Quelques éléments d'histoire de la GEOMETRIE.

Avertissement : ce **CM** prend appui sur la bibliographie indiquée page **8** et sur deux documents distribués au cours des précédents **TD** et **CM.** (*Cf. le cours de **PW** sur la plate-forme **CELENE***)**.**

- **Un B. A. – BA en géométrie plane** (« *des mots, des constructions et des questions* »).
- **Géométrie dans le plan** : des définitions et des propriétés des objets usuels de la géométrie plane.

A. Du COTE des MATHEMATIQUES :

Deux DEFINITIONS : *(pas vraiment opératoires, il faut donc faire « plus »)*

- ***Géométrie*** : étude des figures de l'espace. (Dictionnaire du ***PE***, enseignement des mathématiques, de Louis Corrieu, chez Vuibert).
- ***Géométrie*** : 1. Science mathématique qui étudie les relations entre points, droites, courbes, surfaces et volumes de l'espace. 2. … (**D**ictionnaire **E**ncyclopédique **L**arousse).

QUELQUES POINTS de REPERES HISTORIQUES (un survol !) :

Avant d'arriver à une mise en forme aujourd'hui aboutie, ***« la » GEOMETRIE*** s'est développée très tôt dans l'Histoire. Les évolutions de cette science sont constantes et surtout inégales dans le temps. Elles sont liées aux développements des différentes civilisations.

Schématiquement, on peut distinguer cinq grandes périodes de développement de ***« la » GEOMETRIE*** au cours de notre Histoire.

i. Chez les BABYLONIENS et les EGYPTIENS.

« La » GEOMETRIE répond surtout à des problèmes de ***MESURE*** : calculs de longueurs, arpentage, calculs d'aires de champs, calculs de volumes, constructions architecturales, approximations de ***pi***, triplets « pythagoriciens », …

Par exemple, on peut lire dans un papyrus égyptien :

> « ***Pour calculer l'aire d'un quadrilatère (convexe) quelconque, on calcule d'abord les moyennes arithmétiques des longueurs des côtés opposés ; puis on calcule le produit de ces deux moyennes*** ».

Tester cette « formule » ou cet algorithme de calcul après avoir tracé plusieurs quadrilatères et comparer avec les formules actuelles ! Conclusion ?
Observer que plus la figure est « régulière » et sympathique (çàd ressemblant à nos habituels quadrilatères « particuliers »), plus cette formule « marche ».

ii. Chez les GRECS.

« La » GEOMETRIE change de statut. En effet, en plus d'occuper une place importante dans le monde des mathématiques, l'idée de preuve, de justification, de démonstration accompagne et motive les découvertes. A notre niveau, on peut retenir les noms et les importantes contributions de trois grands ***mathématiciens*** de ces époques : **EUCLIDE**, **THALES** et **PYTHAGORE**.

EUCLIDE d'Alexandrie (IIIème siècle avant JC).

On peut le considérer comme le fondateur de la méthode axiomatique. Dans « ***les Eléments*** », il compile une somme des connaissances géométriques de ce temps ; en les augmentant par des travaux personnels et en produisant un certain nombre de démonstrations. (Voir documents joints en *ANNEXE*).

Ainsi, il propose :

Vingt-trois définitions d'objets géométriques

(*Un point est ce qui n'a pas de partie*, *les extrémités d'une « ligne » sont des points*, …).

Cinq notions communes (les ***AXIOMES*** relatifs ***aux grandeurs***).

- ✓ **Les choses qui sont égales à la même chose sont égales entre elles.**
- ✓ **Si des égaux sont ajoutés à des égaux, alors les touts sont égaux.**
- ✓ **Si des égaux sont retranchés d'égaux, alors les restes sont égaux.**
- ✓ **Les choses qui coïncident entre elles sont égales entre elles.**
- ✓ **Le tout est plus grand que la partie.**

Cinq postulats.(« ***Les demandes*** » : ce qu'on demande au lecteur d'accepter).

- ✓ **Etant donnés deux points distincts, il existe une ligne droite passant par ces deux points.**
- ✓ **Tout segment est « prolongeable » en une ligne droite passant par les extrémités de ce segment.**
- ✓ **Décrire un cercle d'un point quelconque et avec une distance quelconque.**
- ✓ **Tous les angles droits sont égaux.**
- ✓ **(*Le cinquième postulat ou postulat des parallèles*) Par un point extérieur à une ligne droite, il passe une et une seule ligne droite parallèle à cette ligne droite.**

THALES de Milet (VIème siècle avant JC).

Il est connu de tous les **collégiens** par un célèbre théorème, mais on sait que c'est **EUCLIDE** qui en a rédigé une démonstration dans son ouvrage : « ***Les Eléments*** ». Dans d'autres pays, le théorème de **THALES** n'est pas celui qui est enseigné au collège en France ! (Voir documents joints en *ANNEXE*).

Pour résumer, on peut dire que l'énoncé direct de ce théorème, tel qu'il est enseigné actuellement au collège, « modélise » ***la proportionnalité en géométrie*** : en effet, sous des conditions de parallélisme, on obtient des égalités de quotients, ce qui nous permet alors de calculer des longueurs. (La « réciproque » ne se manie pas aussi aisément !).
D'autres propriétés mathématiques sont attribuées à ce grand « commerçant – savant ».

PYTHAGORE de Samos (VIième et Vème siècle avant JC).

Ce théorème, dont on possède un nombre important de démonstrations, est aussi connu de tous les **collégiens** des classes de quatrième ! (Voir documents joints en *ANNEXE*).

Pour résumer, on peut dire que ce résultat emblématique « lie » ***perpendicularité et distance***. En effet, sous des conditions de perpendicularité de deux côtés d'un triangle, on obtient une égalité numérique du second degré qui permet de calculer des longueurs et réciproquement.
De même que pour **THALES**, d'autres résultats mathématiques ont été établis par **PYTHAGORE** au sein de son « école ».

Beaucoup d'autres savants contemporains de ces époques ont apporté une contribution au développement de ***« la » GEOMETRIE***. On peut citer et chercher à étudier les résultats produits !

DEMOCRITE, **PLATON**, **APPOLONIUS**, **EUDOXE**, **ARISTOTE**, **ARCHIMEDE**, **ERATHOSTENE**, **NICOMEDE**, **HIPPARQUE**, **PAPPUS**, **PROCLUS**, **HERON**, **MENELAUS**, **PTOLEMEE**, **DIOPHANTE**, …

Enfin, les géomètres grecs ont laissé à leurs successeurs trois grands problèmes emblématiques qu'ils n'ont pu résoudre. (*On peut se reporter à des sites mathématiques « sérieux »*).

(a) ***CONSTRUIRE à la règle et au compas***, un CARRE ayant même aire qu'un DISQUE donné ; ce problème est connu sous le nom de : **la quadrature du cercle**.

(b) ***CONSTRUIRE à la règle et au compas***, deux DEMI-DROITES partageant un ANGLE donné en trois angles égaux ; ce problème est connu sous le nom de : **la trisection de l'angle**.

(c) ***CONSTRUIRE à la règle et au compas***, un CUBE de volume double d'un CUBE donné ; ce problème est connu sous le nom de : **la duplication du cube**.

iii. Chez les Mathématiciens Arabes et en Europe Médiévale.

Les travaux des grecs sont poursuivis et approfondis par les mathématiciens arabes entre les Xème et XIIème siècles. Par la suite, ils sont importés en Europe et traduits par les érudits du Moyen-Age.

A titre culturel, on peut chercher à répondre au problème résolu par le mathématicien Abul Wafa (940 – 998 après J.C.).

« On dispose de trois carrés identiques (avec lesquels il s'agit de) les découper pour fabriquer avec (tous) les morceaux un carré d'aire triple ».

iv. A partir du XVIème siècle : un certain renouveau.

A partir de cette époque, on assiste à un développement de **« la » GEOMETRIE** en étroite relation avec d'autres branches des mathématiques.
Schématiquement, on peut citer dans une certaine chronologie :

✓ Les mathématiciens français **VIETE**, **DESCARTES**, **FERMAT** relient **« la » géométrie** et **l'algèbre** en « inventant » **la géométrie analytique**. …

✓ Les mathématiciens français **DESARGUES**, **MONGE**, **PASCAL** qui, s'intéressant à des problèmes « pratiques » de représentation de l'espace, créent **la géométrie projective**. …

A cette époque, des controverses naissent entre les tenants de « la » géométrie pure et ceux de « la » géométrie utilisant des méthodes algébriques et analytiques. C'est l'occasion d'un foisonnement d'idées, de travaux et de résultats non négligeables !

