

# Formation de Formateurs 41 MAT(H)ERNELLE

Patrick WIERUSZEWSKI  
Université ORLEANS, ESPE CVL

ESPE BLOIS

J1 : Novembre 2015 et J2 : second semestre

Avec la *précieuse* collaboration  
de Magali Q, Louisa EB et Gilles L !

Le pourquoi de cette formation : une double actualité.

(i) les nouveaux programmes (*mars 2015*)

et (ii) une convergence avec un besoin de formation.

*Le dispositif, le cadre et le public :*

Une action de FodeFo sur le cycle I, avec une diversité d'intervenants, *durée* : deux journées ;

*Public cible* : IEN, CPC et CPD, PEMF, DEA et autres...

*PROJET* : comme toute action de FodeFo, il s'agit d'apporter des compléments disciplinaires et didactiques dans un objectif de « démultiplication » vers des actions de formation d'école, de bassin, de circonscription, ...

Et donc, il y aura un moment réservé pour définir le cadre de ces futures formations (J2)...

## PROGRAMME des deux journées

J1 : 9 novembre 2015.

- i. Louisa EB et Magali Q. A partir du document « Vers les Mathématiques, quel travail en Maternelle », étude comparative et comparatiste des programmes 2008 et 2015. Les points de convergence et de divergence, les nouveautés, ce qui a disparu, les attentes...
- ii. Patrick W. Le NOMBRE à la maternelle, compléments disciplinaires et didactiques, commande(s) du projet de formation...
- iii. Gilles L. Le Numérique et les instruments TICE, au service d'une pratique de classes en Maternelle...

Commandes pour J2

## J2 : début du printemps ?

- i. Patrick W. Les FORMES et les GRANDEURS à la Maternelle. Idem J1.
- ii. La « littérature grise » : les nouveautés, hors circuit traditionnel.
- iii. Retour sur les commandes J1 : mise en forme des projets de formation...
- iv. Débats : pérennité de cette action de FodeFo, vers d'autres actions, perspectives et ouvertures....

*Possibilité de modifications des contenus entre J1 et J2*

C'est parti. *i* : Au tour de Louisa et de Magali...

*ii* : au tour de Patrick. C'est parti aussi !

Les supports théoriques, nécessaires, indispensables et incontournables : les deux principales TDM ; à corréler et à compléter par des éléments d'épistémologie et d'Histoire des mathématiques.

Les deux supports TDM : (i) La TSD et (ii) la TAD

Du côté de l'Histoire : les « tribulations » de la NUMERATION. *Avant d'en être là aujourd'hui en 2015, que de transformations, de reniements, de bricolages, bref, quel joyeux bazar !*

*Un premier exemple* : on est allé de « unité, paire, beaucoup » à « un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, ... » en passant par « un, dix, ... ». Sachant qu'avant de s'intéresser à donf à « dix », on s'est en même temps intéressé à « cinq », à « vingt », à « soixante », et pas tout de suite à « la tête à toto »...

*Donc cool, si par hasard je ne comprends pas !!!*

Commentaires 1. On se pose des questions sur un « objet » mathématique, voire un concept (le nombre entier). Les questions premières (*résumées*), avant de s'intéresser à tout « *enseignement-apprentissage* » sont : (*ingénierie didactique*)

- Les « raisons d'être » de cet objet de savoir. Le « *Pourquoi* » avant le « *Comment* » !
- Déclinaisons de ses « fonctions » par une certaine « organisation » de l'étude de cet objet ;
- Mise en place de cette organisation à l'aide de situations ad hoc, *on entre dans « l'enseignement-apprentissage »* ;
- Mises en œuvre, critiques et analyses...

Cette « ingénierie didactique » (*Margolinas et Wozniak*) débouche ainsi sur différentes démarches de mise en œuvre.

Exemples : « ERMEL » (*transmissions directes aux PE de situations relevant d'une démarche de « recherches-actions »*) vs « EUROMAHS » ou « J'APPRENDS les MATHS » (*productions de manuels basés sur des recherches dans des domaines distincts (mathématiques vs psychologie)*).

