Les (ENSEMBLES de) NOMBRES.

A. Du côté des MATHEMATIQUES : éléments de repères théoriques :

Dans ses travaux, A. BRONNER (*Université de Montpellier*), développe trois points de vue caractérisant ***le concept de NOMBRE***. De façon très schématique, il a mis en évidence les trois approches ou points de vue suivants.

- Le point de vue **NUMERICIEN** :

C'est essentiellement celui du ***calcul*** et des ***opérations***. C'est l'aspect le plus **visible** et le plus **déclaré** pour un élève : un nombre est d'abord un « objet » avec lequel on compte et on fait des calculs.

Commentaire : on va donc (très rapidement) « définir » et caractériser les opérations « habituelles » dans les ensembles de nombres au programme du primaire, c'est à dire, les nombres entiers naturels, les nombres décimaux positifs et certains nombres rationnels positifs.

- Le point de vue **ALGEBRIQUE** :

Dans une optique universitaire, les constructions successives des différents concepts de nombres s'effectuent selon un ***principe de permanence***. Pour résumer la problématique du principe de permanence, on peut dire que, à partir d'un ensemble de nombres connus, au sein duquel on « connaît » aussi de « bonnes » opérations ; les insuffisances marquées par des problèmes non résolus amènent à se poser la question de « l'extension » de cet ensemble par l'apparition et l'introduction de « nouveaux » nombres et par l'apparition de nouvelles opérations « prolongeant » les anciennes, tout en conservant leurs propriétés intrinsèques.

C'est le point de vue qui est choisi, dans ce « cours », pour essayer de « définir » et caractériser les différents ensembles de nombres. (*Même si c'est très incomplet d'un point de vue formel !*)

*Commentaire : cet aspect est important du point de vue des apprentissages (c'est à dire du côté des élèves) : il met en valeur et développe le rôle central du « **problème** ». En effet, les « activités » ou les « situations-problèmes » mises en place par le professeur doivent légitimer les « extensions » et faire fonctionner les nouveaux nombres comme les nouveaux outils pertinents de résolution de ces problèmes.*

Par exemple, l'introduction des nombres décimaux au primaire doit respecter un tel caractère fonctionnel pour éviter « l'écueil » du recours au formalisme à partir de trop de travaux et d'exercices sur les écritures au détriment de la recherche du sens.

- Le point de vue de la **MESURE** :

Il s'agit ici du ***repérage*** et de la ***mesure des grandeurs*** dans lesquels les nombres jouent un rôle historiquement important. Les travaux de nature géométrique participent à la légitimation des « extensions » successives des ensembles de nombres, en renforçant la dimension fonctionnelle de l'étude des nombres.

*Commentaire : le (petit) livre de Denis. GUEDJ, « **L'empire des nombres** », aux éditions Découvertes Gallimard, illustre ces différents points de vue, en y apportant d'autres dimensions, ainsi que des éclairages historiques et des réflexions de nature plus épistémologiques et philosophiques. A lire… Evidemment, il y en a beaucoup d'autres !*

Le tableau ci-dessous <u>présente</u> donc les différents ensembles de nombres et leurs premières caractérisations ***naïves*** à partir d'une problématique de nature algébrique.