✓ Au XIXème siècle, grâce à des résultats puissants d'algèbre, on démontre ***l'impossibilité des trois problèmes grecs*** (***WANTZELL*** et ***Von LINDEMANN***). Par suite, après des tentatives infructueuses de démonstration du cinquième postulat d'**EUCLIDE**, des mathématiciens le remettent en cause en « modélisant » des géométries dites non – euclidiennes (***GAUSS***, ***BOLYAI*** et ***LOBATCHEVSKY*** pour la géométrie hyperbolique et ***RIEMANN*** pour la géométrie elliptique).

Le problème qui se pose alors à la communauté des mathématiciens est celui des « relations » et des « cohérences » pouvant exister entre « toutes » ces géométries. Le mathématicien allemand **F. KLEIN** apporte une réponse « consistante » à cette question en donnant une classification de ces géométries, en étudiant « les invariants de groupes de transformations ».

Enfin, **D. HILBERT** résout le problème des fondements de **« la » GEOMETRIE** et il propose une axiomatique complète de **« la » géométrie euclidienne**. (Voir éléments de bibliographie).

En fait, de nos jours, **« une » GEOMETRIE** est fabriquée à partir d'un ensemble et à partir de transformations géométriques qui opèrent ou qui agissent sur cet ensemble. **Chaque géométrie est alors caractérisée par des transformations définies sur un ensemble et par les éléments de l'ensemble qui restent invariants**. (Voir paragraphe suivant, partie (**a**)).

Les ACTIVITES ETUDIEES pendant le CM :

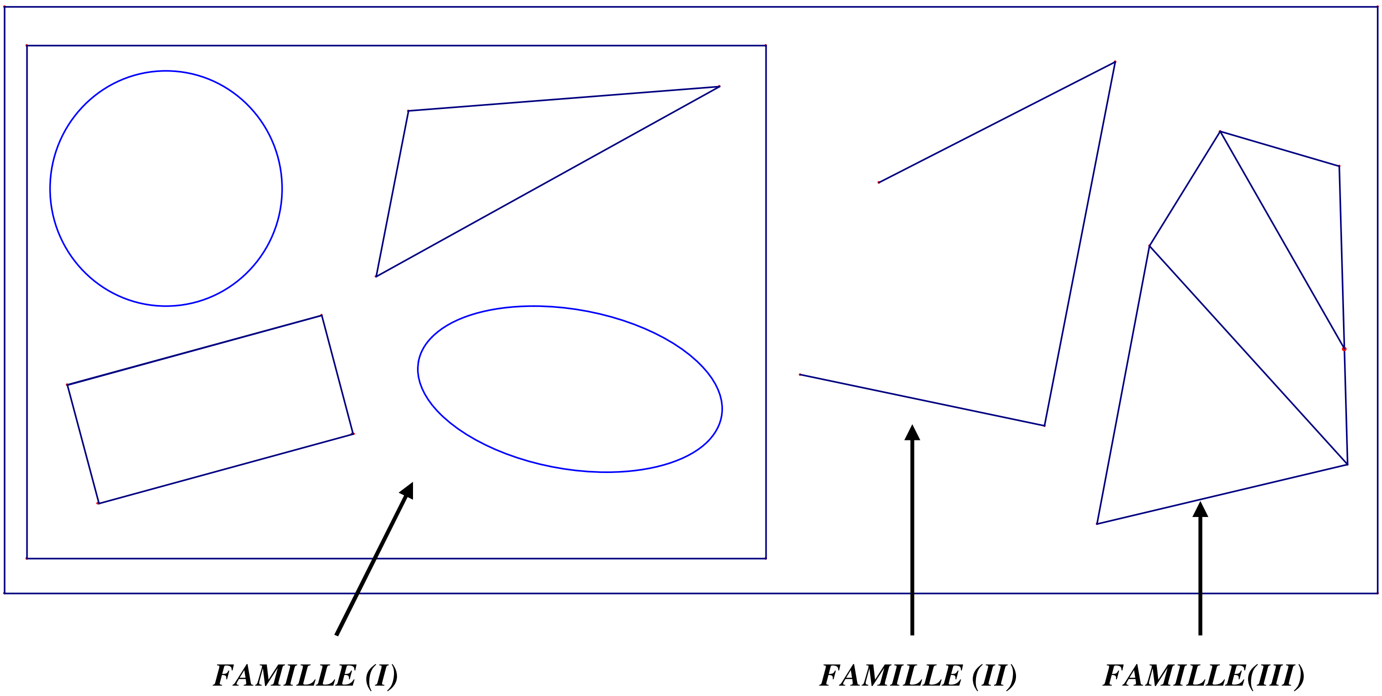
Pour ce qui nous concerne, le point de vue adopté est celui selon lequel **la géométrie étudiée est celle qui modélise l'espace physique**. Les objets géométriques sont donc les objets usuels de la géométrie enseignée dans le cadre de la scolarité obligatoire.

On retrouve l'essentiel des définitions et propriétés sur lesquelles le travail d'aujourd'hui va porter dans tous les « bons » manuels et dans les deux documents référencés en ***avertissement***, page 1.

Ce paragraphe se décompose en quatre parties :

(a) Quelques notions sur des géométries différentes.
(b) Deux classifications des quadrilatères.
(c) Plusieurs définitions d'un même objet géométrique : le **parallélogramme**. Notion de ***propriété caractéristique***.
(d) « ***La moisson des formes*** » relativement au triangle. (B. BETTINELLI, IREM de Besançon).

(a) Quelques notions sur « différentes géométries » :



Le cadre ci-dessus permet plusieurs analyses en termes de « géométries différentes ».

Les figures de la ***FAMILLE (I)*** sont les figures sans nœuds, la figure de la ***FAMILLE (II)*** est une « ligne ouverte » et la figure de la ***FAMILLE (III)*** est composée de lignes fermées avec des « nœuds ».

On fait de la **TOPOLOGIE** en définissant, sur un ensemble, des déformations (des torsions, des étirements, …) qui conservent les éléments de l'ensemble des figures ; sur lesquelles on travaille les notions « d'intérieur », « d'extérieur », de « voisinage », de « trous », de « nœuds » … A ce titre, les figures de la ***FAMILLE (I)*** sont « équivalentes ». Au primaire, un certain nombre d'activités géométriques utilisent ces caractéristiques (*Voir les programmes officiels*).

Si on se place d'un autre point de vue : celui de la **GEOMETRIE PROJECTIVE** ; parmi les figures de la ***FAMILLE (I)***, on peut alors distinguer trois sous-familles : cercle et ellipse, triangle, quadrilatère. Ainsi, on fait de la **GEOMETRIE PROJECTIVE** en définissant, sur un ensemble, des transformations qui déforment les figures tout en conservant l'alignement des points. Par exemple, les travaux liés à des représentations en perspective d'objets spatiaux à trois dimensions en des objets ayant deux dimensions utilisent des résultats de cette géométrie.

Enfin, du point de vue de la **GEOMETRIE METRIQUE**, toutes les figures des trois ***FAMILLES*** sont distinctes, car elles ne sont pas superposables deux à deux.

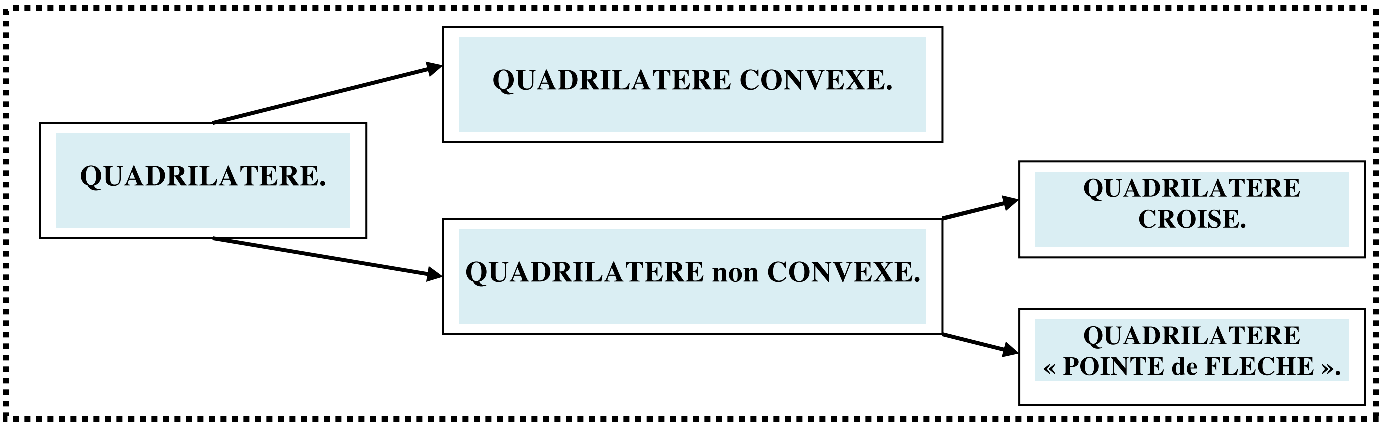
<u>ATTENTION</u> : il ne s'agit que d'une « illustration ». Dans la réalité mathématique, les choses sont bien plus compliquées !