Commentaires 2. Ces évolutions vers le système de numération à base dix qui gouverne l'arithmétique scolaire et système sociétal, *base de numération super top nickel-chrome-titane*, ont duré des siècles et des siècles, sans empêcher, ni entraver le développement de toutes les civilisations concernées. Important !

Un deuxième exemple, à partir de la notion numérique FONDAMENTALE basée sur la « correspondance terme à terme ».

En Egypte (*antique !*), pour vérifier la conformité quantitative, sans connaître le NOMBRE (!), d'un « colis » lors d'échanges commerciaux ou de transactions ; on enroulait un certain « nombre » de cailloux dans de la terre glaise, qu'on faisait sécher, voire cuire. Le receveur du « colis » et, en même temps de la boule cuite pouvait donc, en cassant la boule savoir si le nombre de marchandises était bien celui qu'il avait commandé ! *Ah, yes, super !!!*

Et donc, d'un point de vue épistémologique, tout autant que d'un point de vue pédagogique, pour la Maternelle, le point de départ de tout travail sur le NOMBRE sera donc de mettre en place des activités mettant en évidence cette « correspondance terme à terme ».

On y reviendra : elle met en jeu une compétence NON-numérique délicate à objectiver.

On commence donc par la QUANTITE.

HYPOTHESE : on part de l'idée piagétienne et toujours actuelle (Fayol, ...) que, très tôt, les très petites quantités sont discriminées par les petits enfants.

On a aussi besoin de deux pré-requis (*ou plutôt connaissances élémentaires*) chez les petits enfants :

- La distinction entre « un » et « plusieurs » (Cf. diapositive 5) ;
- La distinction entre « un » et « rien ».

Les premières difficulté pédagogiques : on est donc sur le territoire du professeur, bien avant d'être sur celui des élèves.

- Les premiers apprentissages ne sont pas « réservés » à l'ECOLE.
- La QUANTITE n'est pas une caractéristique d'un OBJET, comme par exemple, la couleur, mais caractéristique d'une COLLECTION d'objets.
- Conséquence : il faut donc être au clair sur ce qu'est une COLLECTION (*discrète*). « Rassembler » des objets de même nature peut constituer une collection, mais des tâches spécifiques, comme des ajouts ou des retraits, ou bien des modifications de caractéristiques sont nécessaires pour installer un bon « rapport » à « l'objet » collection. Cf. *diapositive suivante*. Il s'agit pour l'élève de regarder la pluralité comme une entité : pas simple !

Tout questionnement concernant une COLLECTION, indépendamment de son CARDINAL, met en jeu une relation « logique » entre le TOUT et une PARTIE.

Un exemple : (Descaves, objectif CRPE, chez Hachette).

On présente à un élève de MS ou de GS, voire au CP, un bouquet (= une COLLECTION) de fleurs comportant « beaucoup » de marguerites et « peu » de violettes. Question : « *Y a-t-il plus de marguerites ou plus de fleurs ?* ». Cet élève peut répondre qu'il y a plus de fleurs, car il voit les quelques violettes. On rajoute des marguerites, on repose la même question, il est alors possible d'obtenir la réponse suivante : « *Comme tu rajoutes des marguerites, il y aura plus de marguerites* » (que de fleurs, of course !).

Par cette réponse, l'élève ne pense pas que si on augmente la PARTIE, le TOUT augmente aussi et que donc, la PARTIE est « toujours » inférieure au TOUT.

Le NOMBRE (*entier naturel*) : *quelles situations pour quels apprentissages, on devrait plutôt dire quelles situations pour quelles approches ? Dans le cadre élargi de la « résolution de problèmes » = conformité au(x) programmes !*

- Les « Sept Malentendus Capitaux » de R. Goigoux. *Survол, sans parachute...*
- Le NOMBRE : mémoire de la QUANTITE. Quelques compléments théoriques... Mais aussi mémoire d'un RANG. Quelques compléments théoriques, bis. Mathématiques vs Linguistique.
- Des QUANTITES aux NOMBRES.
- DIRE, LIRE, ECRIRE les NOMBRES.
- Le NOMBRE pour : anticiper, estimer, calculer, comparer, ranger, classer, ...
- Des connaissances non-numériques pour « apprendre » le NOMBRE...

