LES NOMBRES ET LE CALCUL « Points de Départ » et l'Arrivée, c'est quand ?

EXERCICE 1

1. Parmi les nombres suivants, quels sont ceux qui sont des ***nombres décimaux*** :
$\frac{2}{5}$; $\frac{3}{7}$; 8 ; $\frac{6}{6}$; $\frac{4}{10}$; π ; $\sqrt{2}$. Expliquer ou justifier ou …
2. Egalité ***Vraie*** ou égalité ***Fausse*** ? $\frac{3}{7} = 0{,}4285714285$. Justifier.
3. Quel est le plus grand nombre décimal inférieur à $\frac{1}{3}$?
4. a) Poser la division de 1 par 7. En déduire l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.

   b) Donner, en justifiant *succinctement*, la valeur de la trente deuxième décimale du développement périodique de $\frac{1}{7}$.

EXERCICE 2

1. Ecrire un nombre entier à la place du point pour que l'écriture fractionnaire désigne :

Un entier naturel	Un décimal non entier naturel	Un rationnel non décimal
A = $\frac{\cdot}{85}$	**C** = $\frac{\cdot}{85}$	**E** = $\frac{\cdot}{85}$
B = $\frac{85}{\cdot}$	**D** = $\frac{85}{\cdot}$	**F** = $\frac{85}{\cdot}$

2. Idem avec 115, à la place de 85.

EXERCICE 3

1. Trouver plusieurs différentes procédures pour effectuer ***mentalement*** les calculs suivants :
a) 14 + 19 + 16 +11 *b*) 85 + 39 *c*) 85 – 39 *d*) 205 – 198
2. Trouver (*écrire le détail des calculs*) trois procédures différentes pour calculer ***mentalement*** le produit 24 × 15.
3. Diviser 903 par 37. Quel nombre doit-on au moins ajouter à 903 pour que le quotient entier augmente d'une unité ? Idem pour que le quotient diminue d'une unité (*indication* : on retranche un certain nombre à 903).
4. Peut-on déterminer le diviseur et le reste d'une division euclidienne sachant que le dividende est égal à 802 et le quotient à 14 ? Justifier.

EXERCICE 4

1. « Simplifier » les nombres suivants : $\mathbf{A} = \frac{843}{174}$; $\mathbf{B} = \frac{540}{126}$.
2. « Calculer » : $\mathbf{C} = \frac{8}{15} + \frac{7}{6}$; $\mathbf{D} = 3 \times \frac{7}{8}$; $\mathbf{E} = \dfrac{\frac{10}{21}}{\frac{24}{49}}$ et $\mathbf{F} = 2 - \frac{7}{9}$.
3. Montrer, sans effectuer la division, que $\frac{99}{120}$ est un nombre décimal.

EXERCICE 5

Comparer sans aucun calcul : ***a***) $\frac{257}{129}$ et $\frac{254}{129}$ ***b***) $\frac{15}{14}$ et $\frac{13}{12}$

Mettre sous forme d'une « fraction » le nombre : $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}}$. Oh non… Sissi.

« Calculer » : $\frac{2}{3} \times \dfrac{\frac{5}{4} - \frac{1}{2} + \frac{7}{6}}{1 + \frac{2}{5}}$. On calcule « à la main » ? Non, Sissi, bis !!!

EXERCICE 6 : calculatrice non autorisée pour cet exercice !

1. Simplifier, en explicitant les calculs, les fractions suivantes :
$\mathbf{A} = \frac{352}{44}$; $\mathbf{B} = \frac{4242}{2828}$; $\mathbf{C} = \frac{242424}{323232}$; $\mathbf{D} = \frac{32032}{77}$

2. Comparer, en précisant la méthode utilisée, les nombres **E** et **F** suivants :
$\mathbf{E} = 1 + \frac{9}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{3}{7^3}$; $\mathbf{F} = 2 + \frac{1}{7} + \frac{6}{7^2} + \frac{5}{7^3}$

~~EXERCICE 7~~

Exercice à chercher en autonomie ! Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est ***vraie*** ou ***fausse*** en justifiant.

1. Tout nombre multiple de 3 est un multiple de 9.
2. Tout nombre multiple de 5 et 7 est un multiple de 35.
3. Tout nombre multiple de 4 et 6 est divisible par 24.
4. Tous les nombres premiers sont impairs.
5. Il existe des nombres rationnels qui sont des décimaux.
6. $\frac{1155}{84}$ est un nombre décimal.
7. Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}^2 - \boldsymbol{n} + 41$ est un nombre premier.

~~EXERCICE 8~~

~~Quels sont les critères de divisibilités que vous connaissez ? Pouvez vous les justifier ?~~

EXERCICE 9

Deux coureurs automobiles ***Pat*** et ***Polo*** partent en même temps de la ligne de départ un lundi à 14h et font plusieurs tours d'un même circuit. ***Pat*** fait le tour du circuit en 36 minutes et ***Polo*** en 30 minutes. Les deux coureurs roulent pendant 24h (*Grande course internationale : « Les 24 heures de Pat et Polo » !*). Trouver à quels moments ils se trouvent ensemble sur la ligne de départ et indiquer pour chacun de ces moments le nombre de tours parcourus par chacun depuis le départ.

EXERCICE 10

Patrick possède 360 billes. Il décide de les ranger dans des sacs. Chacun des sacs doit contenir le même nombre de billes, qui doit être compris entre 20 et 50, mais Patrick dispose de moins de 10 sacs. Quelles sont les différentes possibilités de rangement des ces billes dans ces sacs ?

