Épreuve écrite de préparation au CRPE

Exercice 1 – « Vrai-Faux » Justifier.

1. **Faux.** Une hausse de 5% d'un prix revient à multiplier ce prix par 1,05. En effet, si x est le prix de départ, la hausse du prix est alors de $5x/100$ et le nouveau prix est donc
$$x + \frac{5x}{100} = x\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1,05x$$
Ainsi, chaque année le prix est multiplié par $1,05$. À la fin de la deuxième année, le prix initial a été multiplié par $1,05 \times 1,05$; à la fin de la troisième année, le prix initial a été multiplié par $1,05 \times 1,05 \times 1,05$... En dix ans, le prix a été multiplié par $1,05^{10} \simeq 1.63$. Le prix a donc subit une hausse de 63% et pas 50%.

2. **Faux.** Le sirop le plus « sucré au goût fraise » est celui dont la proportion de sirop est la plus grande. Dans le premier mélange, la proportion de sirop est de
$$\frac{7}{7+13} = \frac{7}{20}\,.$$
Dans le deuxième mélange, la proportion de sirop est de
$$\frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}\,.$$
Il s'agit donc de savoir quel est le nombre le plus grand entre $7/20$ et $5/14$. Pour cela, on peut réduire au même dénominateur : par exemple, on obtient alors
$$\frac{7\times 14}{20\times 14} = \frac{98}{20\times 14} \qquad \text{et} \qquad \frac{5\times 20}{14\times 20} = \frac{100}{14\times 20}$$
Ainsi le sirop le plus sucré est le deuxième.
Remarques. Il est inutile de perdre du temps à calculer le dénominateur 20×14. Par ailleurs, on aurait pu choisir un dénominateur commun plus petit : le ppcm de 14 et 20 qui est $4 \times 5 \times 7$, on aurait alors eu à comparer les numérateurs $7 \times 7 = 49$ et $5 \times 10 = 50$.

3. **Vrai.** La probabilité d'obtenir un nombre impair est la somme des probabilités d'obtenir 1,3 et 5 c'est-à-dire $1/4 + 2p$. La probabilité d'obtenir un nombre pair est la somme des probabilités d'obtenir 2 et 4 c'est-à-dire $3/8 + p$. Il s'agit donc à présent de déterminer p pour savoir si l'égalité $1/4 + 2p = 3/8 + p$ est vérifiée.
Pour déterminer p, on utilise le fait suivant : la boule tombe toujours sur l'une des 5 cases et ainsi, la somme des probabilités de faire 1,2,3,4 ou 5 est 1. Ainsi p est solution de l'équation
$$1/4 + 3/8 + 3p = 1$$
c'est-à-dire $$5/8 + 3p = 1 \quad \text{ou encore} \quad 3p = 1 - 5/8 = 3/8\,.$$
Ainsi $p = 1/8$. Finalement, $1/4 + 2p = 1/4 + 2/8 = 1/2$ et $3/8 + p = 4/8 = 1/2$ et on a bien l'égalité souhaitée.

4. **Vrai.** Appelons n le plus petit des deux entiers. L'autre entier est alors le suivant c'est-à-dire $n + 1$. La différence entre le carré de $n + 1$ et celui de n est alors $(n + 1)^2 - n^2$ qu'on peut écrire autrement : soit en développant $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, soit en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et obtenir $(n + 1 - n)(n + 1 + n)$. On obtient ainsi $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$.
Par ailleurs, la somme de n et $n + 1$ est $n + n + 1 = 2n + 1$. On a bien l'égalité.

5. **Vrai.** La nouvelle arête a pour taille $a + 10/100a = 1,1a$. Le volume du nouveau cube est alors $(1,1a)^3 = 1,331a^3 = a^3 + 331/1000a^3$. Comme le volume du cube de départ est a^3, on a bien une augmentation du volume de $33,1\%$.

6. **Vrai.** 95 rotations prennent 7 jours c'est-à-dire $7 \times 24 = 168$h. Une rotation prend donc 95 fois moins de temps c'est-à-dire $168/95$h. Or $95 \times 2 = 190 > 168$. Ainsi, le temps d'une rotation est donc bien inférieur à 2h.