## Les SITUATIONS où interviennent le NOMBRE. Vergnaud...

On distingue principalement quatre types de telles situations : la DESIGNATION, la COMPARAISON et le RANGEMENT, la QUANTIFICATION et le CALCUL.

➤ Utiliser un NOMBRE comme une « étiquette », comme un code, comme un nom, ... relève de la DESIGNATION. Exemples : numéro de vol d'un avion, numéro d'un train, indicatifs de téléphone, numéros de rue. Situations présentant peu d'intérêt pédagogique : difficile de COMPARER, difficile d'OPERER, ... sur des numéros de train.

➤ COMPARAISON et RANGEMENT (*dimension **ordinaire***). Dans de telles situations le NOMBRE a pour fonction de repérer, de situer des « objets » les uns par rapport aux autres, en liens avec des écritures (*et des paroles !*) numériques.

Exemples : le 15 mai précède le 16 mai (*très grand jour !*), grâce à des conventions et surtout grâce à des rituels structurant le temps (*hier, aujourd'hui, demain*), sans références directes à la QUANTITE. *Intérêt pédagogique évident !*

➤ La QUANTIFICATION (*dimension **cardinale***). Il s'agit de répondre à la question : « combien ? ».

Remarque : une propriété fondamentale des nombres relie les deux dimensions ordinales et cardinales survolées ci-dessus. Exemple : le neuvième jour du mois de novembre est précisément, lorsqu'il se termine, le jour où 9 jours du mois de novembre se sont écoulés. On ne confond pas les « fonctions » de l'étiquette « 9 » dans les deux expressions : « 9 jours » et « 9 novembre ». Cf. diapositives suivantes.

➤ Le CALCUL et les OPERATIONS. Objet partout « dense » dans *TOUTE* activité mathématique, le CALCUL a donc aussi une place essentielle en Maternelle.

Exemple : « Combien d'assiettes manquent à une table de **n**, sachant qu'il y en a déjà **m**, avec **m** < **n** ? ». « Comment partager **b** bonbons entre **p** élèves, avec **b** > **p** (ouf !) et **b** multiple de **p** ? » (re-ouf !)...

## Des QUESTIONS (certaines encore OUVERTES)

1. Le NOMBRE est-il INNE ou ACQUIS ? EXPERIENCE vs SENSIBILITE ! Débat...
2. Le NOMBRE est-il d'abord CARDINAL ou ORDINAL ? « *classe de classes* » = cardinal ou « *classes de relations* » = ordinal.

*Exemple absolument nécessaire. Bon d'accord !*

On « compte » les pattes d'un chien. *Admettons. Combien ?* « Quatre », ce nombre désigne la quantité de pattes. Oui, mais why ? C'est aussi le nombre de pattes d'un chat, d'un cheval, ... et on considère alors cette « *quantité* » comme une collection « d'objets » équivalents : un paquet, même si une patte est plus courte ou mal foutue ! On s'intéresse donc à tous les paquets « identiques » : on associe, une à une, une patte de chien avec une patte de chat. On « arrive » alors à quatre.

En fait, le nombre de pattes d'un chien et le nombre de pattes d'un chat, le nombre de pattes d'un cheval sont d'abord égaux entre eux, avant d'être égaux à quatre !

## Deuxième entrée.

Pour arriver à dire qu'un chien possède quatre pattes, on ordonne les pattes comme sont ordonnés les nombres de la comptine : il y a la première, la deuxième, ... Autrement dit, on crée une relation entre les pattes du chien, indépendamment du choix de la première et des autres et la suite ordonnée des nombres. En conséquence, toutes les relations sont équivalentes, il y aura toujours une quatrième patte, même mal foutue !, sans une cinquième !

Dans cette deuxième approche, le nombre de pattes d'un chien et le nombre de pattes d'un chat et le nombre de pattes d'un cheval sont d'abord chacun égaux à « quatre » avant d'être égaux entre eux.