Au niveau de l'enseignement de la géométrie au primaire, ces différentes perceptions sont à prendre en compte, en ce sens que, si on se réfère aux travaux de PIAGET, l'enfant « reconnaît » en premier des notions topologiques (lignes ouverte, fermée, nombre de « nœuds », ...), puis appréhende des rapports de nature projective (alignement, ...), puis de nature affine (parallélisme, ...) et enfin se familiarise avec l'idée de mesure en étudiant des rapports de grandeurs. L'hypothèse qui sous-tend cette modélisation, c'est que l'enfant construit des rapports aux « objets » dans l'espace vécu, puis il les construit dans le même ordre au niveau des représentations de ces « objets »[1].

(b) Deux classifications des quadrilatères.

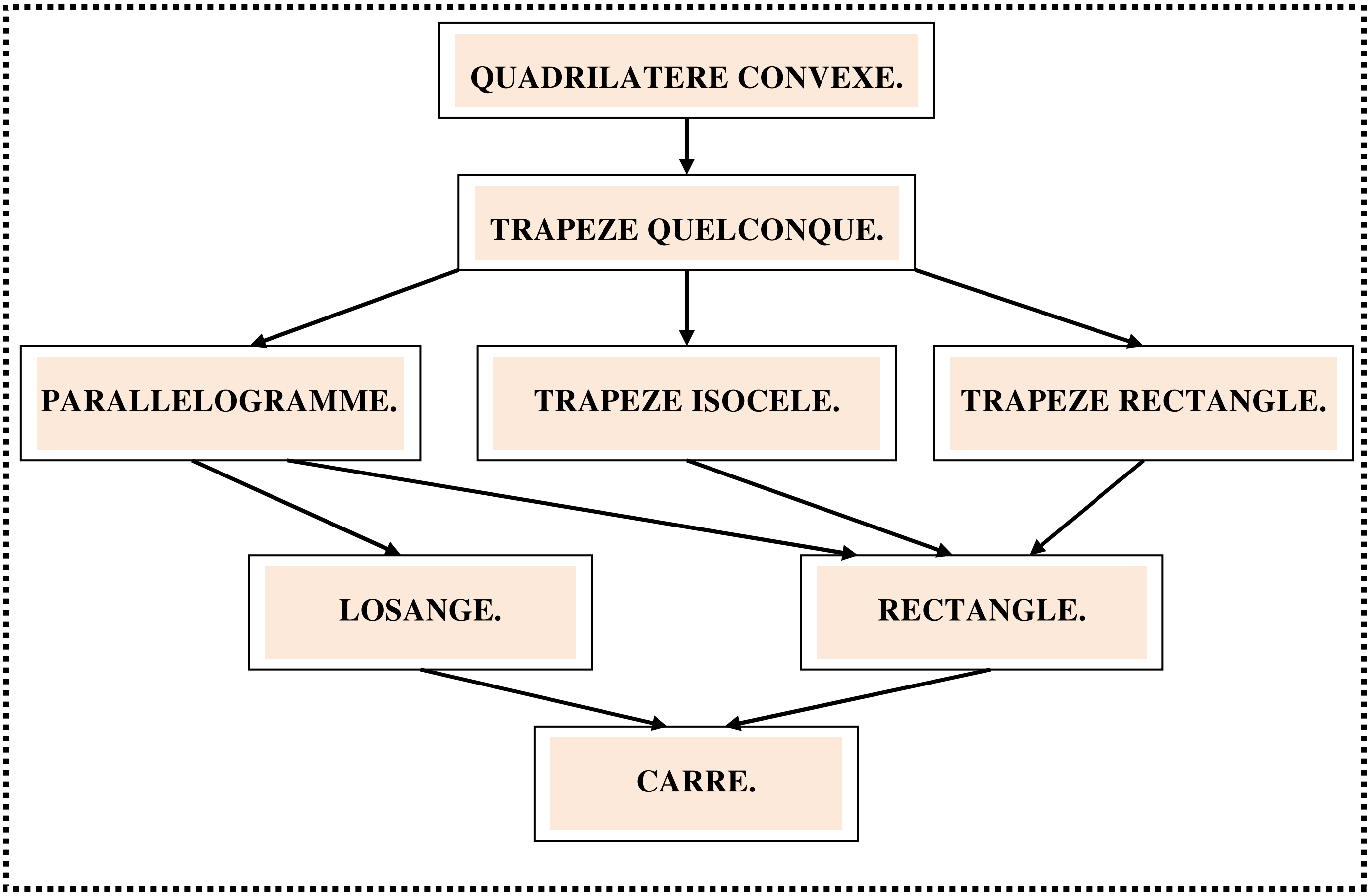
Les deux classifications proposées ci-dessous sont établies à partir des définitions et propriétés figurant dans le document : **GEOMETRIE dans le PLAN**. (Voir ***avertissement***, page **1**).

Première classification mobilisant la notion de convexité.



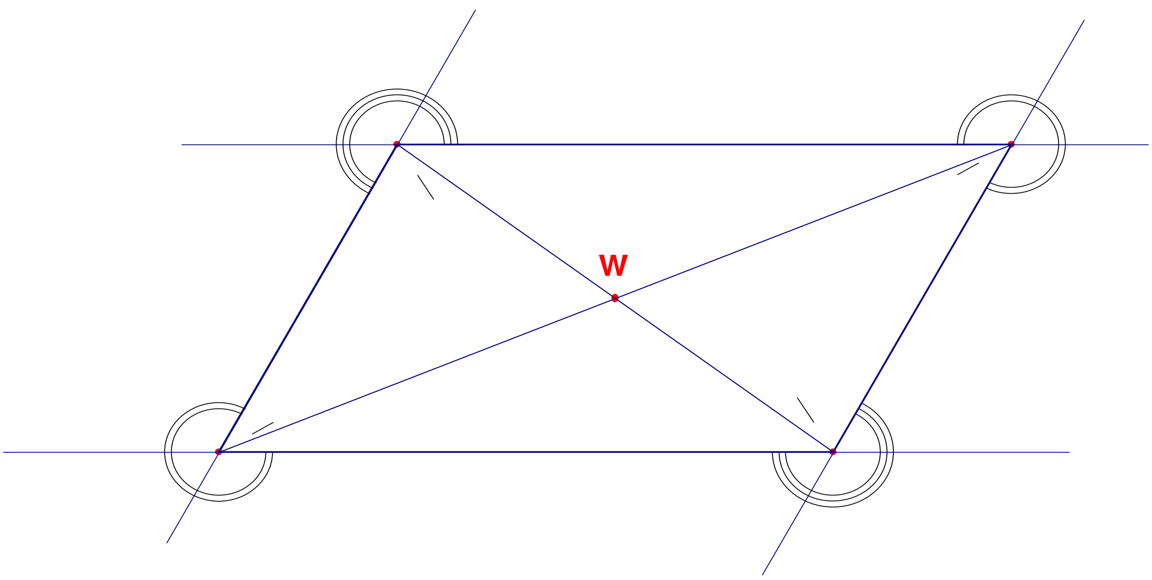
[1] « **Questions sur la Géométrie et son enseignement** » de F. BOULE, chez Nathan Pédagogie (2001).

Deuxième classification : « du général au particulier ».



ATTENTION. Le **trapèze isocèle** est défini comme suit dans le cadre ci-dessus : *un trapèze isocèle est un trapèze dont les diagonales ont la même longueur*. On peut donner d'autres définitions de ce quadrilatère particulier, mais elles ne sont pas nécessairement équivalentes[2].

