La PROPORTIONNALITE : un point de vue…

A : Du côté des MATHEMATIQUES, éléments de repères théoriques :

1. Une situation adaptée d'un livre de l'école élémentaire : « ***le prix du fromage » (Classe : ?).***

Une affiche est mise au tableau : Poids : 1000g Prix : 16 euros.

Chaque groupe de deux élèves dispose de cinq cartons :

Poids : 3000g Prix : ?
Poids : 1500g Prix : ?
Poids : 500g Prix : ?
Poids : 2500g Prix : ?
Poids : 1040g Prix : ?

et de cinq « étiquettes-prix » à découper : 48 euros, 40 euros, 24 euros, 116 euros et 60 euros.

Une fiche récapitulative :

Poids :	Prix :	Explications :

Consigne : ***cherchez les cartons que vous pouvez compléter avec les « étiquettes-prix » qui conviennent. Attention, certaines étiquettes ne conviennent pas et d'autres manquent.***

Dans un deuxième temps, les élèves auront à calculer le prix de 3750g de fromage.

Des questions pouvant être posées dans le cadre des « ***questions complémentaires*** » ou du problème III au CRPE. Quelles procédures vont utiliser les élèves ? Quelles justifications donner à la « mise en scène » ? A quel niveau peut être proposé ce problème ? …

2. Définitions classiques et usuelles :

2.1. **Deux suites de nombres ($x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$) et ($y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$) sont proportionnelles s'il existe un nombre k tel que, pour tout i, $y_i = k \times x_i$ (*avec i allant de 1 à n*).**

k est appelé le **coefficient de proportionnalité**.

Notations usuellement utilisées au cycle III et au cycle IV :

	x_1	x_2	x_3	…	x_n	
$\times$ k						**Multiplier par k**[1]
	y_1	y_2	y_3	…	y_n	

2.2. **Cas particulier appelé $\boxed{\text{proportion}}$: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \ldots = \frac{y_i}{x_i}$.**

Pour des nombres non nuls, cette écriture est équivalente à : $\boxed{y_1 \times x_2 = x_1 \times y_2}$ (Egalité des produits en croix : *attention au « sens » et au « moment » où cette propriété est enseignée, collège !!!*).

[1] Si on multiplie par **k** pour « passer » de x_i à y_i, on divise par **k** ou on multiplie par $\frac{1}{k}$ pour « passer » de y_i à x_i. Ce qui donne toute son importance à la notion de $\boxed{\text{QUOTIENT}}$.

3. Un autre problème (*pour quel niveau de classe ?*)

Un appareil coûtait 750 euros en décembre. Son prix augmente de 20% en janvier : donner alors le nouveau prix ? Donner un exemple de procédure – élève.

Pour une somme en euros de :	**L'augmentation est de :**	**Argument** :
100	20	
50	10	Car : $50 = 100 \div 2$
700	140	Car : $700 = 7 \times 100$
750	150	Car : $750 = 700 + 50$

4. Propriétés dites de linéarité : elles caractérisent toute situation de proportionnalité

Les deux suites de nombres ($x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$) et ($y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$) sont proportionnelles.

4.1. SI ($x_1 + x_2$ est un terme de la première suite) ALORS ($y_1 + y_2$ est un terme de la deuxième suite).
(***Propriété d'ADDITIVITE ou de linéarité additive***)

4.2. SI (un terme x de la première suite est de la forme $p \times x_1$) alors (son image y est de la forme $p \times y_1$).
(***MULTIPLICATION par un scalaire (= nombre) p ou propriété de linéarité multiplicative***)

Une autre formulation de cette « propriété » **4.2.** : la « conservation des rapports » $\boxed{\frac{py_1}{px_1} = \frac{y_1}{x_1}}$

5. Fonction linéaire : « modélisation mathématique » d'une situation de proportionnalité.

Définition : Une fonction linéaire est une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \mathbf{a} \times x.$$

Notation : $\boxed{f(x) = \mathbf{a}\, x}$.

La constante **a** est appelée ***coefficient de linéarité***.

Les deux propriétés du paragraphe **4.** sont aussi caractéristiques d'une fonction linéaire f :

(i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$.	(ii) $f(\mathrm{p} \times a) = \mathrm{p} \times f(a)$.

Rappel : la représentation graphique d'une fonction linéaire est une **droite** passant par l'origine du repère[2].

