Pistes de CORRECTION : NOMBRES ET CALCUL

EXERCICE 1

1. $\frac{2}{5}$ = 4/10 (*fraction décimale*) = 0,4 donc $\frac{2}{5}$ est « bien » un nombre décimal. Le nombre $\frac{3}{7}$, écrit sous forme fractionnaire, est une fraction dite « irréductible », avec un autre facteur que 2 et 5 au dénominateur. Donc, $\frac{3}{7}$ n'est pas un nombre décimal. Le nombre 8 est un entier donc 8 est un nombre décimal. Le nombre $\frac{6}{6}$ « = » 1 donc c'est un entier qui est aussi un nombre décimal. La *fraction décimale* $\frac{4}{10}$ est un nombre décimal car il s'écrit sous la forme $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{10^p}}$ avec ***a*** et **p** entiers. Au primaire, on appelle ces fractions des <u>fractions décimales</u>.

Les nombres π et $\sqrt{2}$ ne sont pas des nombres décimaux. Ce ne sont pas non plus des nombres rationnels.

2. $\frac{3}{7}$ est une fraction irréductible avec un autre facteur que 2 et 5 au dénominateur donc cette fraction ne peut pas représenter un nombre décimal donc $\frac{3}{7}$ ne peut pas être égal à 0,4285714285.

Il y a un autre argument à la portée d'un élève de **CM** : lequel ?

Dans tous les cas, si on décide de se lancer dans le calcul du produit de 0,4285714285 par 7, on ne trouverait pas 3, car le dernier chiffre de ce produit est 5 (chiffre des unités du produit de 5 par 7). Pas mal du tout !

3. Il y a une infinité de nombres décimaux inférieurs à $\frac{1}{3}$. Mais parmi ces nombres, il n'existe pas de nombre plus grand que tous les autres car, entre un nombre décimal inférieur à $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ il est toujours possible de trouver un autre nombre décimal. Comment ? ~~Vu en ***TD***~~.

10	7
30	0,142857
20	
60	
40	
50	
1	

4. Le dernier reste écrit vaut 1. Les prochains restes successifs seront donc à nouveau 3, 2, 6, 4, 5, puis 1, la division continue, …on note alors : $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ (*écriture standard*) = $0,\underline{142857}$ (*autre écriture*) : nombre rationnel, non décimal.

Or 32 = 5 × 6 + 2. Donc, le *trente deuxième* chiffre après la virgule est le même que le *deuxième* et vaut 4.

EXERCICE 2

Pour **A**, le point doit être remplacé par un multiple de 85 : 0 ; 85 ; 170 ; 255 ; …
Pour **B**, le point doit être remplacé par un diviseur de 85 : 1 ; 17 ; 5 ; 85.
Pour **C**, le point doit être remplacé par un multiple de 17 *et en même temps*, non multiple de 5 : 17 ; 34 ; 51 ; 68 ; 102, …
Pour **D**, le point doit être remplacé par un nombre qui ne soit pas un diviseur de 85 et dont la décomposition en produit de facteurs premiers ne comporte que des nombres choisis parmi 17, 2 et 5. Par exemple 34, 50 ; …..
Pour **E**, le point doit être remplacé par un nombre qui n'est pas un multiple de 17 : 5 ; 8 ; 21…
Pour **F**, le point doit être remplacé par tout nombre dont la décomposition en produit de facteurs premiers ne soit pas de la forme $2^{\mathbf{m}} \times 5^{\mathbf{n}}$ ou $17 \times 2^{\mathbf{m}} \times 5^{\mathbf{n}}$. Même raisonnement pour 115 à la place de 85.

EXERCICE 3

1) $14 + 19 + 16 + 11 = 14 + 16 + 19 + 11 = 30 + 30 = 60$
$= 10 + 4 + 10 + 9 + 10 + 6 + 10 + 1 = 40 + 20$
$85 + 39 = (80 + 5) + (30 + 9) = 80 + 5 + 30 + 9 = 110 + 14 = 124$
$= 85 + (40 – 1) = 85 + 40 – 1 = 125 – 1 = 124$
$85 – 39 = 85 – (30 + 9) = (85 – 30) – 9 = 55 – 9 = 46$
$= (85 + 1) – (39 + 1) = 86 – 40 = 46$
$205 – 198 = 205 – (200 – 2) = 205 – 200 + 2 = 7$
$= (205 – 200) + (200 – 198) = 5 + 2 = 7$

2) $24 = 24 \times (10 + 5) = \ldots = 240 + 120 = 360$
$24 = (12 \times 2) \times 15 = 12 \times (2 \times 15) = 12 \times 30 = 360$
$24 = (20 + 4) \times (10 + 5) = \ldots = 200 + 100 + 40 + 20 = 360$
$24 = 24 \times (\frac{30}{2}) = \frac{(24 \times 30)}{2} = \frac{720}{2} = 360$. … Il y en a mucho beaucoup d'autres.

