

**OPERATIONS sur les ENSEMBLES de NOMBRES du PROGRAMME.****Du COTE des MATHEMATIQUES :****1) OPERATIONS dans l'ENSEMBLE  $\mathbb{N}$  des NOMBRES ENTIERS NATURELS :**

➤ Pour définir l'**addition** de deux nombres naturels, il faut d'abord donner une définition de la **somme** de deux nombres naturels. En liaison avec les constructions possibles de  $\mathbb{N}$ , (*très sommairement*) exposées dans le *CM 1*, on dispose alors de deux entrées pour définir la somme de deux nombres entiers naturels :

(i) en supposant connue la suite ordonnée des naturels, la somme  $a + b$  est alors égale au nombre atteint en comptant  $b$  nombres après  $a$ . (*Aspect ordinal*).

Exemple : calculer la somme  $11 + 4$ . On écrit la suite ordonnée des nombres entiers naturels :  
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, ...

1, 2, 3, 4 ; donc  $11 + 4 = 15$  (*lecture sur la première ligne*).

(ii) on peut aussi définir la somme  $a + b$  à partir de considérations de nature ensembliste. (*Aspect cardinal*). Voir *CM n°(1)*, § A : quelques mots sur l'ensemble  $\mathbb{N}$ .

**DEFINITION (1) : l'addition dans  $\mathbb{N}$  est l'opération**, qui à deux nombres entiers naturels quelconques, associe leur **somme**.

Notation et vocabulaire :  $a$  et  $b$  éléments de  $\mathbb{N}$ ,  $a$  et  $b$  s'appellent les **termes** de la **somme**  $s$ , où  $s$  désigne **la somme « calculée »**, on écrit :  $a + b = s$ .

➤ Pour définir la **soustraction** de deux nombres entiers naturels, on procède de façon analogue, en cherchant à définir la **différence** de deux entiers naturels. En cohérence avec le chapitre précédent, on peut définir la différence  $a - b$  à partir de l'addition. En supposant  $a \geq b$ , la différence  $a - b$  est l'unique solution de l'équation  $b + x = a$ .

**DEFINITION (2) : la soustraction dans  $\mathbb{N}$  est l'opération**, qui à deux nombres entiers naturels « choisis », associe leur **différence**. (*Opération pas toujours possible dans  $\mathbb{N}$* ).

Notation et vocabulaire :  $a$  et  $b$  éléments de  $\mathbb{N}$ , avec  $a \geq b$ ,  $a$  s'appelle le **premier terme** et  $b$  le **deuxième terme** de la **différence**  $d$ , où  $d$  désigne ici **la différence « calculée »**, on écrit :  $a - b = d$ .

Remarque : ces deux définitions mettent en évidence un lien « fonctionnel » entre addition et soustraction. En effet, dès qu'on se donne une addition, on peut lui associer deux soustractions et dès qu'on se donne une soustraction, on peut lui associer une autre soustraction et une addition. Ces « associations » peuvent se schématiser ainsi (en reprenant les notations ci-dessus) :

$a + b = s$	
$s - a = b$	$s - b = a$

➤ **Propriétés de l'addition et de la soustraction dans  $\mathbb{N}$  :**

(Les propriétés sont simplement énoncées et admises : elles se démontrent. Elles permettent aussi et surtout de justifier et de légitimer les techniques opératoires !).

Pour effectuer des calculs, on applique, en acte, des propriétés caractérisant ces opérations.

- L'addition dans  $\mathbb{N}$  est une opération commutative. Quels que soient les naturels  $a$  et  $b$ , on a l'égalité :  $a + b = b + a$ . (La soustraction dans  $\mathbb{N}$  n'est pas commutative).
- L'addition dans  $\mathbb{N}$  est une opération associative. Quels que soient les naturels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on a l'égalité :  $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ . (La soustraction dans  $\mathbb{N}$  n'est pas associative).
- Le nombre **0** est l'élément neutre pour l'addition dans  $\mathbb{N}$ . Pour tout naturel  $a$ , on a les égalités :  $a + 0 = 0 + a = a$ . (Il n'y a pas d'élément neutre pour la soustraction).

D'autres propriétés existent pour ces opérations : voir les ouvrages référencés en bibliographie.

➤ Tout comme pour l'**addition**, il convient d'expliciter ce qu'est le **produit** de deux nombres entiers naturels afin de définir la **multiplication**. Ici aussi, on dispose de plusieurs entrées.

(i) A partir de l'addition : le produit du naturel  $a$  par le naturel  $b$  est égal à la somme de  $b$  naturels égaux à  $a$ . (Le **produit** est défini comme une **somme itérée**).

Notation :  $a \times b = a + a + a + \dots + a + a$  (avec  $b$  termes égaux à  $a$ ).

(ii) Comme pour la somme, on peut définir le produit de deux nombres entiers naturels avec des connaissances sur les notions ensemblistes.

**DEFINITION (3) : la multiplication** dans  $\mathcal{M}$  est l'**opération**, qui à deux nombres entiers naturels quelconques, associe leur **produit**.