7. Vrai. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OHC rectangle en H. On a donc $\mathrm{OC}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{CH}^2$. Or OC est le rayon du demi-cercle et donc $\mathrm{OC} = \mathrm{AB}/2 = n/2$. Par ailleurs, $\mathrm{OH} = \mathrm{OA} - \mathrm{OH} = n/2 - 1$. On a donc

$$\mathrm{CH}^2 = \mathrm{OC}^2 - \mathrm{OH}^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 = \frac{n^2}{4} - \left(\frac{n^2}{4} - n + 1\right) = n - 1\,.$$

Appliquons maintenant le théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H. On a

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{AH}^2 = n - 1 + 1^2 = n - 1 + 1 = n$$

et donc
$$\mathrm{AC} = \sqrt{n}\,.$$

Questions-remarques. Dans notre raisonnement, nous avons implicitement utilisé le fait que $n > 2$. Où ça ? Le résultat est-il vrai si $n \leqslant 2$?

Exercice 2 — Arithmétique.

1. On a $1001 = 11 \times 91 + 0 = 11 \times 91$.

2. On a $\mathrm{W} = 1000m + 100c + 10d + u = 1001m - m + 99c + c + 11d - d + u$. En réarrangeant les termes, on obtient $\mathrm{W} = 1001m + 99c + 11d - m + c - d + u$

3a. On a $\mathrm{W} = 11 * (91m + 9c + d) - m + c - d + u$. Ainsi, si W est divisible par 11, on peut écrire $\mathrm{W} = 11k$ et donc $-m + c - d + u = 11(k - 91m - 9c - d)$ est divisible par 11.

Réciproquement si $-m + c - d + u$ est divisible par 11, on peut écrire $-m + c - d + u = 11\ell$ et donc $\mathrm{W} = 11 \times (91m + 9c + d + \ell)$ est divisible par 11.

Ainsi W est divisible par 11 si et seulement si $-m + c - d + u$ l'est.

3b. Les nombres cherchés possèdent 38 centaines, il s'écrivent donc sous la forme $(38du)_{10}$. On veut donc avoir $-3 + 8 - d + u = 5 - d + u$ qui doit être un multiple de 11. On peut prendre par exemple $d = 5$ et $u = 0$ ou $d = 0$ et $u = 6$ ou encore $d = 2$ et $u = 8$. On obtient ainsi les nombres 3850, 3806 et 3828.

4a. Les nombres à quatre chiffres sont compris entre 1000 et 9999. Le plus petit multiple de 11 à 4 chiffres est $1001 = 91 \times 11$ comme on a vu à la question **1**. Par ailleurs, on a $9999 = 11 * 909$. Ainsi, les multiples de 11 à quatre chiffres sont les $11k$ pour $91 \leqslant k \leqslant 909$. Il y en a donc $909 - 91 + 1 = 819$.

4b. Il y a 9000 nombres à quatre chiffres (9 choix pour le premier chiffre (celui des milliers ne peut pas être un 0 puis 10 choix pour les deuxième, troisième et quatrième chiffres).

La probabilité d'avoir un multiple de 11 parmi les nombres à quatre chiffres est donc de $819/9000 = 91/1000 = 0,091$.

Remarque. 0,091 est presque égal à 1/11 et ce n'est pas étonnant car il est naturel de penser qu'un nombre sur 11 est un multiple de 11. La différence provient des valeurs extrêmes : si on avait considérer les nombres entre 1002 et 9999 alors, on aurait trouvé le résultat souhaité.

5a. On a $(abmcdu)_{10} = 100000a + 10000b + 1000m + 100c + 10d + u = 100001a + 9999b + 1001m + 99c + 11 - a + b - m + c - d + u$. Or $9999 = 11 * 909$ et $100001 = 9091 * 11$. Ainsi, par le même raisonnement qu'à la question **3**, $(abmcdu)_{10}$ est un multiple de 11 si et seulement si $-a + b - m + c - d + u$ est un multiple de 11.

5b. On a $\mathrm{Z} = 124520000000$. Mais si 124520 est un multiple de 11 alors Z qui est un multiple de 124520 sera aussi un multiple de 11. On applique alors le critère : on calcule $-1 + 2 - 4 + 5 - 2 = 0$ qui est bien un multiple de 11.

Exercice 3 — Géométrie dans l'espace.

1a. On se place dans le triangle SEF, la théorie de la droite des milieux assure que (IL)//(SF). De même, dans le triangle SFG, la théorie de la droite des milieux assure que (JK)//(SF). Ainsi (IL)//(JK).

1b. Par un raisonnement analogue à celui de la question **a**, on obtient que (LK)//(EG) (droite des milieux dans le triangle EFG) et (IJ)//(EG) (droite des milieux dans le triangle SEG). Ainsi (LK)//(IJ). Le quadrilatère IJKL a donc ses côtés opposés deux à deux parallèles, c'est donc un parallélogramme.