ENSEMBLES de NOMBRES :	**Une « EBAUCHE très naïve » de « CONSTRUCTION »,** **Quelques COMMENTAIRES et REPERES HISTORIQUES** :
<u>**Les nombres entiers naturels**</u> : ce sont les nombres entiers positifs. L'ensemble de ces nombres se note : $\mathbb{N}$. $\boxed{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, (n + 1), \ldots\}}$	Ces nombres sont les ***multiples*** de l'unité 1. Les équations de la forme suivante, avec **a** et **b** éléments de $\mathbb{N}$: • $\mathbf{a} \pm x = \mathbf{b}$, • $\mathbf{a} \times x = \mathbf{b}$ n'ont pas « toujours » de solution dans $\mathbb{N}$. En effet, la *somme* et le *produit* de deux nombres entiers naturels sont des nombres entiers naturels. Par contre, la *différence* de deux nombres entiers naturels n'est pas nécessairement un nombre entier naturel, <u>*exemple*,</u> le nombre (31 – 54) n'est pas un entier naturel.
<u>**Les nombres entiers relatifs**</u> : ce sont les nombres entiers positifs et les nombres entiers négatifs. L'ensemble de ces nombres se note : $\mathbb{Z}$. $\boxed{\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}}$. L'***ARITHMETIQUE*** est la branche des mathématiques qui étudie les nombres entiers (naturels et relatifs).	Dans $\mathbb{Z}$, toutes les équations de la forme $\mathbf{a} \pm x = \mathbf{b}$ admettent une et une seule solution qui est : $\mathbf{b} \pm \mathbf{a}$. (ce qui signifie : <u>***toutes les soustractions sont « possibles » dans $\mathbb{Z}$***</u>). L'ensemble $\mathbb{Z}$ contient l'ensemble $\mathbb{N}$, *notation* : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. La *somme*, la *différence* ou le *produit* de deux entiers relatifs est un entier relatif. Ce n'est pas toujours le cas pour un *quotient*. <u>Exemple</u> : le *quotient* de 7 par 4, écrit $\frac{7}{4}$ sous forme fractionnaire, n'est pas un entier relatif ; en effet, $\frac{7}{4}$ = 175/100 = 1,75 ; 1,75 $\notin \mathbb{Z}$. *Il faut donc « poursuivre » et construire alors un ensemble de nombres où toutes les équations de la forme* $\mathbf{a} \times x = \mathbf{b}$ *admettent une solution, avec* **a** *et* **b** *éléments de* $\mathbb{Z}$.
<u>**Les nombres rationnels**</u> : ce sont les nombres pouvant s'écrire $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$ sous forme fractionnaire (où **a** et **b** désignent des entiers relatifs, avec $\mathbf{a} \neq 0$). On peut ainsi dire qu'un nombre rationnel est le quotient de deux nombres relatifs. Il existe plusieurs écritures d'un même nombre rationnel : on l'utilise souvent écrit sous la forme d'une <u>**fraction irréductible**</u>. Cet ensemble de nombres se note : $\mathbb{Q}$. $\boxed{\mathbb{Q} = \{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} ; \mathbf{a} \in \mathbb{N}\ (\mathbf{a} \neq 0), \mathbf{b} \in \mathbb{Z}\}}$.	Dans $\mathbb{Q}$, toutes les équations de la forme $\mathbf{a} \times x = \mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \neq 0)$, admettent une et une seule solution qui est : $\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$. (On peut effectuer ***TOUTES*** les divisions de deux nombres entiers naturels ou relatifs). L'<u>usage</u> fait appeler « <u>***fraction***</u> » le quotient de deux nombres entiers. Les <u>**nombres décimaux**</u> sont des nombres rationnels particuliers qui peuvent s'écrire sous la forme <u>***d'un quotient d'un nombre entier par une puissance de dix***</u>. <u>Exemple</u> : le nombre $\frac{7}{4}$ est un nombre décimal, en effet, $\frac{7}{4} = 1{,}75 = \frac{175}{100} = 1 + \frac{75}{100}$. On note ID l'ensemble des nombres décimaux. <u>Remarque</u> : l'apparition, mais surtout, l'adoption des **nombres décimaux** datent de la Révolution Française. *Le choix de « notre » système de numération décimal et positionnel est le fruit d'une avancée « révolutionnaire » !* L'ensemble $\mathbb{Q}$ contient ID, $\mathbb{Q}$ contient aussi $\mathbb{Z}$, donc contient $\mathbb{N}$. <u>Notation</u> : $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathrm{ID} \subset \mathbb{Q}}$.

Comment interpréter la suite des inclusions $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}}$.?

(i) Les nombres entiers naturels et les nombres entiers relatifs sont des nombres rationnels. En effet, tout nombre entier ***n*** (naturel ou relatif) peut s'écrire sous la forme $\frac{n}{1}$.

(ii) Les nombres décimaux sont des nombres rationnels. (*Voir ci-dessus*).

(iii) Dans $\mathbb{Q}$, il y a d'autres nombres qui ne sont ni entiers, ni décimaux.

Par exemple, le « nombre » $\frac{22}{7}$; qui est l'écriture fractionnaire du quotient de 22 par 7, solution de l'équation $7 \times x = 22$, n'est pas un nombre décimal. *Une démonstration classique de ce résultat repose sur un « raisonnement par l'absurde », en utilisant des critères de divisibilité*. Pour le calcul du quotient de 22 par 7, la calculatrice affiche : 3,14285714(3). La division « *ne s'arrête pas* », aïe, aïe, en la « continuant », on retrouve « toujours » la suite de chiffres « 142857 » qui se répètent indéfiniment. On appelle cette suite de chiffres une **période**. Le nombre $\frac{22}{7}$ est parfois appelé un ***nombre périodique***.