A notre niveau, quelles sont les « situations » qui relèvent de la proportionnalité ?

Les problèmes de « juste » répartition et de partages proportionnels, les problèmes de scrutins proportionnels, les calculs de valeur moyenne, les problèmes de pourcentage et d'échelles, les problèmes liés à l'agrandissement ou à la réduction de figures géométriques (utilisation du théorème de Thalès) et les problèmes d'homothéties. *Se reporter aux exercices du **TD** sur la proportionnalité.*

En fait, la proportionnalité n'est pas à proprement parler une notion mathématique, mais elle définit ce qu'on appelle, au sens de Vergnaud, un **champ conceptuel**[3] : celui des problèmes liés à la multiplication dans $\mathbb{R}$.

[2] Ce point sera repris lors des travaux sur la notion de fonction. ***Attention*** ! Ce n'est pas parce que des points sont alignés avec l'origine d'un repère qu'on a affaire à une situation de proportionnalité. C'est dans l'autre « sens » que ça marche. Si on a une situation de proportionnalité, alors on a « l'alignement » avec l'origine.

[3] Se reporter aux travaux de Gérard VERGNAUD. Nous vous conseillons de vous procurer la brochure : « **Résolution de Problèmes au Cycle III** », collection « ***Le Moniteur de Mathématiques*** », chez NATHAN, avant 2000...

B : ANALYSE DIDACTIQUE :

1. *Apparition des situations de proportionnalité dés le CE, avec la multiplication* :

1.1 Deux exemples d'énoncé à comparer :

- Une mère de famille veut offrir 5 bonbons à chacun de ses 3 enfants. Combien de bonbons achètera-t-elle ?
- J'achète 3kg de pommes de terre à 5 euros le kg. Combien vais-je payer ?

1.2 La différence des énoncés précédents apparaît en modifiant ainsi le deuxième énoncé :

J'achète 3,5kg de pommes de terre à 1,80 euro(s) le kg. Combien vais-je payer ?

Les deux premiers énoncés utilisent des variables discrètes (des nombres entiers) et l'écriture : l'égalité : $3 \times 5 = 5 + 5 + 5$ est adaptée. Cette égalité traduit l'utilisation en acte de la linéarité.

Le dernier énoncé fait apparaître des variables continues, divisibles. La multiplication ne peut être réduite à une suite d'additions (sauf si on change d'unité).

Les deux derniers énoncés montrent bien la proportionnalité comme une relation entre deux grandeurs (comme on a l'habitude de noter cette situation dans un « fameux » tableau), sans présager de la technique avec laquelle on va effectivement calculer le nombre « manquant » :

kg	1	3
euro	5	?

kg	1	3,5
euro	1,80	?

2. De nombreuses recherches en Didactique des Mathématiques montrent que les procédures du type linéarité (on dit aussi ***isomorphisme***) sont celles que les élèves mettent le plus volontiers en avant.
Elles permettent souvent à l'élève de donner du sens aux calculs qu'il effectue. (*Voir l'exemple sur le problème de pourcentage*).

« Nuance » à apporter : un changement de valeurs numériques (qu'on appelle « variable de situation » ou « variable didactique ») peut entraîner une modification de procédures. Ainsi, si le coefficient de proportionnalité est « simple » (doubler ou tripler), c'est celui-ci qui sera utilisé.

3. « Manipulation[4] » simultanée de plusieurs proportionnalités :

Exemple 1. Un professeur des écoles commande 4 boîtes de feutres. Dans chaque boîte, il y a 8 feutres. Un feutre coûte 2 euros. Combien le professeur des écoles paye-t-il en tout ?

Exemple 2. A l'anniversaire de Nicolas, il y a en tout 5 garçons et 4 filles. Combien peuvent-ils former de couples si chaque garçon danse avec chaque fille et chaque fille avec chaque garçon ?

Exemple 3. En cinq minutes une machine d'imprimerie effectue le tirage de 50 journaux.
Compléter alors les tableaux ci-dessous :

durée en minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1	50
5	3	

durée en minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1	50
	5	50

durée en minutes	nombre de machines	nombre de journaux
5	1	50
	2	500

Exemple 4. L'aire d'un rectangle de longueur 50cm est de 200mm^2. Déterminer sa largeur.