2 Toujours avec la droite des milieux, on a IL = JK = SF/2 et IJ = KL = EG/2. Ainsi comme SF = EG, on en déduit que IJKL a ses quatre côtés de la même longueur. C'est donc un losange.

Remarque. Inversement, si IJKL est un losange, on a SF/2 = IL = IJ = EG/2 et donc SF = EG.

3 La droite (SF) est orthogonale au plan (EFG). Comme (JK) est parallèle à (SF), elle est aussi orthogonale au plan (EFG). La droite (JK) est donc perpendiculaire à toute droite de ce plan ; en particulier à la droite (KL). Le quadrilatère IJKL est donc un parallélogramme (question **1b**) avec un angle droit c'est-à-dire un rectangle.

4a. La théorie de la droite des milieux dans le triangle SEG assure que (IM) est parallèle à (SG) et que (JM) est parallèle à (SI). Ainsi le quadrilatère SIMJ est un parallélogramme puisqu'il a ses côtés opposés deux à deux parallèles. Pour qu'un parallélogramme soit un losange, il suffit (et il le faut aussi d'ailleurs) qu'il ait deux côtés consécutifs de même longueur. Ainsi SIMJ est un losange si SI = SJ. Or SI = SE/2 et SJ = SF/2 et donc SIMJ est un losange si SEG est un triangle isocèle en S.

4b. On a vu que SIMJ est un parallélogramme. Pour qu'un parallélogramme soit un rectangle, il suffit (et il le faut aussi d'ailleurs) qu'il ait un angle droit. Pour que SIMJ soit un rectangle, il suffit donc que l'angle $\widehat{\mathrm{ISJ}}$ soit droit ou encore que le triangle SEG soit rectangle en S.

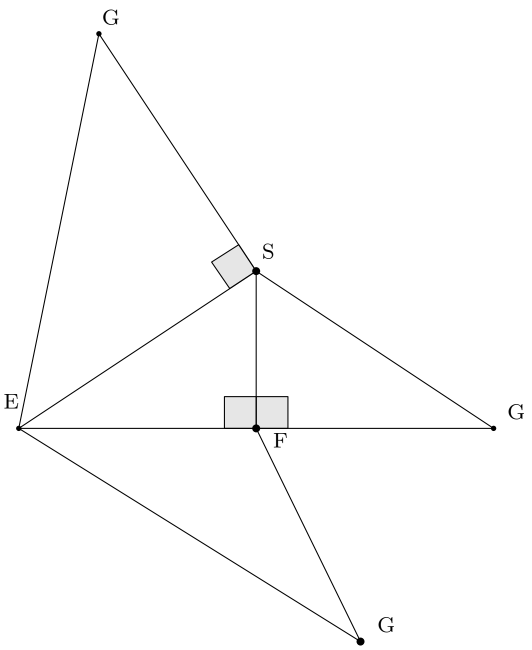
5. Si SIMJ est un carré alors c'est en même temps un losange et un rectangle et donc SEG est un triangle rectangle isocèle en S. Par ailleurs, IJKL est un rectangle donc la droite (SF) est perpendiculaire au plan (EFG) et donc à toute droite de ce plan : en particulier (FG) et (FE). Les triangles SFE et SFG sont donc rectangles en F. De plus, on a SE = SG puisque SEG est un triangle isocèle.

On découpe maintenant le tétraèdre suivant les arêtes GE, GF et GS. Pour tracer le patron, on commence par tracer le triangle SEF rectangle en F.

Traçons ensuite le triangle SGF qui est rectangle en F. On prolonge donc la droite (EF) et on place G sur cette droite. Mais G ne doit pas être n'importe où : on doit avoir SG = SE et donc S est sur la médiatrice de [EG]. Ainsi la perpendiculaire à (EG) passant par S est la médiatrice de [EG]. Comme SF est perpendiculaire à (EG), on en déduit que F est le milieu de [EG]. On place donc le point G de telle façon que F soit le milieu de [EG] ; par exemple, en reportant la longueur EF prélevée au compas à partir de F.