3. Enfin, le développement de la Technologie et des Sciences Cognitives ont ouvert de nouvelles perspectives de recherche et posent de nouvelles questions, sans répondre aux deux précédentes : il y a encore du boulot ! Se documenter... *Item non ouvert aujourd'hui.*

- Le modèle de PIAGET ou modèle « socio-constructiviste »...
- *Le « modèle » cognitiviste. Hypothèse : apparenter le fonctionnement de l'intelligence à celui d'une machine « savante » construite par l'homme : l'ordinateur !*
- *Le modèle de GELMAN. Assez tôt (*plus tôt que chez Piaget*), l'enfant accède au NOMBRE suivant les cinq principes suivants :*
  1. Principe d'ordre stable. Énoncé des éléments de la chaîne numérique toujours dans le même ordre.
  2. Principe « bijectif » ou de « correspondance terme à terme ». Affectation d'un « mot-nombre » à chaque objet de la collection.
  3. Principe cardinal. Le dernier « mot-nombre » dit ou énoncé donne la quantité.
  4. Principe de la non-pertinence de l'ordre. Parcours aléatoire de la collection, mais même cardinal.
  5. Principe de l'abstraction : pas de rapport entre nature des objets comptés et dénombrement.
- De nouveaux modèles liés à la neuro-psychologie. Des avancées aujourd'hui, après beaucoup d'études de cas sur les troubles du calcul.

*On continue.* Le NOMBRE pourquoi et pour faire quoi ?  
Quelques pistes à explorer.

Une première QUESTION. Pourquoi est-ce si difficile pour un élève **E** de comprendre et d'assumer la transition du COMPTAGE au DENOMBREMENT ? (*Brissiaud*).

Exemple. On y va : **E** compte les stylos.

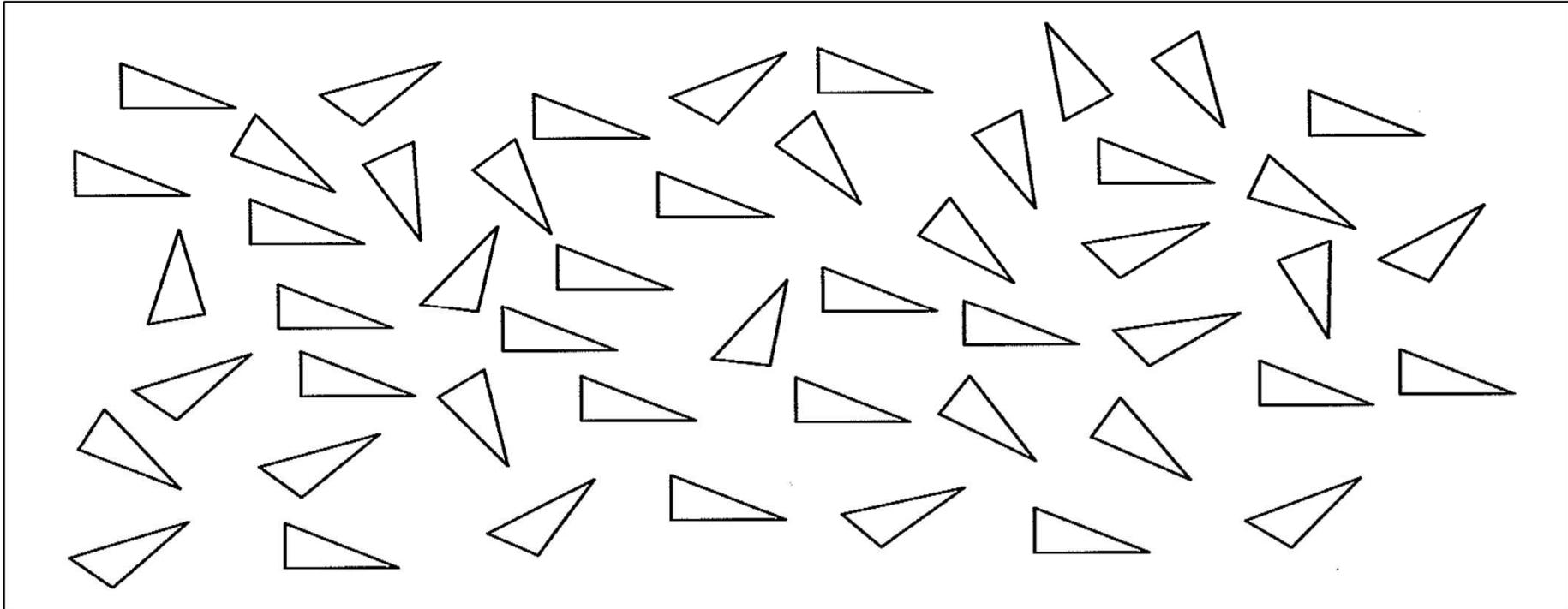
Le « un », le « deux », le « trois », le « quatre », le « cinq », le « six », le « sept ». (*Stop*).