Notation et vocabulaire :  $a$  et  $b$  éléments de  $\mathcal{M}$ ,  $a$  et  $b$  s'appellent les **facteurs** du **produit**  $p$ , où  $p$  désigne ici le **produit « calculé »**, on écrit :  $a \times b = p$ .

➤ **Propriétés de la multiplication dans  $\mathcal{M}$  :**

(Les propriétés sont simplement énoncées et admises : elles se démontrent).

Pour effectuer des calculs, on applique, en acte, des propriétés caractérisant cette opération.

- La multiplication dans  $\mathcal{M}$  est une opération commutative. Quels que soient les naturels  $a$  et  $b$ , on a l'égalité :  $a \times b = b \times a$ .
- La multiplication dans  $\mathcal{M}$  est une opération associative. Quels que soient les naturels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on a l'égalité :  $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ . (On peut alors écrire  $a \times b \times c$  ou  $abc$ , avec les conventions usuelles de simplification d'écritures).
- Le nombre **1** est l'élément neutre de la multiplication dans  $\mathcal{M}$ . Le nombre **0** est l'élément absorbant de la multiplication dans  $\mathcal{M}$ .

Pour tout naturel  $a$ , on a les égalités :  $a \times 1 = 1 \times a = a$  et  $a \times 0 = 0 \times a = 0$ .

- Une propriété fondamentale : la **distributivité de la multiplication par rapport à l'addition**.

Quels que soient les naturels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on a les égalités :

$$a \times (b \pm c) = (a \times b) \pm (a \times c) ;$$

avec les conventions de simplifications d'écritures, on écrit alors :  $a(b \pm c) = ab \pm ac$ .

On utilise cette propriété dans le domaine numéral, où on peut simplifier des algorithmes de calcul, en transformant des produits partiels en sommes et réciproquement (calcul mental, calcul « réfléchi », ...). De même, dans le domaine littéral, le membre de gauche de l'égalité représente un **produit** qu'on peut (éventuellement) **développer**, alors que le membre de droite est une **somme** qu'on peut donc (éventuellement) **factoriser**.

De plus, cette propriété se « généralise » et permet d'établir d'autres résultats importants :

- 1) la propriété dite de « **double distributivité** » propriété dite de « **distributivité répétée** » :

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d.$$

- 2) les « **identités remarquables** » :  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$  et  $(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$ .

➤ En ce qui concerne la **division**, à notre niveau, on peut dire qu'il existe plusieurs « sortes » de divisions. Comme pour les autres opérations, il convient tout d'abord de définir la notion de **quotient**.

- La division euclidienne dans  $\mathcal{M}$ .
- La division dans  $\mathcal{Q}$ . Cf. les TD...

2) **« EXTENSIONS » de ces OPERATIONS aux autres ENSEMBLES de NOMBRES :**

En respectant *le principe de permanence* décrit dans le précédent CM, (annexe au CM1) ; on « prolonge » dans les autres ensembles de nombres les opérations définies ci-dessus. Le propos de ce CM n'est pas de redéfinir d'une façon rigoureuse ces opérations dans  $\mathbb{N}$ , dans  $\mathbb{Z}$ , dans  $\mathbb{Q}$ , dans  $\mathbb{R}$ , mais de lister un certain nombre de définitions, de propriétés et de règles de calcul nécessaires et utiles à la préparation aux épreuves du CRPE.

**DEFINITION (4) : division euclidienne dans  $\mathbb{N}$ .**

La **division euclidienne** de deux nombres naturels  $a$  et  $b$ , avec  $b \neq 0$ , est l'opération par laquelle on associe aux nombres  $a$  et  $b$ , un unique nombre  $q$  et un unique nombre  $r$  tels que :

$$a = b \times q + r ; \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

Vocabulaire :  $a$  est le *dividende*,  $b$  est le *diviseur*,  $q$  est le *quotient entier* ou le *quotient euclidien* et  $r$  est le *reste*. En déterminant  $q$ , on situe ainsi le nombre  $a$  entre *deux multiples consécutifs* de  $b$ , ce qu'on peut écrire :  $b \times q \leq a < b \times (q + 1)$ .

**DEFINITIONS (5) : définition d'un élément de  $\mathbb{Q}^+$  comme quotient d'entiers.**

➤ On définit premièrement la notion de **quotient**. Dans ce qui suit, les lettres  $a$  et  $b$  désignent deux nombres entiers.

Le **quotient** du nombre  $b$  par le nombre  $a$ , avec  $a$  différent de zéro, est le nombre unique noté  $q$ , qui multiplié par  $a$  donne  $b$ . Notation : sous forme fractionnaire, on écrit  $q = \frac{b}{a}$  (c'est à dire :  $b = a \times q$ ).

➤ La **division dans  $\mathbb{Q}$**  est l'*opération*, qui à deux nombres, associe leur **quotient**.