3) $903 = 37 \times 24 + 15$
Il faut ajouter un nombre compris entre 22 et 58 (*au sens large*) pour que le quotient augmente d'une unité. *Pourquoi* : poser les divisions ou raisonner !
Il faut retrancher un nombre compris entre16 et 52 (*au sens large*) pour que le quotient diminue d'une unité. *Pourquoi* : poser les divisions ou raisonner !

4) $802 = \boldsymbol{b} \times 14 + \boldsymbol{r}$ avec $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$ (*Rappel* : on a aussi $0 \le \boldsymbol{r}$)
Les valeurs possibles de ***b*** et ***r*** sont : ***b*** = 54 et ***r*** = 46 ou ***b*** = 55 et ***r*** = 32 ou ***b*** = 56 et ***r*** = 18 ou ***b*** = 57 et ***r*** = 4. *Attention, il y a plusieurs réponses : vérifier en posant les divisions « à la main », et oui !*

EXERCICE 4

1. **A** = $\frac{843}{174}$ (*simplification par 3*) = $\frac{281}{58}$

   B = $\frac{540}{126}$ (*simplification par 18 = 2 × 9*) = $\frac{30}{7}$

2. **C** = $\frac{8}{15} + \frac{7}{6} = \frac{17}{10}$

   D = $3 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{8}$

   E = $\frac{10}{21} \times \frac{49}{24} = \frac{35}{36}$

   F = $2 - \frac{7}{9} = \frac{11}{9}$ (Facile !!!)

3. $\frac{99}{120}$ = (*simplification par 3*) $\frac{33}{40}$ = (33 × 25)/1000 = $\frac{33}{5*2^3}$; le dénominateur est de la forme $5^{\boldsymbol{m}} \times 2^{\boldsymbol{n}}$ donc le nombre $\frac{99}{120}$ est un nombre décimal. *Attention la petite étoile en exposant vaut 1. Erreur de copie…*

EXERCICE 5

$\frac{257}{129} > \frac{254}{129}$; $\frac{15}{12} > \frac{14}{13}$, pourquoi ? ; $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} = \frac{355}{113} \approx$ pi ! ; $\frac{2}{3} \times \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2} + \frac{7}{6}}{1 + \frac{2}{5}} = \ldots = \frac{115}{126}$

EXERCICE 6

1) $\mathbf{A} = \frac{352}{44} = 8$; $\mathbf{B} = \frac{4242}{2828} = \frac{3}{2}$; $\mathbf{C} = \frac{242424}{323232} = \frac{3}{4}$; $\mathbf{D} = \frac{32032}{77} = 416$

2) $\mathbf{F} - \mathbf{E} = 2 + \frac{1}{7} + \frac{6}{7^2} + \frac{5}{7^3} - (1 + \frac{9}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3}) = 1 - \frac{8}{7} + \frac{4}{7^2} + \frac{2}{7^3} = -\frac{19}{7^3} < 0$, donc $\mathbf{E} > \mathbf{F}$. Il y a d'autres techniques : Cf. le ***TD***…

EXERCICE 7

1) ***Faux***. Donnons un contre-exemple : 6. Cela suffit !
2) ***Vrai***. Comme 5 et 7 sont premiers entre eux, tout multiple de 5 et 7 est un multiple de 35.
3) ***Faux***. Donnons un contre-exemple : 12.
4) ***Faux***. 2 est premier et pair.
5) ***Vrai***. Exemple : $\frac{33}{25} = \frac{132}{100} = 1{,}32$.
6) $\frac{1155}{84} = \frac{1375}{100} = 13{,}75$
7) ***Faux***. Choisir 41 ! Il faut aller jusque-là ! Remarque des correcteurs : corrigé un peu léger, il faut aller plus loin et rédiger les réponses.