Pour accéder au DENOMBREMENT, à partir du COMPTAGE, le titi **E** de cycle I doit accorder « en acte » un double sens au dernier mot-nombre prononcé.

En effet, quand le dernier mot-nombre est prononcé pour la première fois, celui-ci a le même statut que les autres : il s'agit d'un « mot-nombre-numéro » qui désigne et distingue un OBJET, *par exemple*, le « sept » ; et puis, dès qu'il est prononcé, ce mot-nombre change de statut, car il représente alors la quantité. On passe du « le » sept, dans le sens « le septième », mais c'est pas toujours le même stylo, à « les » sept pour exprimer le cardinal de la collection.

*Réelle difficulté conceptuelle !*

Une digression, vers le cycle II: évaluations nationales de fin de CE1 (2007 et 2008) et EVAL 41 (2014 – 2015)



Taux de réussite  $\approx$  63 %. Avec une remarque non anodine : le recours systématique aux « paquets » de 10 n'est pas « automatique ». Hypothèses ?

Il y a ? triangles

Que doit savoir un élève **E** sur le nombre 49 ?

- ✚ RECITER la file des nombres au moins jusqu'à 49, à partir de n'importe quel nombre inférieur ou égal à 48.
- ✚ SITUER 49 par rapport aux autres nombres déjà connus.
- ✚ PASSER de l'écriture chiffrée « 49 » à l'écriture littérale et inversement.
- ✚ DENOMBRER des collections de 49 objets manipulés ou dessinés, ces objets pouvant être pré-regroupés ou pas par dix.
- ✚ CONSTRUIRE ou REALISER une collection d'objets de cardinal 49.
- ✚ REPRESENTER le nombre 49 à l'aide de toute sorte de matériels de numération (*bûchettes – élastiques, cubes emboîtables, bouliers, boîtes à dix, jetons, compteurs, abaqués, ...*).
- ✚ REPRESENTER 49 euros ou 49 centimes avec de la monnaie (*fausse quand même !*).
- ✚ ASSOCIER 49 à sa décomposition canonique. ASSOCIER 49 à d'autres décompositions.
- ✚ « OPERER » avec 49 : investir le territoire du CALCUL avec ce nombre et ses congénères.
- ✚ S'INTERESSER à 49 pour « lui-même ». *Exemples...*

On a le BUT : c'est ce qui est proposé dans la diapositive précédente, après plusieurs années d'école !

Comment peut-on s'y prendre à l'étage « en-dessous », sans panne d'ascenseur ?

Avant de donner quelques exemples d'activités « d'enseignement-apprentissage » et quelques friandises, il y a encore des éléments « théoriques » à étudier.

Différents travaux en **DdM** ont établi que parmi les connaissances nécessaires à tout apprentissage, des connaissances non enseignées sont souvent implicitement mises en œuvre pour « réussir » à une tâche. (*Thèse de J. Briand*).

Question. Citer une connaissance non-numérique indispensable que doit activer un élève dans toute tâche de « comptage-dénombrément ». *Illustrer ou exemplifier*.

Des praticiens et des chercheurs affirment que les comptages précoces ne sont qu'imitations, et que « conceptualisation de la quantité » et « comptages » se développent indépendamment l'une de l'autre. *Débat...*

En particulier, ce ne sont pas les procédures de comptages, en tant que telles qui sont mises en cause, mais essentiellement leur mise en place systématique.