(c) Le parallélogramme : définitions et propriétés.



[2] Cf **Cours de Géométrie en direction des PE1**, B. PARZYSZ, IUFM d'OT, site d'Orléans. (2000).

La figure de la page précédente est un parallélogramme. Les principales propriétés de ce quadrilatère particulier sont :

- ✓ **Les côtés opposés sont parallèles.**
- ✓ **Les côtés opposés ont la même longueur.**
- ✓ **Les diagonales se coupent en leur milieu W.**
- ✓ **Le point W est le centre de symétrie du parallélogramme.**

(Remarque : *les propriétés relatives aux angles ne sont pas prises en compte dans cette caractérisation*).

En fait, chacune de ces propriétés est « ***caractéristique*** », ce qui signifie que chacune d'entre elles peut être prise comme définition, les autres sont alors des propriétés résultant de cette définition. ***Ce qui ne présage en rien de la facilité ou de la difficulté de démontrer effectivement ces propriétés à partir de la définition choisie !***
(*Voir EXERCICE d'APPLICATION en bas de page*).

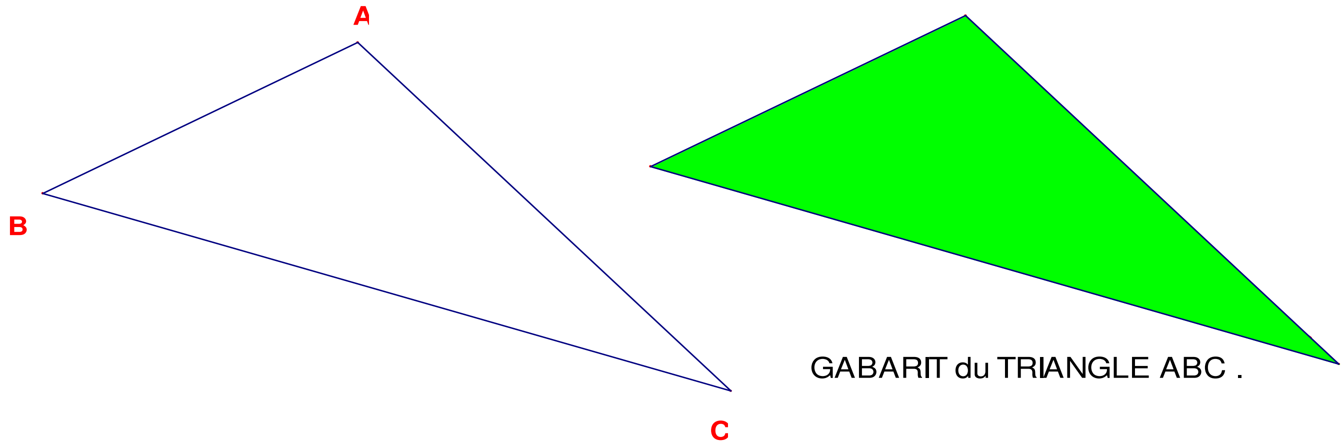
On peut résumer ces différentes options dans le tableau ci-dessous.

OPTION n°(1) : *DEFINITION 1* : un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. *PROPRIETES* : • Côtés opposés de même longueur. • Diagonales de même milieu. • Angles opposés égaux et angles consécutifs supplémentaires. • W centre de symétrie.	***OPTION n°(2) :*** *DEFINITION 2* : un parallélogramme est un quadrilatère convexe dont les côtés opposés ont la même longueur. *PROPRIETES* : • Côtés opposés parallèles. • Diagonales de même milieu. • Angles opposés égaux et angles consécutifs supplémentaires. • W centre de symétrie.
OPTION n°(3) : *DEFINITION 3* : un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. *PROPRIETES* : • Côtés opposés parallèles. • Côtés opposés de même longueur. • Angles opposés égaux et angles consécutifs supplémentaires. • W centre de symétrie.	***OPTION n°(4) :*** *DEFINITION 4* : un parallélogramme est un quadrilatère qui possède un centre de symétrie. *PROPRIETES :* • Côtés opposés parallèles. • Côtés opposés de même longueur. • Angles opposés égaux et angles consécutifs supplémentaires. • Diagonales de même milieu.

EXERCICE d'APPLICATION :

On se place dans le cas de **l'option n°(4)**.
Consigne :
A partir de la définition 4, démontrer les propriétés de cette étiquette. (Note du rédacteur : c'est le cas le plus facile !).

(d). <u>A partir du triangle et de son gabarit : droites remarquables dans le triangle.</u>



<u>CONSIGNE :</u>

En utilisant la règle (*non graduée*) et le gabarit cartonné du triangle (ABC), construire :

(1) La **hauteur (AH)** issue de **A** relative au côté **[BC]**.

(2) La **médiane (AM)** issue de **A** relative au côté **[BC]**.

(3) La **médiatrice** du côté **[BC]**.

(4) La **bissectrice** de l'angle de sommet **A**, càd de l'angle $\widehat{\mathbf{BAC}}$.

Ne pas oublier de *JUSTIFIER* chacune des quatre constructions !

ELEMENTS de BIBLIOGRAPHIE :

📖 Comme pour les **CM** précédents, les ouvrages référencés relatifs à la préparation du CRPE demeurent toujours d'actualité.

📖 « ***Questions sur la géométrie et son enseignement*** » de F. BOULE, chez Nathan Pédagogie. Collection les repères pédagogiques. (2001).

📖 « ***Histoire des Mathématiques pour les Collèges*** », IREM, Paris VII, chez Cédic (1980).

📖 « ***Apprentissages géométriques au cycle III*** », équipe ERMEL, Chez Hatier (2006).

📖 « ***Des mathématiciens de A à Z*** » de B. HAUCHECORNE et D. SURATTEAU, chez Ellipses.

📖 Un site web hébergé par l'IREM d'AIX-MARSEILLE : le site ***CHRONOMATH*** de S. MEHL. On peut aussi consulter le site de T. EVEILLEAU. *Et beaucoup d'autres, à condition qu'ils soient balisés comme « bons » sites !*

B. <u>Du COTE du CRPE : quelques conseils.</u>

Le « champ » de la géométrie offre de multiples possibilités d'interrogation au CRPE, dans chacun des deux éléments qui composent le sujet !

1. <u>CONTENUS MATHEMATIQUES :</u>

Pour des raisons de commodité dans la rédaction, le « champ » de la géométrie est partagé en deux parties : **géométrie plane** et **géométrie dans l'espace**.

<u>GEOMETRIE PLANE.</u>

Les exercices et les problèmes peuvent porter sur :

- La construction de figures géométriques et de configurations élémentaires à l'aide des instruments et des outils usuels de dessin.

- La rédaction de programmes de construction d'une figure géométrique.

<u>Deux conseils</u> : (*tout en sachant que ces tâches sont « périlleuses » étant donnés certains implicites*).

  - Il est important de ***<u>savoir construire les configurations élémentaires</u>***, puis de savoir ***<u>rédiger des programmes de construction associés</u>***. Parmi ces configurations élémentaires, on peut citer : la **médiatrice** d'un segment, la **bissectrice** d'un angle, les **droites remarquables** dans un triangle, la **droite parallèle** à une droite donnée passant par un point fixé, la **droite perpendiculaire** à une droite donnée passant par un point fixé, un **parallélogramme**, … (Il faut donc s'entraîner et ne pas hésiter à tracer, par exemple, des dessins à main levée respectant certains codages !).

  - Au niveau de la rédaction des programmes, les consignes ou les instructions doivent naturellement respecter une hiérarchie dans la construction (sinon, c'est faux !) et une certaine rigueur dans la formulation.
    <u>Par exemple :</u>
    Eviter une écriture trop lourde décrivant des actions du style : « je pointe mon compas sur …, puis, je fais … » et préférer plutôt une ***formulation de nature injonctive*** du type : « placer un point **A** sur tel cercle » plutôt que « on prend un point qu'on place sur le cercle et qu'on nomme **A** ».
    Faire attention à ***certaines incorrections*** et à ***certaines imprécisions***, tant du point de vue ***mathématiques*** que ***grammaticales***. *<u>Exemples</u>* : « On prolonge les droites … ». « **ED** et **FG** se coupent en **W** » : ici, **ED** et **FG** désignent des longueurs, il leur est difficile de se couper ! « Former un parallélogramme » : vocabulaire non usuel en géométrie. …
    Apporter une attention particulière à la ***cohérence du programme*** rédigé. Par exemple, ne pas utiliser un ou des points ou d'autres éléments sans qu'ils aient été définis auparavant ! …

- Les <u>propriétés caractéristiques</u> des figures planes de bases : CERCLES, TRIANGLES, QUADRILATERES, POLYGONES réguliers. (angles, éléments de symétrie, longueurs, aires, perpendicularité, parallélisme, droites remarquables, …)

- L'application des deux théorèmes « fondamentaux » du programme : ***<u>le théorème de Thalès</u>*** et ***<u>le théorème de Pythagore</u>***.
  (*Attention à surtout préciser les conditions d'application du théorème et à ne pas se tromper sur le statut logique de l'énoncé utilisé : propriété directe ou propriété réciproque pour établir tel ou tel résultat ?*).

