserait la réponse : HBC « isocèle » !

2. Deux dessins ne peuvent pas être un patron du solide **HBCD**, car les quatre faces sont des triangles rectangles, même si les codes ne figurent pas sur les dessins :
Dessin **D2** : car toutes les faces doivent être des trianges rectangles.
Dessin **D3** : les angles droits ne sont pas correctement placés ou un triangle parmi les quatre est isocèle.
Par défaut, les deux autres sont suceptibles d'être des « patrons ». A tester.

3. Aire latérale du solide **HBCD**. On « part » du dessin **D1**.

Aire (**T1**) = $\boldsymbol{a}^2/2$ et aire (**T2**) = $\boldsymbol{a}\sqrt{2} \times \boldsymbol{a}/2$
Aire (**HBCD**) = 2 × Aire (**T1**) + 2 × Aire (**T2**)
$= 2 \times (\boldsymbol{a}^2/2) + 2 \times (\boldsymbol{a}^2\sqrt{2}/2) = \boldsymbol{a}^2 \times (1+\sqrt{2})$
$= 6^2 \times (1+\sqrt{2}) \approx 86{,}91168$, l'aire vaut donc **86,91cm²**, valeur décimale arrondie au mm².



4. Volume **V** du solide **HBCD**

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \times \mathbf{HB} \times \text{Aire } (\mathbf{BCD}) = \frac{1}{3} \times \boldsymbol{a} \times \frac{\boldsymbol{a}^2}{2} = \frac{\boldsymbol{a}^3}{6} = 36(\text{cm}^3).$$

Il faut donc six pyramides semblables à **HBCD** pour « remplir » le cube. En effet, le volume du cube est égal à 216cm³.

<u>EXERCICE FACULTATIF « supplémentaire »</u>. (Il sera corrigé pendant les séances de TD allouées à la correction de cette épreuve d'entraînement).

Et bien, il n'y a plus qu'à !!!