Pour résumer, un ***nombre rationnel*** est donc :

- soit un ***nombre décimal*** (*parmi lesquels figurent les nombres entiers*).
- soit un ***nombre périodique***.

Ainsi, la ***somme***, la ***différence***, le ***produit*** ou le ***quotient*** de deux nombres rationnels est un nombre rationnel. Cependant, on peut trouver des « manques » ou des « insuffisances » à l'ensemble $\mathbb{Q}$. En travaillant encore avec les équations, on prouve que l'équation $x^2 = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$. Il existe donc des nombres autres que rationnels. Autre exemple, le nombre **pi**, noté Π, n'est pas un nombre rationnel. On « construit » alors l'ensemble $\mathbb{R}$ des **nombres réels**. Hors programme !

La réunion de l'ensemble des **nombres rationnels** et de l'ensemble des **nombres irrationnels** forme l'ensemble des **nombres réels**. Cet ensemble se note $\mathbb{R}$. Un **nombre irrationnel** est un nombre dont le développement décimal est infini et non périodique ; il ne peut donc pas s'écrire comme le quotient de deux entiers. Les exemples les plus « emblématiques » de nombres irrationnels sont $\sqrt{2}$ cos30°, **pi** et $(1 + \sqrt{5})/2$ qui est le *nombre d'or.* En voici un autre : 1,23456789011223344556677889900111… !	L'équation $x^2 = 2$ admet deux solutions opposées dans $\mathbb{R}$: $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Cette phrase s'interprète comme le fait qu'il existe ***deux*** nombres réels distincts dont le carré est 2. Historiquement, les mathématiciens grecs ont essayé d'exprimer la longueur $\sqrt{2}$ de la diagonale d'un carré de côté 1 comme quotient de deux entiers : ce qu'ils ont établi, c'est qu'il y avait impossibilité de le faire ! En fait, l'ensemble $\mathbb{R}$ est constitué tous les nombres usuels connus : $\mathbb{R}$ contient tous les autres ensembles de nombres. Notation : $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$.

Pour aller plus loin.

- L'équation $x^2 = -1$ admet-elle une ou des solutions dans $\mathbb{R}$? **NON** ! Le principe de permanence impose de ***construire*** un ensemble de nombres contenant les solutions des équations de ce type. Cet ensemble s'appelle l'ensemble des **nombres complexes** et se note $\mathbb{C}$. Hors programme !

- Le nombre **pi** est irrationnel : dans le cadre scolaire, on exécute des calculs avec ce nombre, uniquement avec des *valeurs décimales approchées* ; rarement avec des *approximations rationnelles*, comme par exemple : $\frac{22}{7}$. Le nombre 3,14 est la valeur décimale arrondie au centième de **pi** connue de tout le monde. La calculatrice offre, à la précision voulue, d'autres valeurs décimales approchées de **pi**.

Dernier petit-petit point théorique : un mot sur la **notion d'ordre** dans les (*ensembles de*) nombres.

La relation (*verbale*) « ***est inférieur ou égal à*** » définit un *ORDRE TOTAL* sur les ensembles de nombres mentionnés pages précédentes.

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux nombres quelconques, on a : $\boxed{\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y} \text{ si et seulement si } (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \leq 0}$

Qu'est-ce que ça veut dire ? La réponse n'est pas aussi anodine que cela laisse paraître d'un point de vue mathématique ; mais, à notre niveau, on va se « contenter » de ce qui suit :

Quels que soient deux nombres, entiers, décimaux, rationnels, (réels), on peut les *COMPARER*, c'est-à-dire, répondre à la question : « ***lequel des deux nombres est inférieur ou égal à l'autre ?*** ». Suite à cette activité de ***comparaison***, on peut se lancer dans des activités de ***rangement***. Cf. les ***TD***…

B. Quelques exercices, *faciles*, et « emblématiques CRPE » en vrac.

1. On considère le nombre **W** = 35710/10000. Donner d'autres écritures de **W**.

2. Un petit problème d'héritage. Quatre personnes se partagent une somme $\boldsymbol{S}$ de la manière suivante :

- La première personne reçoit la moitié de $\boldsymbol{S}$, moins 15 000 euros ;
- La deuxième personne reçoit le tiers de $\boldsymbol{S}$, moins 5 000 euros ;
- La troisième personne reçoit exactement le quart de $\boldsymbol{S}$;
- Enfin, la quatrième personne reçoit 3 000 euros, plus le cinquième de $\boldsymbol{S}$.

Quelle somme perçoit chaque personne ?