[4] Le mot « **manipulation** » n'est pas vraiment pertinent, il est souvent connoté : on ne met pas tous le même sens lorsqu'on l'utilise ; ce qui explique les guillemets.

Consigne :

a) Résoudre ces exercices.

b) Recenser les « ressemblances » et les « différences » de structures entre les énoncés ?

On peut donc distinguer :

(i) La structure de ***proportion simple composée*** (*exemples 1 et 3*) appelée aussi *enchaînement de deux proportionnalités*.
Un enchaînement des fonctions linéaires sous-jacentes s'appelle une ***composition de fonctions***.

(ii) La structure de ***produit de mesures*** appelée aussi *proportionnalité multiple* (*exemples 2 et 4*). Dans de telles situations, il suffit de fixer certaines variables pour les transformer en situation de proportionnalité simple.

(iii) Si on fixe le résultat, on obtient une situation de proportionnalité inverse : l'une des variables est proportionnelle à l'inverse de l'autre (*exemple 4*).

4. Les extensions du concept de proportionnalité.

Un grand nombre de difficultés concernent l'extension des opérations de pensée nées dans des contextes familiers (comme les situations de partage ou de dépense) à des contextes moins familiers et conceptuellement difficiles comme :

- le volume, la masse volumique, l'agrandissement et la réduction en collège.
- la mécanique, la thermique ou l'électrocinétique au lycée.

5. A l'école élémentaire :

Outre les considérations sur les divers aspects de la proportionnalité et sur les difficultés que rencontrent les élèves dans son apprentissage, les choix effectués pour son étude au **Cours Moyen** sont guidés par l'interprétation que nous faisons des programmes de l'école primaire et du collège.
Les programmes des différentes classes du **collège** prévoient une étude systématique de la proportionnalité et de ses applications, avec la mise en place progressive de compétences générales (par exemple, pour appliquer un taux de pourcentage en sixième, calculer un pourcentage ou un coefficient de proportionnalité et utiliser la proportionnalité entre temps et distance parcourue dans le cas d'un mouvement uniforme en cinquième, utiliser l'égalité $d = v \times t$ en classe de **quatrième,** ...). Celles-ci se substitueront aux procédures locales et personnelles utilisées auparavant par les élèves. L'étude de la **fonction linéaire** (cas particulier de **fonction affine**), en fin de collège, fournira un cadre algébrique pour le traitement des problèmes de proportionnalité.

À l'école primaire, on n'enseigne donc pas de façon systématique la proportionnalité. Les élèves y sont confrontés à des problèmes variés dont la résolution met en jeu divers aspects de la proportionnalité.

5.1. Priorité au RAISONNEMENT CONTEXTUALISE et VERBALISE :

Il s'agit donc de faire fonctionner la proportionnalité comme « **outil** », sans l'étudier pour elle-même, et, par conséquent, d'amener les élèves à utiliser des raisonnements qui mettent en œuvre implicitement différents aspects de la proportionnalité, en s'appuyant sur le sens donné à la situation traitée, raisonnements qui gagneront pour cela à être verbalisés plutôt que formalisés.

Ainsi, l'idée de « **tant de fois plus** » ou « **tant de fois moins** » est ici importante (comme dans la situation LE PRIX DU FROMAGE : « *Si j'achète trois fois plus de fromage, je paierai trois fois plus cher ...* ») : elle marque l'utilisation « en acte » de l'aspect multiplicatif de la linéarité.

Associée à l'aspect additif de la linéarité (*utilisé également en relation avec la sémantique de la situation*), elle permet le traitement de nombreux problèmes.

Dans la même situation appelée LE PRIX DU FROMAGE, proposée au **CM1**, où est donné le prix de 1000g de fromage, les élèves peuvent par exemple chercher le prix de 3750g de fromage, en calculant successivement le prix de 3000g (*trois fois plus que pour 1000g*), celui de 500g (*la moitié du prix de 1000g*), de 250g (*la moitié du précédent*) et enfin additionner les trois prix obtenus.

Le coefficient de proportionnalité peut lui aussi être utilisé, lorsqu'il a du sens dans le contexte de la situation choisie (relations entre grandeurs de même nature, par exemple) : situations de mélange (« *10g de sucre pour 20g de beurre* » peut, dans la situation RECETTES, inciter à utiliser le fait que la masse de sucre soit moitié de celle de beurre).