~~EXERCICE 8 voir le CM~~

EXERCICE 9

Les voitures se retrouvent ensemble sur la ligne de départ si la mesure en minutes de la durée depuis le départ est un multiple commun à 30 et à 36. Et parmi ces multiples communs, c'est le plus petit qui nous intéresse, puisque c'est la première fois que Pat et Polo se retrouveront ensemble sur la ligne : on cherche donc le PPCM. On a : PPCM(30 ; 36) = 180

Les voitures se trouvent ensemble sur la ligne de départ toutes les 3 heures.

« Moments »	Nombre de tours parcourus par Pat	Nombre de tours parcourus par Polo
Lundi 14h	0	0
Lundi 17h	5	6
Lundi 20h	10	12
Lundi 23h	15	18
Mardi 2h	20	24
Mardi 5h	25	30
Mardi 8h	30	36
Mardi 11h	35	42
Mardi 14h	40	48

D'autres pistes de réponse ont été fournies pendant le ***TD***. *Très Bien* !

EXERCICE 10

Le nombre de billes contenues dans chacun des sacs est un diviseur de 360. Pourquoi ?
On a : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Le nombre 360 admet $(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$ (*propriété admise*) $= 4 \times 3 \times 2 = 24$ diviseurs qui sont :
1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 et 360.
Le nombre de billes étant compris entre 20 et 50, les diviseurs qui nous intéressent sont : 20, 24, 30, 36, 40 et 45.
Donc on a :
18 sacs de 20 billes ; 15 sacs de 24 billes ; 12 sacs de 30 billes ; 10 sacs de 36 billes ; 9 sacs de 40 billes ; 8 sacs de 45 billes.
De plus Patrick dispose de moins de 10 sacs. Il ne reste que deux possibilités : 9 sacs de 40 billes et 8 sacs de 45 billes. *Comme toujours, il y a d'autres techniques de résolution de cet exercice…*

EXERCICE 11

1) Il s'agit de calculer le PGCD(108 ; 135) = 27 : on peut donc faire 27 paquets au maximum. On cherche un diviseur commun et parmi ces diviseurs communs, on cherche le plus grand. *Autre technique* : lister les diviseurs communs à 108 et à 135, garder le plus grand.

2) $108 = 27 \times 4$ et $135 = 27 \times 5$
Chaque paquet contiendra 4 billes rouges et 5 billes noires.

EXERCICE 12

Soit $\mathbf{N} = 7 \times \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$ avec $0 \leq \boldsymbol{r} < 7$
On a : $\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{r}$ donc $\mathbf{N} = 15\boldsymbol{r}$ avec $0 \leq \boldsymbol{r} < 7$
Si $\boldsymbol{r} = 0$, $\mathbf{N} = 0$; Si $\boldsymbol{r} = 1$; $\mathbf{N} = 15$ et $\boldsymbol{q} = 2$; Si $\boldsymbol{r} = 2$; $\mathbf{N} = 30$ et $\boldsymbol{q} = 4$; Si $\boldsymbol{r} = 3$; $\mathbf{N} = 45$ et $\boldsymbol{q} = 6$; Si $\boldsymbol{r} = 4$; $\mathbf{N} = 60$ et $\boldsymbol{q} = 8$; Si $\boldsymbol{r} = 5$; $\mathbf{N} = 75$ et $\boldsymbol{q} = 10$ et Si $\boldsymbol{r} = 6$; $\mathbf{N} = 90$ et $\boldsymbol{q} = 12$.
Exercice un peu technique, mais intéressant !

EXERCICE 13

Pour déterminer le carré d'un nombre dont le chiffre des unités est 5, il suffit :
- De multiplier le nombre de dizaines de ce nombre par son successeur ;
- De multiplier ce produit par 100 ;
- D'ajouter 25 au nombre obtenu à l'étape précédente.