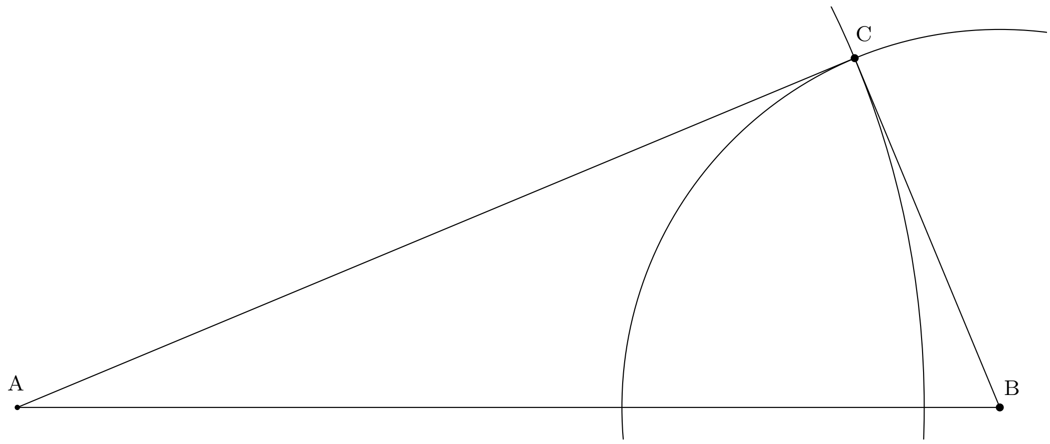
Traçons ensuite le triangle SGE. Il est rectangle isocèle en S. On trace donc la perpendiculaire à (SE) passant par S et sur cette perpendiculaire, on reporte la longueur SE pour obtenir le point G.

Il reste ensuite à tracer le triangle EFG. Pour cela, on place la troisième version du point G, à l'intersection des cercles de centre E et de rayon EG et de centre F et de rayon FG. On obtient la figure suivante.

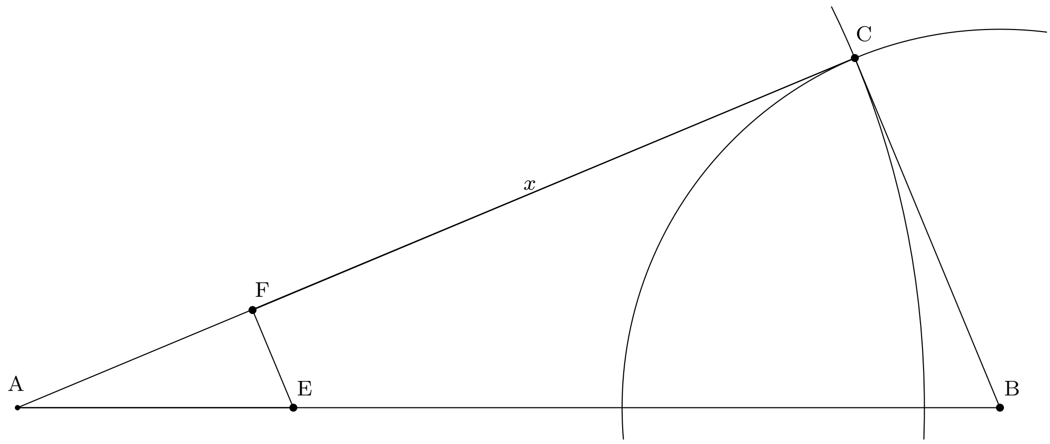


Exercice 4 – Géométrie dans le plan.

1. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle en C : on a $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Finalement, $BC^2 = 169 - 144 = 25$ et donc $BC = 5$.
2. On trace une droite et on place le point A sur cette droite. À l'aide du gabarit, on reporte 6cm puis 7cm sur cette droite à partir de A. On obtient ainsi le point B à 13cm de A. Par ailleurs, en juxtaposant deux fois la longueur 6cm, on obtient ainsi un gabarit pour la longueur 12cm. On trace alors le cercle de centre A et de rayon 12cm. En superposant, le gabarit de 6cm à celui de 7cm, on obtient un gabarit de 1cm. En superposant ce gabarit de 1cm à celui de 6cm, on obtient un gabarit de 5cm. On trace alors le cercle de centre B et de rayon 5cm. On appelle C l'un des points d'intersection des deux cercles.



Remarques. On aurait pu effectuer la construction d'une autre façon. On trace AB comme ci-dessus puis on trace le milieu de [AB] (en traçant la médiatrice de [AB]) puis le cercle de diamètre [AB]. Ensuite, à l'aide du gabarit de 12cm construit comme ci-dessus, on trace le cercle de centre A de rayon 12cm. On appelle C l'un des points d'intersection des deux cercles.

3. 