- Le calcul de grandeurs en réponse à des calculs de périmètres ou d'aires de figures plus ou moins « complexes ». La connaissance des formules usuelles de périmètres et d'aires des figures planes de bases est indispensable ! (Voir le **CM** sur **GRANDEUR et MESURE**).

GEOMETRIE dans l'ESPACE.

Cette partie sera développée et détaillée dans le **CM** sur les « **COUPES du CUBE** ».

Mais on peut observer qu'un certain nombre de problèmes de géométrie dans l'espace sont en fait des problèmes de géométrie plane qui étudient des sections de solides géométriques par un plan.

Les exercices et les problèmes peuvent porter sur :

- Les solides usuels : pavés, prismes, cônes, pyramides, cylindres, sphères.
- Leurs diverses représentations et leurs constructions à partir de patrons.
- Le vocabulaire spécifique : quelques définitions et propriétés de bases.
- Le calcul de grandeurs lié à des calculs de volumes des solides usuels, sans négliger des calculs de longueurs et d'aires. (Voir le **CM** sur **GRANDEUR et MESURE**).

2. Du côté des QUESTIONS COMPLEMENTAIRES ou du problème 3 du CRPE :

(a) Analyse de travaux d'élèves. Aucune **analyse de travaux d'élèves** n'a été proposée ces dernières années en **géométrie dans l'espace**. Les choses peuvent évoluer ! Cette partie concerne plutôt la géométrie plane.

On retrouve, à ce niveau, le même type de questionnement que celui proposé dans le § **1** ci-dessus. En effet, le travail demandé peut porter sur :

- L'analyse d'un programme de construction rédigé par des élèves.
- L'analyse d'une construction : rôle des instruments de construction, précision dans les tracés et dans les mesures, …
- Le rôle de certaines variables de situation (ou variables didactiques) : supports matériels des activités, contraintes fixées sur le matériel autorisé, dispositifs de travail, unicité ou non de la « solution », …

(b) Autre domaines d'interrogations. Que ce soit en **géométrie plane** ou en **géométrie dans l'espace**, l'étude peut porter sur :

- Une situation « d'enseignement-apprentissage » ayant pour but d'installer une nouvelle connaissance de type savoir ou savoir-faire. A analyser à l'aide des supports fournis : activité d'un manuel, objectifs, dispositifs et phases de la séance, programmes et documents d'accompagnement, choix pédagogiques, propositions argumentées de modifications de prolongements, …
- Une situation « de reprise de l'étude » ou « d'approfondissement de l'étude » d'un objet géométrique, dans différents cadres. A analyser (Cf ci-dessus).
- Une ou des situations d'articulation entre diverses activités liées à des représentations, des constructions, des descriptions d'un même objet géométrique (en **géométrie plane** ou en **géométrie dans l'espace**).

Les situations du type « ***émetteur – récepteur*** », les situations de « ***classification*** » d'objets géométriques en fonction de critères prédéfinis, les situations du type « ***jeu du portrait*** » fournissent un large éventail d'interrogations possibles. (*Voir les séances **TD** sur ce thème*).

Ces situations permettent, entre autre, de mettre en jeu des connaissances de nature essentiellement géométriques, c'est à dire, des problèmes portant sur l'espace physique et des problèmes liés à une modélisation de cet espace. (Voir le § **A** de ce **CM**).

C. Du côté des INSTRUCTIONS et du PROGRAMME OFFICIELS :

Il est difficile de résumer tout ce qui concerne la géométrie au primaire. Cette page ne recense que quelques grandes lignes du programme officiel. Actuellement, il s'agit des ***programmes 2016****.*

On peut consulter avec intérêt, un article de la revue Grand ℕ, n°67, IREM de Grenoble (*année scolaire 2000 – 2001*), dont le titre est : « ***Propositions pour un texte d'accompagnement des programmes*** », rédigé par une équipe de l'INRP. La partie qui correspond à ce **CM** est intitulée : « **Espace et Géométrie** ».

Ce texte fait le point sur les connaissances spatiales et géométriques, en termes d'objectifs et de compétences, à faire acquérir aux élèves. Les orientations développées par la suite concernent cinq aspects : *les limites d'un apprentissage géométrique fondé sur l'observation* ; *les connaissances … outils pour résoudre des problèmes dans l'espace* ; *le langage géométrique* ; *les instruments géométriques* et *le lien avec d'autres disciplines*.

1). Cycle des apprentissages premiers ou cycle I :

Dans ce cycle I, « l'élève s'initie à la reconnaissance des formes et aux repérages dans l'espace environnant ». … (Voir les pages **5** et **6** du § **A**).
Il s'agit, à partir d'approches expérimentales, de sensibiliser et d'enrichir des conceptions et de se « préparer » à la géométrie.

2). Cycle des apprentissages fondamentaux ou cycle II :

… « L'élève s'initie à l'organisation de l'espace, reconnaît quelques figures géométriques simples et met au point des techniques de repérage, de reproduction et de construction ». …

3). Cycle des approfondissements ou cycle III : de l'école au collège :

… « Dans le domaine de la géométrie, l'élève complète ses connaissances sur les objets géométriques, s'exerce aux tracés et au maniement de différents outils ». …

Commentaires (libres !):

- On peut noter une progressivité certaine, sur les trois cycles, dans les objectifs et contenus à travailler avec les élèves. Pour aller plus loin, en termes d'analyse des programmes, il faut rapprocher le programme du primaire avec celui du cycle d'observation du collège. Quelles sont les continuités (fausses ou réelles) ? Quelles sont les ruptures ? Sur des points de contenus communs, y a t-il reprises de l'étude ou « empilements » ? Sur quels objets géométriques ? Quelles sont les techniques associées aux tâches élémentaires (constructions de parallèles, perpendiculaires, de figures particulières, …) ? Comment, sur les deux niveaux est-il possible de les légitimer, de les justifier ou de les démontrer ?

  Voilà beaucoup de ***questions professionnelles*** à étudier !
- A priori, le langage et les notations géométriques doivent être une conquête de l'enseignement : il faut plutôt chercher à l'introduire à partir d'une activité ciblée, en situation, et développer ainsi la compréhension et le bon usage du vocabulaire nécessaire. Il ne faut pas perdre de vue qu'un mot est par nature polysémique, mais que dans le contexte des mathématiques, il est souvent utilisé pour un sens bien déterminé. *Par exemple*, les utilisations abusives et synonymiques des mots MILIEU et CENTRE en langage courant sont délicates à corriger dans un contexte mathématisé.

- Cette partie est complémentaire de l'étude de deux autres **CM** : « **GRANDEUR et MESURE** », « **Les COUPES du CUBE** ».

ATTENTION ! Nous sommes en 2017 - 2018. En conséquence, seul l'actuel nouveau programme est à considérer de façon formelle. Cependant, il semble opportun de lire et de s'imprégner des anciens programmes et des documents qui les environnent. Cette « étude » a pour fonction de mettre en perspective ces programmes et de s'intéresser aussi (comme pour ce qui relève du numérique) à la notion de compétence (connaissance, capacité et attitude) du Socle Commun.

ANNEXE (1) :
DEFINITION DU PARTAGE EN " *EXTREME ET MOYENNE RAISON* "

Dans le livre VI de ses " ***Eléments*** ", Euclide définit un certain ***rapport*** entre les segments d'une droite « partagée » par un point. Cela lui permet, entre autres, **de construire** « plus facilement » (***à la règle et au compas***) **le pentagone régulier et le décagone régulier**.

On retrouve en 1498 ce " **partage** " dans le livre " ***la divine proportion*** " de Fra Lucas Pacioli. (Un moine italien de la Renaissance qui popularisa les œuvres d'Euclide).