$85^2 = 8 \times 9 \times 100 + 25 = 7225$ et $25^2 = 12 \times 13 \times 1\ 00 + 25 = 15\ 625$
Soit $\mathbf{N} = 10\boldsymbol{n} + 5$ avec $\boldsymbol{n}$ le nombre de dizaines de $\mathbf{N}$.
$\mathbf{N}^2 = (10\boldsymbol{n} + 5)^2 = 100\boldsymbol{n}^2 + 100\boldsymbol{n} + 25 = 100\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} + 1) + 25$

EXERCICE 14

1) $57\ 148\ 468 = 3\ 361\ 674 \times 17 + 10$; c'est l'égalité traduisant la division euclidienne de 57 148 468 par 17. Donc $\boldsymbol{q} = 3\ 361\ 674$ et $\boldsymbol{r} = 10$.
$84\ 279\ 733 = 4\ 957\ 631 \times 17 + 6$ donc $\boldsymbol{q} = 4\ 957\ 631$ et $\boldsymbol{r} = 6$
Par addition membre à membre, on obtient alors :
$57\ 148\ 468 + 84\ 279\ 733 = 8\ 319\ 305 \times 17 + 16$ donc $\boldsymbol{q} = 8\ 319\ 305$ et $\boldsymbol{r} = 16$.
$2 \times 57\ 148\ 468 = 2 \times 3\ 361\ 674 \times 17 + 20 = 6\ 723\ 349 \times 17 + 3$

2) a) On a : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{q} \times 17 + \boldsymbol{r}$ avec $0 \leq \boldsymbol{r} < 17$

$\boldsymbol{a'} = \boldsymbol{q'} \times 17 + \boldsymbol{r'}$ avec $0 \leq \boldsymbol{r'} < 17$

donc $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a'} = (\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q'}) \times 17 + (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r'})$ et on sait que $0 \leq \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r'} < 34$

Deux cas :

- Si $0 \leq \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r'} < 17$ le quotient est $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q'}$ et le reste est $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r'}$
- Si $17 \leq \boldsymbol{r} + \boldsymbol{r'} < 34$ le quotient est $\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q'} + 1$ et le reste est $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r'} - 17$

b) On a : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{q} \times 17 + \boldsymbol{r}$ avec $0 \leq \boldsymbol{r} < 17$

$2 \times \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{q} \times 17 + 2\boldsymbol{r}$ avec $0 \leq 2\boldsymbol{r} < 34$

Deux cas :

- Si $0 \leq 2\boldsymbol{r} < 17$ le quotient est $2\boldsymbol{q'}$ et le reste est $2\boldsymbol{r}$
- Si $17 \leq 2\boldsymbol{r} < 34$ le quotient est $2\boldsymbol{q} + 1$ et le reste est $2\boldsymbol{r} - 17$

EXERCICE 15

Soit **N** le nombre d'élèves dans cette école.
Soit $\boldsymbol{q}$ le nombre d'équipes obtenues en groupant les élèves par 7.
On a alors : $\mathbf{N} = 7\boldsymbol{q} + 6$
De même pour les équipes de 11, avec $(\boldsymbol{q} - 8)$ équipes, d'où :
$(\ldots) = 11(\boldsymbol{q} - 8) + 10$ donc $7\boldsymbol{q} + 6 = 11(\boldsymbol{q} - 8) + 10$; on trouve $\boldsymbol{q} = 21$, donc $\mathbf{N} = 153$. Vérifier !à

Voir l'énoncé pour une autre technique subtile, en s'intéressant aux multiples communs à 7 et à 11, en ajoutant un élève dans cette école : pourquoi ?

EXERCICE 16

1) $1001 = 11 \times 91$, donc $\boldsymbol{r} = 0$
2) $\overline{\boldsymbol{mcdu}} = 1000\boldsymbol{m} + 100\boldsymbol{c} + 10\boldsymbol{d} + \boldsymbol{u}$

$= 1001\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m} + 99\boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} + 11\boldsymbol{d} - \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u}$

$= 1001\boldsymbol{m} + 99\boldsymbol{c} + 11\boldsymbol{d} - \boldsymbol{m} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u}$

3) Tout nombre inférieur à 9 999 s'écrit en base 10 avec quatre chiffre au plus.

Soit $\overline{\boldsymbol{mcdu}} = 1001\boldsymbol{m} + 99\boldsymbol{c} + 11\boldsymbol{d} - \boldsymbol{m} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u}$

$= 11 \times (91\boldsymbol{m} + 9\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{m} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u}$

$\overline{\boldsymbol{mcdu}}$ est un multiple de 11 $\Leftrightarrow -\boldsymbol{m} + \boldsymbol{c} - \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u}$ est un multiple de 11.