3. On considère le nombre **P** = 137,834.

- Donner le chiffre des dixièmes de **P** et le nombre de dixièmes de **P**. Justifier…
- Donner le chiffre des dizaines de **P** et le nombre de dizaines de **P**. Justifier…

4. Une détermination « technique » du nombre de diviseurs d'un nombre entier naturel $\boldsymbol{n}$.

Pour déterminer ce nombre, on applique l'algorithme suivant :

(i) Décomposer $\boldsymbol{n}$ en un produit de facteurs premiers (On dit aussi : factoriser $\boldsymbol{n}$).

(ii) Utiliser la formule : **SI** (*par exemple*, $\boldsymbol{n} = 2^p \times 3^q \times 7^t$) ; **ALORS** (le nombre de diviseurs de $\boldsymbol{n}$ est égal à : $(\boldsymbol{p} + 1) \times (\boldsymbol{q} + 1) \times (\boldsymbol{t} + 1)$).

(Note de ***PW*** : ce théorème est admis, il se démontre au lycée, en classes terminales).

Déterminer le nombre de diviseurs de 172, de 408, de 2016.

Vérifier par une technique plus empirique (« *les diviseurs qui montent et les diviseurs qui descendent* », comme celle proposée en ***TD***).

Ces exercices ne sont pas corrigés, ils sont faciles ; cependant, en cas de difficultés persistantes et récurrentes, demander à ***PW*** !

Nouveauté 2016 : des pistes de correction page suivante, yes !

Bon, ***PW*** cède à la pression !
Quelques éléments de correction des « *petits* » exercices de la page précédente

1. Différentes écritures de **W** = 35710/10000.

Des écritures, en vrac. **W** = 3571~~0~~/1000~~0~~ = 3571/1000 = 3,571 = 3 + 571/1000 = 3 + 5/10 + 7/100 + 1/1000 = 3 + 0,571 = 4 – 0,429 (pas mal…) = …

2. L'héritage. Solution modélisée, mais on peut y arriver autrement, par des procédures de type « essais – erreurs – ajustements », même si c'est un peu long !

On a l'égalité : ***S*** = (***S***/2 – 15000) + (***S***/3 – 5000) + ***S***/4 + (***S***/5 + 3000). On met les « ***S*** » avec les « ***S*** » et tout le tralala. D'où : ***S*** – ***S***/2 – ***S***/3 – ***S***/4 – ***S***/5 = – 15000 – 5000 + 3000 = – 17000.
On met au même dénominateur le membre de gauche : (écrire le calcul avec 60 comme DC), on obtient : – 17***S***/60 = – 17000, d'où ***S*** = (17000 × 60)/17 = 60000. <u>*Attention*</u> : il faut vérifier que cette valeur convient !

3. Tâche redoutable pour les élèves et aussi pour un M1 du Master Meef PE !

On **P** = 137,834 = 137834/1000 = 137 + 834/1000 = (pleins d'autres écritures désignatives…)

- ***CHIFFRE*** des « … » renvoie au rang du chiffre dans le nombre « décomposé » canoniquement :

137,834 = 1 × 100 + 3 × 10 + 7 × 1 + 8 × 1/10 + 3/100 + 4/1000. D'où les réponses : chiffre des dizaines : 3 et chiffre des dixièmes : 8. Item souvent réussi, sans trop savoir pourquoi, on décompose ou <u>pire</u>, on écrit dans le tableau de numération et le chiffre écrit dans la bonne case donne la réponse.

- L'affaire est toute autre si on s'intéresse à ***NOMBRE*** de « … » qui renvoie à la quantité de « … », ou au nombre de paquets de « … » dans le nombre et dans ce cas, on s'intéresse à d'autres décompositions que la canonique ! Il faut la trouver… Cf. ci-dessous

Puisque 137,834 = 13 × 10 + 7,834, le nombre de dizaines de 137,834 est donc égal à 13.
Idem, puisque 137,834 = 1378 × 1/10 + 0,034, le nombre de dixièmes de 137,834 est donc égal à 1378. Item assez peu réussi jusque tard dans la scolarité (*collège : aïe, aïe, aïe !*)…

4. Cf. le fichier sur les nombres et le calcul déposé sur CELENE, avec les corrigés.

Pour les ceusses qui veulent une piste de preuve ou de démonstration pour l'affaire de la détermination de la quantité de diviseurs, à partir de la décomposition en produit de nombres premiers par l'utilisation de la formule liant les (exposants +1), contacter ***PW***.