Une maxime **PW** :

« Savoir « comptiner » n'est pas savoir compter ! »

Ce qui peut créer un « obstacle » à l'émergence d'autres procédures. On pense évidemment au calcul ou parfois à la reconnaissance globale (ou « *subitizing* »).

Une maxime pour après (**GLP** et **PW** et d'autres !) :

« Trop de comptage(s) tue(nt) le calcul ! »

SAVOIR COMPTER : qu'est ce que ça veut dire ? (*Article de la « famille » EMPRIN in « Le Nombre au Cycle II », SCEREN*).

➤ Tâche : DENOMBRER (*littéralement « sortir le nombre » : dé – nombrer*) une quantité en utilisant la suite orale des nombres de « un en un » ou toute autre procédure de type calculatoire.

➤ D'où quelques questions :

▪ Qu'est-ce qu'une COLLECTION ? Cf. diapositives précédentes...

▪ Qu'appelle-t-on DESIGNATION ? Le concept de *désignation* revient à remplacer un OBJET par un symbole. DENOMBRER, c'est ainsi attribuer à une COLLECTION une désignation particulière : son *cardinal*.

➤ Il « manque » alors un dernier concept, indispensable pour mener à bien une activité de DENOMBREMENT par COMPTAGE

Alors ?

Il s'agit de l'ENUMERATION (J. Briand) : what's that ?

Situation emblématique : « la boîte à eux, euh, à œufs »

Une analyse « *extra-fine* » des connaissances à activer lors d'une tâche de « comptage–dénombrement », sous la forme d'un programme hiérarchisé : (*article de la famille EMPRIN*)

- (1) Etre capable de distinguer deux éléments (*distincts*) d'une collection donnée.
- (2) Choisir un élément de cette collection.
- (3) Enoncer un « mot-nombre » (*à partir de « un », puis le successeur du précédent dans la chaîne orale*).
- (4) Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis (*ou déjà « comptés »*).
- (5) « Concevoir » la collection des éléments non encore choisis comme une collection de même nature.
- (6) Recommencer en (2), tant que la collection n'est pas vide.
- (7) Savoir qu'on a choisi le dernier élément.
- (8) Si oui dans le cas (7), énoncer le dernier « mot-nombre », cardinal de la collection.

*Voilà, c'est fait ! Ah oui, quand même !*

Ce « programme » appelle les remarques suivantes :

- Les instructions (1), (2) et (7) nécessitent de concevoir ce qu'est une collection ou un ensemble, au sens usuel. *Pas aussi évident qu'il n'y paraît pour un élève ! Cf. diapositives précédentes...*
- L'instruction (3) relève du principe de « correspondance terme à terme » : pointage et défilement verbal des « mots-nombres » synchrones.
- L'instruction (8) relève du principe cardinal. Lien direct et effectif entre comptage et quantité.
- La suite d'instructions  $\{(1), (2), (4), (5), (6), (7)\}$  constitue une tâche spécifique nommée : « tâche d'inventaire » ou « tâche d'énumération ».

Tâche résumée par : « *être capable de passer en revue tous les éléments de la collection, une et une seule fois, sans oublier, dans n'importe quel « sens ».* Et oui, il faut faire tout ça pour y arriver !!!

L'essentiel est dit.

Maintenant, c'est l'heure des FRIANDISES...

- Un peu de Calcul Mental : Cf. fichier « FodeFo\_Mathernelle\_Nombre ».
- Rituels et apprentissages, la METEO : Cf. fichier diaporama « Mathernelle\_partout ».
- Rituels et apprentissages, suite, « *La valise de Toutou* »...
- Annexes : quelques questions. Cf. fichier diaporama « Mathernelle\_partout ».
- Domaine du CALCUL, deux techniques pour une même addition : Cf. fichier diaporama « Mathernelle\_partout ».

COMMANDE pour les stagiaires : pour J2, réfléchir et préparer un protocole de stage de formation continue.

COMMANDE pour **PW** : préparer un deuxième diaporama sur les FORMES et les GRANDEURS.

*Bon, d'accord, ce sera prêt !*