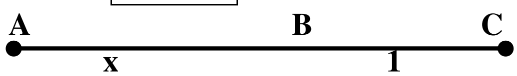
Plus tard, lui sera attribué le nom de " ***section d'or*** " et « ***ce nombre*** » qui mesure ce rapport aura, pour la beauté des œuvres des hommes, une importance extrême.

Il suscitera chez les architectes, les peintres, les sculpteurs, une fascination et jouera un rôle fondamental. Il s'appellera " ***nombre d'or*** ". Sa valeur exacte est : $\boxed{phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}}$.

Mais que disait Euclide ?
C'est simple : pour partager la portion de droite **(AC)** en " ***extrême et moyenne raison*** ", il faut déterminer un certain point **B** placé entre **A** et **C**. Ce point doit être situé de telle façon que :

> « ***Le rapport grand segment sur petit segment soit égal au rapport (petit + grand) segment sur grand segment*** ».

Autrement dit, tel que : $\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}}$ Schéma : voir ci-dessous :



Bref, *le " partage " d'Euclide, c'est de la géométrie élémentaire*. Mais où sont les nombres là-dedans ?

Si on pose que le « petit » segment **[BC]** est de longueur 1, quelle est la longueur x du « grand » segment **[AB]** ?

Si **AB** = x et **BC** = 1 alors **AC** = x + 1. Et, par définition, $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}$.

Remplaçons ces quatre segments de droite par leurs équivalents " en x ".

$\frac{AB}{BC}$ devient $\frac{x}{1}$ et $\frac{AC}{AB}$ devient $\frac{(x+1)}{x}$. Donc $\frac{x}{1} = \frac{(x+1)}{x}$ d'où $x^2 = x + 1$ et enfin $\boxed{x^2 - x - 1 = 0}$.

Cette équation admet deux solutions dont l'une est : $\boxed{x = \frac{(\sqrt{5}+1)}{2}}$, soit le célébrissime nombre d'or baptisé φ (lettre grecque lue : ***phi***) et dont la valeur décimale arrondie à 10^{-20} est : ***1,61803398874989484820***. (Ouf !).

(EXTRAIT du DOSSIER : ***RALLYE MATHEMATIQUE du CENTRE, année 1999/2000.*** **Classe de 2^nde 9 du lycée RONSARD** de VENDOME (41)).

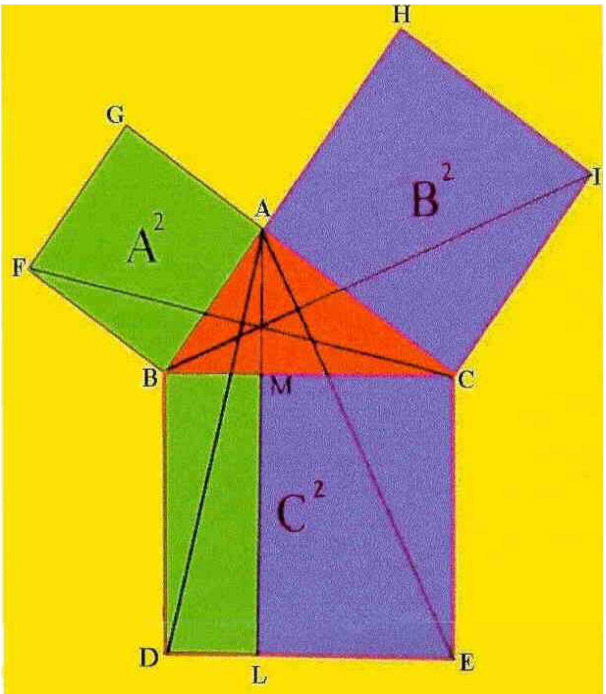
ANNEXE (2) :

Le théorème de PYTHAGORE : la démonstration D'EUCLIDE.

Bien qu'il ne soit pas habituellement formulé ainsi, voici le problème le plus célèbre de la « **géométrie alexandrine** ».

« **L'an dernier, je possédais deux petits carrés au bord du Nil ; je voudrais cette année n'en avoir qu'un, de surface équivalente au total des deux premiers** »

Vous avez reconnu ***le théorème de Pythagore*** ! En voici une démonstration selon Euclide.



PREMIER livre, proposition XLVII :

Enoncé : « ***Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des cotés qui comprennent l'angle droit*** ».

Démonstration :

❈ Puisque chacun des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{BAG}$ sont droits, alors les droites **(AC)**, **(AG)** (placées du même côté) font avec la droite **(BA)** au point **A** de cette droite, deux angles égaux et droits. Donc, la droite **(CA)** est dans la *direction* de **(AG)**.

❈ Par démonstration semblable, **(BA)** est dans la direction de **(AH)**.

❈ Chacun des angles $\widehat{DBC}$ et $\widehat{FBA}$ est égal à l'angle droit.

❈ La somme des angles $\widehat{DBC}$ et $\widehat{ABC}$ vaut celle des angles $\widehat{FBA}$ et $\widehat{ABC}$.

❈Puisque **DB** = **BC** et **FB** = **BA**. L'angle $\widehat{DBA}$ est égal à l'angle $\widehat{FBC}$, alors **DA** = **CF**.
Les aires des triangles **(ABD)** et **(FBC)** sont donc égales.

❈L'aire de **(BDLM)** est égale à deux fois celle du triangle **(ABD)** (*Car lorsque le sommet d'un triangle se déplace parallèlement au côté opposé, l'aire du triangle ne change pas*).

❈ De façon semblable celle de **(BFGA**) vaut deux fois celle triangle **(FBC)**.

❈Donc, les parallélogrammes **(BDLM)** et **(GFBA)** ont même aire (*Puisque les triangles **(ABD)** et **(FBC)** également*).

❈En joignant **A** à **E** et **B** à **I**, nous démontrons de façon semblable que les parallélogrammes **(CMLE)** et **(HACI)** ont même aire.

❈**Le carré (BDEC) est de surface égale à la somme des surfaces des carrés (GFBA) et (HACI)**, c'est à dire en reprenant les notations de la figure : $\boxed{\text{aire } (A^2) + \text{aire } (B^2) = \text{aire } (C^2)}$.

❈**Le carré du côté [BC] est donc égal à la somme des carrés des côtés [BA] et [AC]**, c'est à dire :

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}.$$

DOSSIER RALLYE MATHEMATIQUE du CENTRE. CLASSE de SECONDE du LYCEE RONSARD, VENDOME, année 1999/2000.

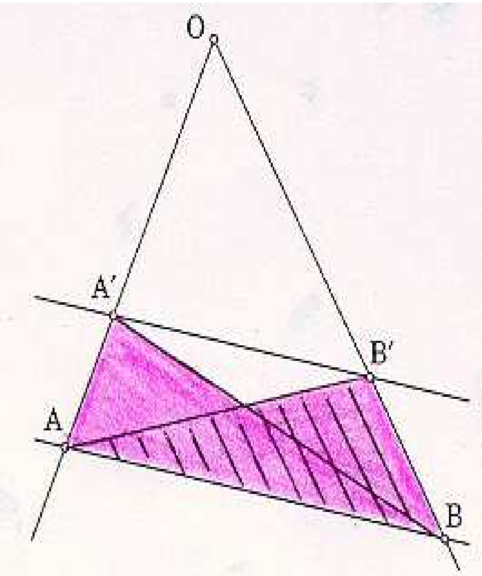
ANNEXE (3) :

Le théorème de THALES : LA DEMONSTRATION D'EUCLIDE.

Sixième livre proposition II :

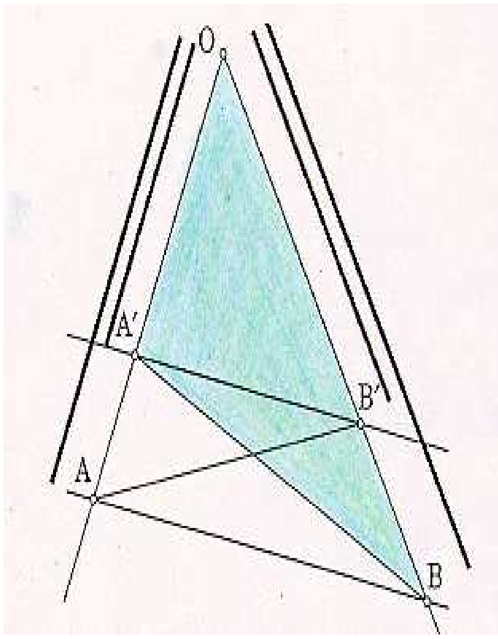
« **Que l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle et si les côtés du triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle**. »

Démonstration (selon Euclide) :



1. La « figure » de Thalès est formée par un triangle **(OAB)** et une parallèle **(A'B')** au côté **[AB]** de ce triangle.