Avant tout, ce sont les procédures personnelles qui sont favorisées, celles qui correspondent à l'interprétation que chaque élève fait de la situation. Le choix des valeurs attribuées aux principales variables des situations permet à l'enseignant de favoriser le recours à telle ou telle procédure. On notera l'importance du **Calcul Mental** : la perception rapide des relations entre les nombres permet une mise en évidence plus sûre des relations entre grandeurs.

Au **CE2**, l'approche de la proportionnalité se fait à travers l'étude de problèmes multiplicatifs.

Les propriétés de linéarité sont utilisées implicitement dans de cas de proportionnalité simple où, dans la plupart des cas, l'image de 1 est connue.
Par exemple, dans la situation « *Huit billes par jour* », pour calculer le nombre de billes au bout de 20 jours, on peut doubler celui de 10 jours et pour 22 jours, ajouter les billes correspondant à 20 jours et à 2 jours.

Au **CM1**, les élèves sont ainsi confrontés à des situations qui, pour leur traitement, ne nécessitent que l'utilisation de rapports entiers (exprimables par « ***n* fois plus** » ou « ***n* fois moins** ») ou rapports fractionnaires simples (du type « **moitié de** » ou « **quart de** », ...).

Au **CM2**, une procédure plus générale, qui permet de se tirer d'affaire quels que soient les nombres, sera envisagée lorsque le « bricolage » ne fonctionne plus. Il s'agit du **passage par l'unité**, qui est un cas particulier de l'utilisation des propriétés de linéarité. Ainsi pour calculer le prix de 237g de fromage connaissant le prix de 100g, il peut être utile de chercher le prix de 1g. Cette procédure ne doit cependant pas être introduite trop précocement, notamment dans les situations (*comme celle qui est évoquée ici*) où l'image de l'unité n'a pas réellement de sens dans le contexte évoqué.
Dans la perspective choisie, les procédures qui ne correspondent pas à des raisonnements possibles dans le contexte des situations travaillées sont évitées. Elles risquent de conduire les élèves à ces « *automathismes* », justement dénoncés par Stella Baruk et aussi par d'autres auteurs beaucoup plus avancés en DdM.
Il appartient au **collège** d'enseigner des procédures générales, utilisables quels que soient les types de nombres envisagés et au **lycée** de modéliser et de formaliser ces procédures.

5.2. Attention aux « FORMALISATIONS » trop précoces ! ...

On entend ici par « formalisation », la synthèse d'une notion sous forme de mots spécifiques (proportionnalité, par exemple), de signes, de schémas ou de représentations.

Dans la mesure où, au **CM**, on vise principalement une pratique de la proportionnalité qui permettra de mieux la définir plus tard, le terme même de « proportionnalité » ne sera éventuellement introduit que tardivement, au **CM2**, pour qualifier des situations dans lesquelles certains types de raisonnement peuvent être utilisés.
Des situations de non-proportionnalité sont, bien entendu, à étudier en parallèle.

Le recours au (*fameux*) « **tableau** » est fréquent dans le traitement de situations de proportionnalité. Parfois, il est même, pour les élèves, un déclencheur pour la mise en route de certaines procédures (*à bon ou à mauvais escient !*), en particulier lorsque la situation est déjà proposée sous cette forme. L'élève fait alors l'économie du raisonnement qui conduit à la solution. Pourtant, des investigations faites par une équipe de l'**INRP**, en classe de **sixième**, montrent que, spontanément les élèves ont rarement recours à la mise en tableau des données pour traiter des situations de proportionnalité. Ils préfèrent décrire, par des mots « ordinaires », éventuellement agrémentés de signes personnels (traits, flèches, ...), les raisonnements qu'ils conduisent. ***Il convient donc d'être vigilant quant à l'utilisation systématique du (fameux) tableau de proportionnalité***.

Nous ne cherchons donc pas à le faire utiliser systématiquement par les élèves et privilégions toujours les solutions personnalisées mais sans nous interdire, au moment d'une synthèse par exemple, de traduire sous cette forme les différentes étapes du raisonnement d'un élève.