Notation et vocabulaire :  $a$  et  $b$  éléments de  $\mathbb{Q}$ , avec  $a \neq 0$  ;  $b$  s'appelle le *dividende* ou par abus de langage le *numérateur*,  $a$  s'appelle le *diviseur* ou par abus de langage le *dénominateur* du **quotient**  $q$ , où  $q$  désigne ici le *quotient « calculé »*, on écrit  $\frac{b}{a} = q$ .

Remarques :

- Le problème générateur du quotient est de nature multiplicative : **calculer le quotient de  $b$  par  $a$  revient à chercher la solution de l'équation  $a \times x = b$  (et réciproquement).**

- On peut assimiler les écritures fractionnaires et les écritures symboliques habituelles «  $\div$  »

ou «  $:$  » ou «  $/$  » de la division, en effet, on a :  $b \div a = \frac{b}{a}$ .

De fait, l'écriture  $\frac{b}{a}$  indique une opération à effectuer, mais dans le même temps elle donne, d'un point de vue formel, la réponse ! **Interprétation délicate en situation d'enseignement !**

- Multiplication et divisions associées.**

On se place dans  $\mathbb{N}$  (on peut étendre ce « lien » aux nombres décimaux). Dès qu'on se donne une multiplication, on peut lui associer deux divisions et dès qu'on se donne une division, on peut lui associer une « autre » division et une multiplication. Ces associations peuvent se schématiser ainsi :

$a \times b = p$	
$p \div a = \frac{p}{a} = b$	$p \div b = \frac{p}{b} = a$

3) **PROPRIETES et REGLES de CALCUL avec les nombres en écriture fractionnaire :**

Dans ce paragraphe, il s'agit d'énumérer (et d'admettre !) les propriétés les plus importantes du **calcul fractionnaire**. Les diviseurs (ou dénominateurs) des écritures fractionnaires sont non nuls.

<b>Exemples :</b>	<b>Règle de calcul ou règle d'action pour calculer :</b>
<p><u>Notion d'inverse</u> : (règles (1) et (2)).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 0,125 et 8 sont deux nombres inverses, en effet : <math>0,125 \times 8 = 1</math>. On a <math>0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}</math>.</li> <li>• 365 et <math>\frac{1}{365}</math> sont deux nombres inverses, en effet : <math>365 \times \frac{1}{365} = 1</math>. Ici, l'inverse de 365 n'est pas un nombre décimal.</li> </ul> <p><u>Produit d'un nombre par un nombre en écriture fractionnaire</u> : (règle (3)).</p> <p>On doit calculer « à la main » <math>\frac{2,2}{3,5} \times 21</math>. En appliquant la règle (3), on a : <math>\frac{2,2}{3,5} \times 21 = \frac{(2,2 \times 21)}{3,5} = 2 \times \frac{21}{3,5}</math>. Un de ces trois calculs est immédiat : <math>\frac{21}{3,5} = 6</math> et <math>2,2 \times 6 = 13,2</math>.</p> <p>Cette règle est très utile dans les calculs comportant des pourcentages, des échelles, des vitesses, ...</p>	<p><b>Règle de calcul ou règle d'action pour calculer :</b></p> <p>(1) : <math>b \times \frac{1}{b} = 1</math>. <math>\frac{1}{b}</math> est l'<i>inverse</i> de <math>b</math> (c'est le nombre, unique, qui multiplié par <math>b</math> donne 1).</p> <p>(2) : <math>\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}</math>.</p> <p>(3) : <math>a \times \frac{b}{c} = \frac{(a \times b)}{c} = \frac{a}{c} \times b</math></p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p><b>Attention</b> : pour toutes les formules, les bonnes « conditions » sur les nombres <math>a, b, c, d</math> et <math>k</math> sont naturellement effectives ! Au fait, quelles conditions ?</p> </div>
<p><u>Quotients égaux et règles de « simplification »</u> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{24}{1,4} = \frac{240}{14} = \frac{120}{7} = \frac{12}{0,7}</math> (= ...).</li> <li>• <math>\frac{5,2}{3} = \frac{5,2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{36,4}{21}</math>.</li> </ul> <p><math>\frac{4,5}{7} = \frac{4,5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{13,5}{21}</math>, en utilisant la règle (4), on a réduit au même dénominateur les nombres <math>\frac{5,2}{3}</math> et <math>\frac{4,5}{7}</math>. C'est plus « facile » pour les opérations !</p>	<p>(4) : <math>\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}</math> et <math>\frac{a}{b} = \frac{a \div m}{b \div m}</math>.</p> <p><b>Zut</b> : il manque l'égalité des produits en croix ! A mettre en forme dans ce tableau.</p>
<p><u>Les opérations ! Effectuer les calculs suivants</u> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{12,3}{49} - \frac{65,4}{343} = ?</math></li> <li>• <math>\frac{47}{23,1} \times \frac{92,4}{141} = ?</math></li> <li>• <math>\frac{58}{6} \div \frac{39}{14} = ?</math> (Simplifier...).</li> </ul>	<p>(5) : <math>\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{(a \pm b)}{c}</math>.</p> <p>(6) : <math>\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}</math>.</p> <p>(7) : <math>\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}</math>.</p>