2. Lorsque le sommet d'un triangle se déplace parallèlement au côté opposé, l'aire du triangle ne change pas. *Pourquoi* ? Les aires des triangles **(A'AB)** et **(B'AB)** sont donc égales.



3. Considérons le triangle **(AOB)**, par soustraction des aires précédentes, on en déduit que les aires des triangles **(OA'B)** et **(OB'A)** sont égales.

4. Dans le triangle **(OAB)**, le rapport des aires de **(OA'B')** à celle de **(OA'B)** est égal au rapport des longueurs de **[OB']** à celle de **[OB]**. Mais ce même rapport des aires de **(OA'B')** à **(OA'B)** vaut celui de **(OA'B')** à **(OB'A)**, et dans ce dernier triangle, ce rapport est égal au rapport des longueurs de **[OA']** à celle de **[OA]**. Finalement :

$$\boxed{\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}}$$

DOC-DOSSIER RALLYE MATHEMATIQUE du CENTRE.
CLASSE de SECONDE du LYCEE RONSARD, année 1999/2000.

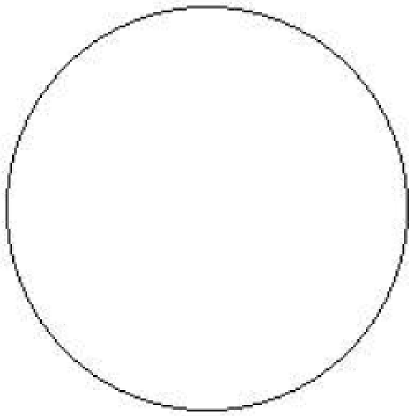
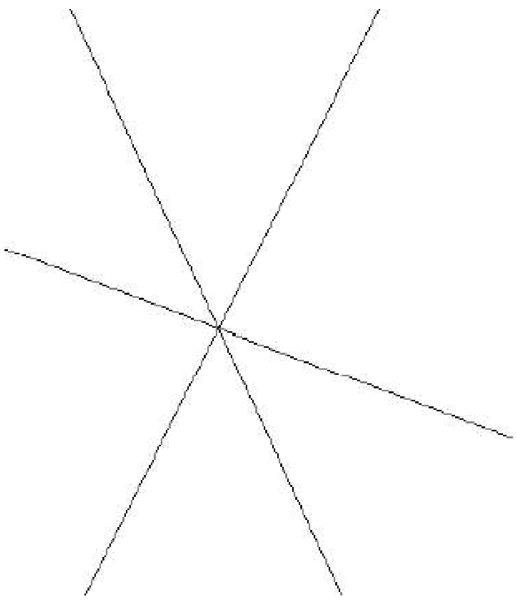
Note. il manque un rapport dans l'égalité ci-dessus, c'est : $\frac{A'B'}{AB}$. Le théorème de Thalès enseigné en France donne trois rapports égaux. Il y a d'autres versions de ce théorème ; en effet, il y a d'autres « façons » de décrire mathématiquement la « dynamique » qui se cache derrière ***la configuration de Thalès***.

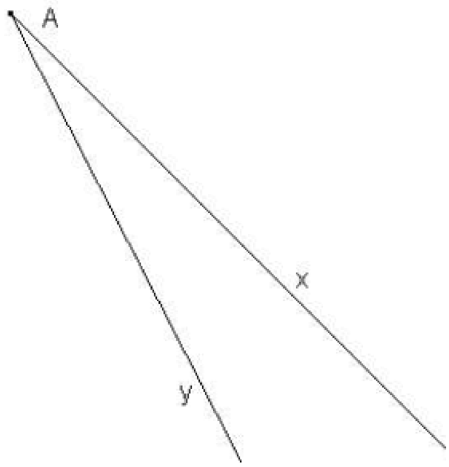
ANNEXE (4) : des exercices « au format » du CRPE (Idem CM n°1)

Constructions dites « à la règle et au compas ».

Remplir les trois tableaux ci-dessous en complétant chaque fois la figure et en laissant visibles tous les traits de construction.

Indiquer brièvement dans la troisième colonne les étapes de la construction, préciser en particulier s'il y a plusieurs figures solutions possibles.

Question	Figure à compléter	Étapes de la construction
1/ Construire le centre O de ce cercle		
2/ Construire un triangle ABC tel que les trois droites ci-contre soient ses trois hauteurs.		

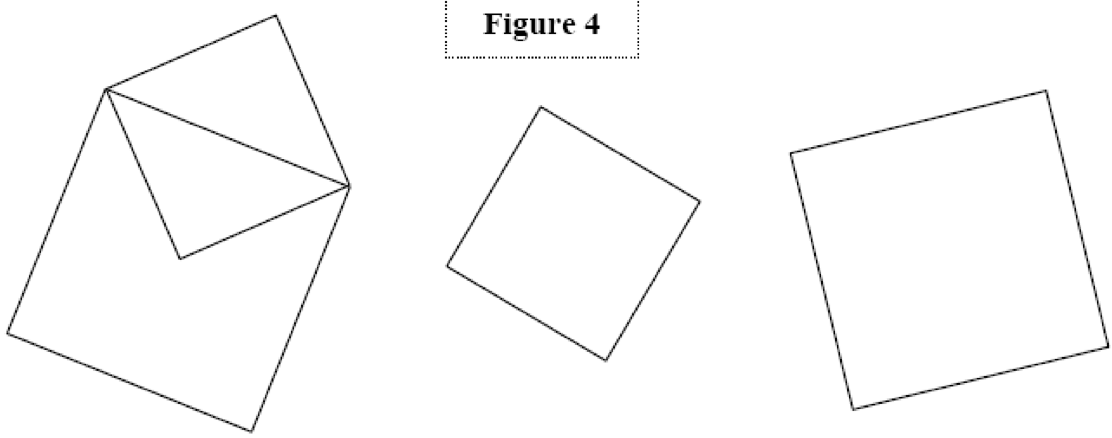
3/ Construire un triangle ABC, tel que [Ax) soit une bissectrice et (Ay) une hauteur.		

<u>Questions Complémentaires. « Les ENVELOPPES » (Brochure COPIRELEM) : un grand classique qui pourra servir en PE2, ou en M2, dans un futur proche !</u>

L'énoncé ci-dessous (figure 4) est tiré d'un manuel de l'école primaire (Hatier, 1994)

Voici le dessin d'une enveloppe, fait de deux carrés. On a commencé deux autres dessins de la même enveloppe. Complète-les.

Figure 4



On a tracé le plus petit carré. Tu dois construire le plus grand

On a tracé le plus grand carré. Tu dois construire le plus petit

CONSIGNES

a) A quel niveau de l'école élémentaire peut être proposé cet exercice ? Argumenter.

Dans la Figure 5 sont reproduites quatre productions d'élèves (***A***, ***B***, ***C*** et ***D*** : premières lettres du prénom) dans lesquelles les traits de construction sont apparents (les élèves avaient droit aux instruments habituels de tracé : règle graduée, équerre, compas).

b) Indiquer les constructions correctes. Pour celles-ci, justifier la validité de la procédure utilisée par l'élève.

c) Pour celles qui sont erronées, indiquer la procédure de l'élève. Préciser ce qui est pertinent dans sa démarche et comment corriger (*au plus simple*) ce qui ne l'est pas.