Les graphiques utilisant des coordonnées entières constituent un autre mode de représentation de la fonction associée à une situation de proportionnalité. La maîtrise de telles représentations suppose une familiarité avec des compétences complexes : graduation des axes, repérage axe vertical – axe horizontal, interprétation des points comme couples de nombres, interprétation des pentes des droites et des changements de pentes, signification à attribuer ou non à tous les points des droites... Ces compétences ne sont globalement guère en place avant la fin du collège. Il convient donc de faire un usage modéré et prudent de telles représentations. Les élèves peuvent être mis en situation de lire et d'interpréter des représentations graphiques, ils peuvent constater l'alignement des points dans le cas de la proportionnalité, mais cette propriété est d'usage limité (*car très coûteuse*) et ne pourra être justifiée que tardivement, lors de l'étude de la fonction affine et de la fonction linéaire, en classe de troisième.

5.3. Pourcentages et échelles :

Les notions de **pourcentage**, d'**échelle**, de **vitesse moyenne** n'ont pas à faire l'objet d'une étude systématique à l'école primaire.

Elles sont conceptuellement difficiles et leur compréhension suppose déjà une bonne maîtrise de la proportionnalité, dont elles sont plutôt des notions dérivées.

Des situations mettant en jeu ces notions peuvent cependant être envisagées, dans des cas particuliers simples, à l'école primaire. Les problèmes correspondant sont alors résolus en référence au sens de ces notions, qu'ils permettent dans le même temps de préciser par les mêmes types de raisonnement que les autres situations de proportionnalité.

(*Voir l'exemple déjà traité sur les pourcentages*).

La procédure standard pour calculer le montant de la hausse sera enseignée en classe de **sixième** (pour « prendre » 20 % de 750, on calcule $750 \times 0,2$) et plus tard, en classe de **troisième**, les élèves trouveront directement le nouveau prix (en calculant $750 \times 1,2$).

Ces types de situations sont proposés au **CM2**, dans des cas où le **calcul mental** permet de contrôler les différentes étapes du raisonnement. Aucune technique spécifique n'est donc mise en place à l'école primaire.

En revanche, il est essentiel, pour préparer le travail du **collège**, que les élèves aient donné du sens à des expressions comme :

- Pour les pourcentages, **20 %**, « 20 pour 1 00 », cela veut dire « **20 chaque fois qu'il y a 100** ».
- Pour les vitesses, **20 km/h**, « 20 km/heure ». cela veut dire: « **20 km pour chaque heure** ».
- Pour les échelles, **20/100**, « 20 centièmes », cela veut dire : « **20 cm sur le papier chaque fois qu'il y a 100 cm dans la réalité** ». …

En particulier, l'intérêt des pourcentages sera mis en évidence en comparant la part de sous-populations dans des populations différentes (« *Y a-t-il plus de garçons dans cette école de 250 élèves avec 100 garçons ou dans cette autre école de 400 élèves avec 152 garçons ?* »). Il est alors utile de se ramener à un référent commun, de faire comme si chaque école avait le même nombre d'élèves, ... et le référent 100 est souvent utilisé (*par convention*), car commode pour se représenter mentalement les proportions.

Eléments de BIBLIOGRAPHIE :

♣ Les ouvrages référencés dans les ***cours magistraux précédents*** sont toujours d'actualité !

♣ **ERMEL** Apprentissages numériques et résolution de problèmes, **CE2**, **CM1** et **CM2**, Hatier 1996, 1997 et 1999. Une actualisation de la collection ERMEL existe et « colle » aux programmes de 2002. Depuis, il y a d'autres publications : Cf. les publications du SCEREN.

♣ B.O.E.N. n°44 du 5 décembre 1996, pages 2950 et 2951.

♣ Brochure de 1987 de (*la trop éphémère*) **COPREM** (Commission Permanente de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques) : **La Proportionnalité** ; **Le Calcul numérique.**

♣ … Les programmes, 2002, 2007, 2008 et 2015-2016, avec les documents officiels complémentaires : sites « officiels » (Eduscol ou Education.gouv) !

La PROPORTIONNALITE, suite

C. Du côté du C.R.P.E. : quelques conseils !

1) CONTENUS MATHEMATIQUES : (*un survol ! Voir les pages précédentes*).