Si $\overline{\boldsymbol{mcdu}}$ a 38 centaines alors il s'écrit $\overline{\boldsymbol{38du}}$

$\overline{\boldsymbol{38du}}$ est un multiple de 11 $\Leftrightarrow (8 + \boldsymbol{u}) - (3 + \boldsymbol{d})$ est un multiple de 11

Or $(8 + \boldsymbol{u}) - (3 + \boldsymbol{d}) = 5 + \boldsymbol{u} - \boldsymbol{d}$

Si $5 + \boldsymbol{u} - \boldsymbol{d} = 11$ on a : $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{d} = 6$. D'où les possibilités suivantes : $\boldsymbol{u} = 9$ et $\boldsymbol{d} = 3$ ou $\boldsymbol{u} = 8$ et $\boldsymbol{d} = 2$ ou $\boldsymbol{u} = 7$ et $\boldsymbol{d} = 1$ ou $\boldsymbol{u} = 6$ et $\boldsymbol{d} = 0$; les nombres cherchés sont : 3839 ; 3828 ; 3817 et 3806

EXERCICE 17

1. Pour $\boldsymbol{x} = 1$, on a : $\mathbf{E} = -1$; pour $\boldsymbol{x} = -3$, on a : $\mathbf{E} = -5$; pour $\boldsymbol{x} = \frac{4}{3}$, on a : $\mathbf{E} = -\frac{17}{6}$. On remplace $\boldsymbol{x}$ par la valeur donnée et on exécute le calcul, en respectant les priorités. Voilà.

2. $\sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$. (*Facile*).

EXERCICE 18

1. **A** $\approx$ 0, 4056 et **B** $\approx$ 0,4056 et alors ?
2. $18270 \times 19019 = 347477130$ et $45045 \times 7714 = 347477130$ donc **A** = **B**

EXERCICE 19

$729 = 2^2 \times 3^3 \times 7$. Le nombre est 3×7. Car : $2^2 \times 3^3 \times 7 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^4 \times 7^2 = (2 \times 3^2 \times 7)^2 = 126^2$

EXERCICE 20

On a : $\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2 = 25$: une bonne identité remarquable ; avez-vous remarqué ? $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 25$; or $25 = 1 \times 25$ ou $25 = 5 \times 5$ de plus, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} < \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

On a alors deux cas à étudier.

Premier cas :

$\begin{cases} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 1 \\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 25 \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{a} = 13 \\ \boldsymbol{b} = 12 \end{cases}$

Deuxième cas :

$\begin{cases} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 5 \\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 5 \end{cases}$ impossible ; donc la seule possibilité est : (13 ; 12)

EXERCICE 21

1. $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, donc le nombre de diviseurs de 60 est égal à $(2 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 \times 2 = 12$.
2. Liste des diviseurs de 60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Il y en a douze.
3. $70 = 2 \times 5 \times 7$, donc le nombre de diviseurs de 70 est égal à $(1 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1) = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
4. Liste des diviseurs de 70 : 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70.
5. En comparant les deux listes précédentes, on voit que le PGCD de 60 et 70 est égal à 10. <u>Autre méthode</u> : On utilise les décompositions en produits de nombres premiers de 60 et 70 et on trouve que : PGCD(60 ;70) = $2 \times 5 = 10$.
6. On utilise les décompositions en produits de nombres premiers de 60 et 70 et on trouve que : PPCM(60 ;70) = $2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

<u>*Autre méthode*</u> : PPCM(60 ;70) = $\dfrac{60 \times 70}{\text{PGCD}(60\ ;70)} = 420$

EXERCICE 22

1) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$
2) Le nombre de diviseurs de 84 est $3\ (= 2 + 1) \times 2\ (= 1 + 1) \times 2\ (1 + 1) = 12$. (*Voir exercices 10 et 21*).

   $172 = 2^2 \times 43$. Le nombre de diviseurs de 172 est $3\ (= 2 + 1) \times 2\ (1 + 1) = 6$
3) 4 divise 408 et 3 divise 408. Comme 3 et 4 sont premiers entre eux 12 divise 408.
4) PPCM(22 ; 136) = 1496
5) PGDD(46 ; 84) = 2 deux méthodes : divisions euclidiennes successives et décomposition en produit de facteurs premiers. Voir le ***CM***.
6) $168 = 5 \times 33 + 3$.

Voilà, ce corrigé paraît enfin, ouf, vous avez failli attendre presque une éternité ! Merci à PM et à PW !