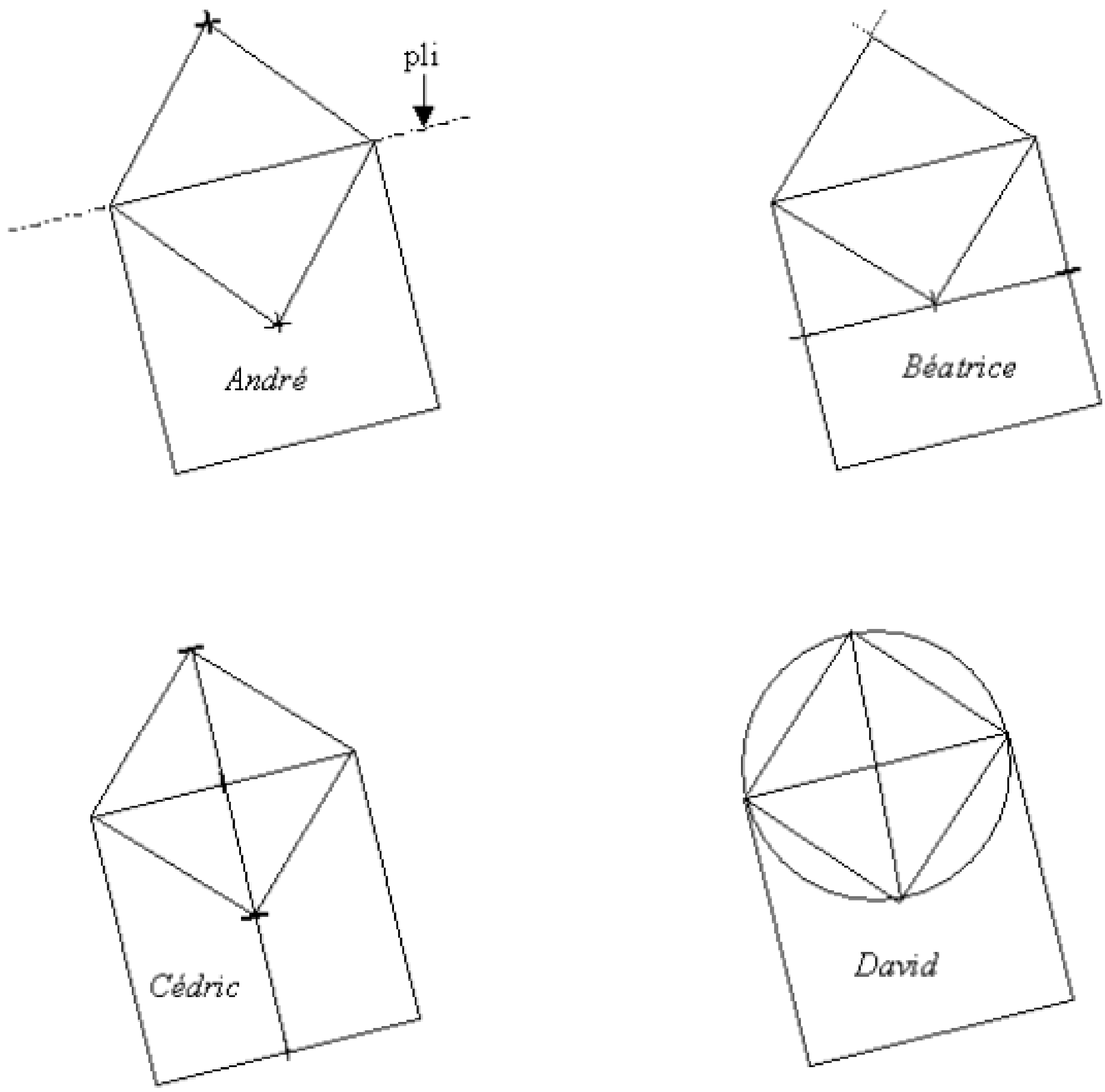


Figure 5

Les constructions. Pistes de solution : étapes de la construction.

1. Placer trois points (distincts) A, B et C sur le cercle. Le centre O est le point d'intersection de la médiatrice de [AB] et de celle de [BC]. Il n'y a qu'un seul point O. *Une question : pourquoi les deux médiatrices sont-elles « obligatoirement » sécantes ?*

2. Choisissons une des trois hauteurs, appelons-la (x). Tracer une droite perpendiculaire à (x). Cette droite coupe les deux autres hauteurs en A et en B. À partir du point A, tracer la perpendiculaire à la hauteur passant par B. Cette droite coupe (x) au point C. (ABC) est un triangle solution.

Ce n'est pas le seul. En effet, nous avons le choix de la hauteur (x) et de la perpendiculaire à cette hauteur (x).

3. Tracer une demi-droite [Az). Tracer la demi-droite [At), symétrique de [Az) par rapport à (Ax). Tracer une droite perpendiculaire à (Ay). Cette droite coupe [Az) et [At) aux points C et B. (ABC) est un triangle solution.

Ce n'est pas le seul. En effet, nous avons tracé arbitrairement [Az) et la perpendiculaire à (Ay).

Les ENVELOPPES.

a) La réussite de cet exercice nécessite la mise en œuvre de compétences qui relèvent du cycle III (Tâches en jeu : tracer la perpendiculaire à une droite passant par un point donné, placer ou marquer le milieu d'un segment, concevoir et réaliser un programme de construction, en plus du vocabulaire usuel : côté, diagonale, carré, ...). (*Réponse facile : peut-on légitimement poser cet exercice au cycle II ?*). (Voir page suivante pour une telle ENVELOPPE de NOEL !).

b) Les productions de Béatrice et Cédric sont correctes.
Pour décrire leurs procédures nous utilisons les notations de la figure 1 (l'enveloppe de NOEL).
Béatrice a construit les milieux des segments [AB] et [CD], puis le milieu du segment joignant ces milieux. Elle obtient ainsi le point F qui est le centre du carré ABCD. Elle trace ensuite les segments [AF] et [FD]. Enfin elle trace la perpendiculaire à (AF) passant par A et la perpendiculaire à (FD) passant par D, ces droites se coupant au point E. « Son » quadrilatère AFDE est bien un carré puisqu'il possède trois angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur.
Cédric a construit les milieux I et J des segments [AD] et [BC], puis il a tracé le segment [IJ] et déterminé son milieu. Il a obtenu ainsi le point F qui est le centre du carré ABCD. Pour obtenir le point E, il a prolongé le segment [IJ] d'une longueur égale à IF. « Son » quadrilatère AFDE est bien un carré puisque ses diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement et sont de même longueur.

c) André a tracé un losange non carré. Il a placé le point F sans doute « au jugé », mais avec assez de précision pour que les distances FA et FD soient « sensiblement égales », puis a tracé les segments [FA] et [FD], avant de compléter la figure par symétrie par rapport à (AD) en utilisant la technique du pliage. (Cette procédure donnera en général un « cerf-volant », c'est uniquement parce qu'il a placé F sur la médiatrice de [AD] qu'il a obtenu un losange). Pour rectifier sa procédure il doit placer le point F exactement au centre du carré, en suivant par exemple la démarche de Cédric.

<u>Remarques</u> : la construction du symétrique d'un point avec règle et équerre relève du collège ; le fait que le dessin à réaliser représente une enveloppe peut inciter les élèves à utiliser la technique du pliage.

David a tracé un rectangle non carré. Tracer le cercle de diamètre [AD] est pertinent, mais il doit ensuite tracer le diamètre perpendiculaire à [AD] pour obtenir un carré. On contrôle cette construction aux instruments.

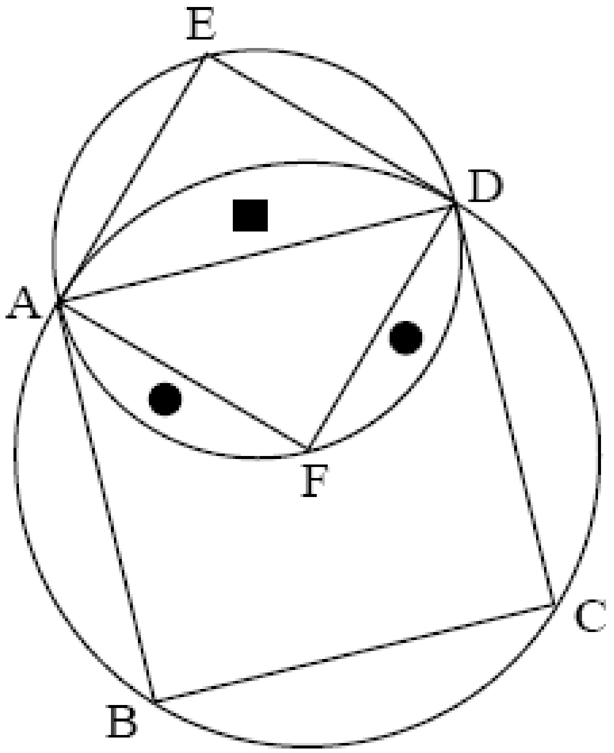


Figure 1

ABCD et AFDE sont des carrés.
Chaque cercle est circonscrit à un des carrés.