Les exercices peuvent porter sur :

a) l'identification d'un certain nombre de problèmes comme étant des situations de proportionnalité : recettes de cuisine, pourcentages, échelles, vitesse, agrandissement et réduction de figures (*théorème de Thalès*).

b) la reconnaissance d'une situation de proportionnalité ou non à partir des propriétés rencontrées au §**A.** ou à partir d'une représentation graphique.

c) le calcul des valeurs manquantes dans une situation de proportionnalité par différents procédés :

- en calculant le **coefficient de proportionnalité**,
- en utilisant les **propriétés de linéarité**,
- en utilisant « **les produits en croix** » ou « **la règle de trois** » ou « **le retour à l'unité** »,
- en utilisant un **graphique**.

2) « QUESTIONS COMPLEMENTAIRES » ou Problème 3 du CRPE :

Dans le cas où on étudie des productions d'élèves, l'analyse peut porter sur :

a) sur la description des procédures utilisées par les élèves en utilisant le vocabulaire mathématique approprié et adapté.

b) sur le repérage des erreurs :

- dans les calculs effectués,
- dans le choix de la procédure. En particulier sur l'utilisation d'une fonction additive à la place d'une fonction multiplicative.

c) sur l'énumération des compétences nécessaires pour résoudre l'exercice.

N.B. La plus ou moins grande familiarité du domaine de référence de l'énoncé ou éventuellement de l'ordre de présentation des informations peuvent expliquer certains résultats d'élèves.

Dans le cas où on étudie des situations liées à l'apprentissage ou des « formes » de volet pédagogique, l'étude peut porter sur :

a) sur les quatre cadres dans lesquels la proportionnalité peut être travaillée à l'école primaire :

- ***le cadre des grandeurs*** : utiliser des nombres « concrets », correspondant à des quantités ou des mesures ; le choix d'unités appropriées permet de se ramener au cadre numérique.

Dans ce cadre des grandeurs, il est possible de donner du sens à certaines manipulations sur les nombres qui interviennent (*exemple* : « quand j'achète quatre fois plus, je dois payer quatre fois plus » met en jeu la propriété multiplicative de la linéarité).

- ***le cadre numérique*** : les nombres sont alors manipulés de façon abstraite, en référence uniquement aux propriétés de la linéarité.
- ***le cadre géométrique*** : agrandir ou réduire une figure.
- ***le cadre graphique*** : propriétés des représentations graphiques de fonctions linéaires.

Il faut connaître des exemples dans chacun de ces cadres.

b) sur les variables didactiques mises en jeu dans les situations de proportionnalité à étudier :

- les nombres proposés : le choix du coefficient de proportionnalité ; les valeurs numériques en jeu (nombres « petits » ou « grands », entiers ou décimaux, supérieurs ou inférieurs à 1),
- parfois la mise sous forme d'un tableau ou non des données.

Pour aller plus loin :
Légitimation de quelques techniques (« ***retour à l'unité*** », « ***règle de trois*** », « ***les produits en croix*** »).
Quelques exercices emblématiques relativement à la proportionnalité, au niveau du cycle III.

1) Du côté des techniques et procédures de résolution.

Un EXEMPLE plutôt humoristique, mais tout à fait pertinent : le « problème de DARCOS »[5].

Enoncé. **Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien coûtent 14 stylos ?**

Consignes. Résoudre cet exercice, justifier la technique employée, proposer alors une autre technique de résolution et la justifier[6].

Quelques éléments d'analyse, ça peut servir avec les « ***questions complémentaires*** ».

- Cet exercice est « conforme » aux programmes 2008 et à ceux d'aujourd'hui. Tout le monde a reconnu la proportionnalité *implicitement*, même s'il peut y avoir des réductions ou des remises, en fonction du nombre de stylos vendus, mais bon, dans ce cas, la question est idiote ! Restons dans le cadre scolaire. Il s'agit d'un problème à valeur manquante (**PVM**) ou de recherche d'une quatrième proportionnelle. En effet, une première information est donnée « liant » deux « grandeurs » : prix et quantité de stylos, le but de l'exercice est donc de trouver la valeur manquante avec l'aide d'une deuxième information sur l'une des deux grandeurs en jeu.
- Les valeurs numériques en jeu favorisent une diversité de procédures de résolution, parmi les plus usuelles, on peut noter :