4. On a AF = AC − CF = $12 - x$. Par ailleurs, on est dans la configuration de Thalès, on a donc

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}$$

et donc $$\mathrm{AE} = \mathrm{AB} \times \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \times \mathrm{AF} = \frac{13}{12}(12 - x) = 13 - \frac{13x}{12}$$

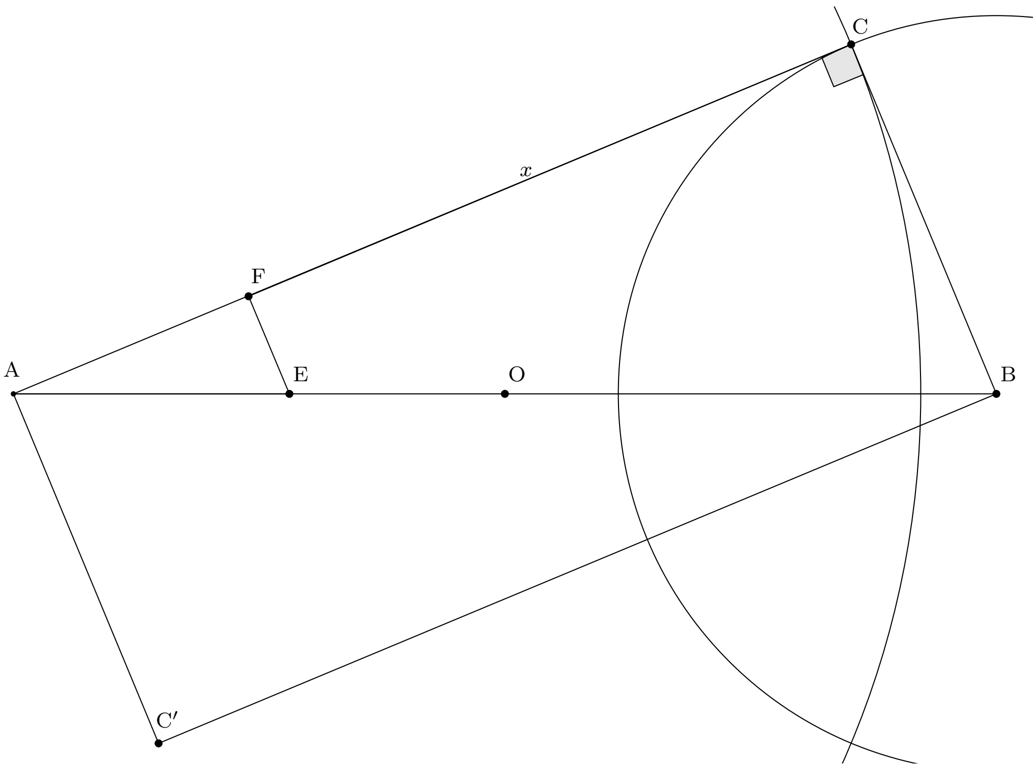
Pour EB, on a $\mathrm{EB} = \mathrm{AC} - \mathrm{AE} = \dfrac{13x}{12}$. Enfin pour EF, on utilise encore le théorème de Thalès pour obtenir

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}}$$

et donc $$\mathrm{EF} = \mathrm{BC} \times \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \times \mathrm{AF} = \frac{5}{12}(12 - x) = 5 - \frac{5x}{12}$$

5. On veut que CF soit égal au diamètre (2 fois le rayon) du cercle (C1) c'est-à-dire CF = AF. Ceci se produit lorsque F est le milieu de [AC] et dans ce cas, E est le milieu de [AB] (droite des milieux puisque (EF) est parallèle à (BC)).

6a. Comme O est le milieu de [AB] et [CC′], les diagonales du quadrilatère AC′BC se coupent en leur milieu. Ainsi AC′BC est donc un parallélogramme. Par ailleurs, l'angle $\widehat{\mathrm{C}}$ est droit et un parallélogramme avec un angle droit est un rectangle. Ainsi AC′BC est un rectangle de largeur 5cm et de longueur 12cm.



6b. Lorsque $x = 6$cm, F est le milieu de [AC] et E = O est celui de [AB]. On note H le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par E. La figure CFOH est alors la réduction par un facteur 2 du rectangle AC′BC et c'est donc un rectangle dont l'aire est 1/4 de celle de AC′BC. De plus l'aire de EBH est la même que celle de OHC (ils sont symétriques par rapport à (HE)) et vaut la moitié de celle de EHCF. Ainsi l'aire de EFBC est égale à l'aire de EHB plus l'aire de FCHE c'est-à-dire 3/2Aire(FCHE) = 3/8Aire(ACBC′). Le rapport cherché est donc égal à 3/8.