EXERCICE 11

Polo possède 108 billes rouges et 135 billes noires, il veut faire des paquets de telle sorte que :

- Tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges ;
- Tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires ;
- Toutes les billes rouges et toutes les billes noires soient utilisées.

Quel nombre maximal de paquets pourra-t-il réaliser ? Combien y aura-t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

EXERCICE 12

Dans la division euclidienne d'un nombre non nul par 7, on trouve un quotient égal au double du reste. Trouver toutes les valeurs possibles du dividende, du quotient et du reste de cette division.

EXERCICE 13

On « remarque » les curiosités numériques suivantes, *ah bon* :

$$65^2 = 4225 \text{ et } 6 \times 7 \times 100 + 25 = 4225 ;$$
$$145^2 = 21\,025 \text{ et } 14 \times 15 \times 100 + 25 = 21\,025 ;$$
$$1275^2 = 1\,625\,625 \text{ et } 127 \times 128 \times 100 + 25 = 1\,625\,625.$$

1. Généraliser cette remarque en proposant une « relation » mathématique.
2. Vérifier cette « relation » sur deux autres exemples. 3. Démontrer cette « relation ».

EXERCICE 14

1. Dans cette question, aucune division n'est à poser. Les réponses doivent être justifiées.

a. Sachant que $57\,148\,468 = 3\,361\,674 \times 17 + 10$, donner le quotient et le reste de la division euclidienne de : 57 148 468 par 17.

b. Sachant que $84\,279\,733 = 4\,957\,630 \times 17 + 23$, donner le quotient et le reste de la division euclidienne de : 84 279 733 par 17.

c. En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de :
$57\,148\,468 + 84\,279\,733$ par 17, puis le quotient et le reste de la division euclidienne de : $57\,148\,468 \times 2$ par 17.

2. Dans la division euclidienne d'un nombre $\boldsymbol{a}$ par 17, on note $\boldsymbol{q}$ le quotient et $\boldsymbol{r}$ le reste. Dans la division euclidienne d'un nombre $\boldsymbol{a'}$ par 17, on note $\boldsymbol{q'}$ le quotient et $\boldsymbol{r'}$ le reste. Déterminer, en justifiant votre réponse, le quotient et le reste :

a. dans la division euclidienne de $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a'}$ par 17.

b. dans la division euclidienne de $2\boldsymbol{a}$ par 17.

EXERCICE 15

Une école regroupe tous ses élèves pour organiser un grand jeu par équipes.

- Si les élèves sont groupés par 7, il en reste 6.
- Si les élèves sont groupés par 11, il en reste 10 mais il y a 8 équipes de moins.

Combien y-a-t-il d'enfants dans cette école ? (*Donner plusieurs méthodes de résolution*).

Une piste pour les ceusses qui n'aiment pas la modélisation algébrique. En ajoutant un élève à l'effectif de cette école, on aurait alors un nombre « juste » d'équipes de 7 joueurs et de 11 joueurs. On doit donc chercher un multiple commun à 7 et à 11, c'est-à-dire : 77, 154, 231, … (*On laisse trankill le « 0 », why ?*). L'effectif est donc soit 76 (= 77 – 1), soit 153 (= 154 – 1), soit 230 (= 231 – 1), … On teste les valeurs possibles… Très bonne démarche !

EXERCICE 16

1. Ecrire l'égalité caractéristique traduisant la division euclidienne de 1001 par 11.
2. Soit $\overline{mcdu}$ un nombre à quatre chiffres écrit en base 10.

   Vérifier que $\overline{mcdu} = 1001 \times m + 99 \times c + 11 \times d - m + c - d + u$

3. A partir de la question précédente, énoncer et démontrer un critère de divisibilité par 11 pour les nombres inférieurs à 9 999.

   Utiliser ce critère pour trouver trois nombres de quatre chiffres, multiples de 11, « ayant » 38 centaines.

EXERCICE 17: ordre et priorité

1. Soit $\mathbf{E} = x + \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$. Calculer **E** pour les valeurs de x suivantes : 1, –3 et $\dfrac{4}{3}$.

2. Calculer $\sqrt{8^2 + 6^2}$.

EXERCICE 18

1) Donner une valeur décimale arrondie des nombres $A = \dfrac{18270}{45045}$ et $B = \dfrac{7714}{19019}$.

2) Peut-on en déduire que **A** = **B** ? Justifier…

EXERCICE 19

1. Décomposer le nombre 729 en un produit de facteurs premiers.

2. Quel est le plus petit nombre entier par lequel il faut multiplier 729 pour obtenir le carré d'un entier ? Quel est cet entier ?

EXERCICE 20

Trouver tous les nombres entiers naturels a et b qui vérifient $a^2 - b^2 = 25$.

EXERCICE 21

1. Quel est le nombre de diviseurs de 60 ? Lister tous les diviseurs de 60.
2. Quel est le nombre de diviseurs de 70 ? Lister tous les diviseurs de 70.
3. Quel est le PGCD de 60 et 70 ?
4. Quel est le PPCM de 60 et 70 ?

EXERCICE 22

1. Décomposer 84 en produit de facteurs premiers.
2. Déterminer le nombre de diviseurs de 84, de 172.
3. D'après les critères de divisibilité, 408 est-il divisible par 12 ?
4. Déterminer le PPCM de 136 et 22.
5. Déterminer le PGCD de 46 et 84 par deux méthodes.
6. Déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de 168 par 5.

On en a *momentanément* fini avec cette fiche d'exercices, un peu « fourre-tout », certes, mais tout à fait nécessaire pour une remise dans le « bain ».