La **linéarité additive** en acte (utilisation des relations arithmétiques entre les nombres en jeu).	On a : 14 = 4 + 4 + 4 + moitié de 4, donc pour trouver le prix de 14 stylos, on effectue l'addition suivante : 2,42 + 2,42 + 2,42 + moitié de 2,42.
La **linéarité multiplicative** (idem ci-dessus)	On a : $14 = 3{,}5 \times 4$, donc on calcule le produit : $3{,}5 \times 2{,}42$.
Le retour à l'unité : on dispose en effet de toutes les informations pour déterminer le prix d'un stylo.	Prix d'un stylo : $2{,}42 \div 4 = \mathbf{U}$, d'où le prix de 14 stylos : $14 \times \mathbf{U}$. *Un souci dans cet exemple* : le prix unitaire met en jeu des dixièmes de centime d'euro !
L'égalité des produits en croix (*Attention à la formulation abusive souvent entendue : « on fait **le produit en croix** », c'est faux !*). Il y a deux produits !	Le « tableau de proportionnalité ». *stylos* : 4 ; 14 ***prix*** : 2,42 ; ? Les « produits en croix » égaux dans ce cas sont : $\boxed{4 \times ? = 14 \times 2{,}42}$. On choisit la technique qu'on veut pour déterminer la valeur manquante. En particulier, on n'est pas obligé de « faire » (($14 \times 2{,}42) \div 4$!).

[5] Un mot a été changé dans cet énoncé. En fait l'énoncé original parlait de « crayon » et pas de « stylo ». Ca ne change rien quant à la nature de l'exercice !
[6] Ca ressemblerait-y-pas à un début de « ***questions complémentaires*** » ? Encore !

La (*fameuse*) « ***règle de trois*** ». Elle était ***parlée***, ***jouée***, voire ***mimée*** et reposait sur une sorte de rite « imposé » par le maître **M**.	« **M** : Que cherche-t-on ? **E** : Un prix. **M** : Que sait-on sur les prix ? **E** : on paie 2,42 euros[7] pour 4 stylos. DONC pour 1 crayon, il en faut 4 fois moins, c'est-à-dire 2,42 ÷ 4. (*ECRITURE d'un premier calcul intermédiaire* : $$\frac{2{,}42\ €}{4}$$ **E** (*suite*) : pour 14 stylos, on paiera donc 14 fois plus. $$\frac{2{,}42\ € \times 14}{4}$$ **M** : on simplifie et on commence TOUJOURS par la multiplication ». *Voilà, c'est fait !*

Une technique mathématique moderne : utilisation du concept de **fonction (linéaire)** et des **propriétés de linéarité**.	On appelle f la fonction linéaire qui au nombre de stylos associe leur prix. On dit qu'on connaît l'image de 4 et on doit trouver l'image de 14. On a $f(4) = 2{,}42$, on cherche $f(14)$. <u>*Techniques de résolution :*</u> • $f(14) = f(3{,}5 \times 4) = 3{,}5 \times f(4) = 3{,}5 \times 2{,}42$. • $f(14) = f(14 \times 1) = 14 \times f(1) = 14 \times 2{,}42 \div 4$ $= 8{,}47$ (*On a enfin la réponse !*). • …
Les techniques ci-contre sont très efficaces dans le cas d'une proportionnalité multiple. *Par exemple.* « *Trois peintres ont besoin de cinq heures et demi pour peindre un mur d'une surface de 129 m². Combien de temps cinq peintres ont-ils besoin pour peindre une surface de 358 m² ?* ». <u>*Remarque*</u> : on fait une hypothèse de proportionnalité, il n'y a pas de paresseux parmi ces peintres et le travail se fait de la même façon !	On note f la fonction, telle que l'image de l'image de 3 et de 129 soit égale à 5,5. On a : $f(3\ ;\ 129) = 5{,}5$. On cherche $f(5\ ;\ 358)$. $f(5\ ;\ 358) = f(3 \times 5 \div 3\ ;\ 2 \times 129)$ $= 5 \div 3 \times 2 \times f(3\ ;\ 129)$ $= 10 \div 3 \times 5{,}5$ = (*A calculer*). Pas mal !

[7] Cette unité monétaire n'existait pas encore dans le temps où cette « comptine » était enseignée. Les programmes 2008 la remettent au goût du jour !

2) <u>Quelques exercices du niveau cycle III et quelques « friandises »</u>

- (***CE2, Cap-Math***). TIM fait des pas beaucoup plus grands que les sauts de PIAF. En effet, quand TIM fait deux pas, PIAF doit faire cinq sauts pour parcourir la même distance.

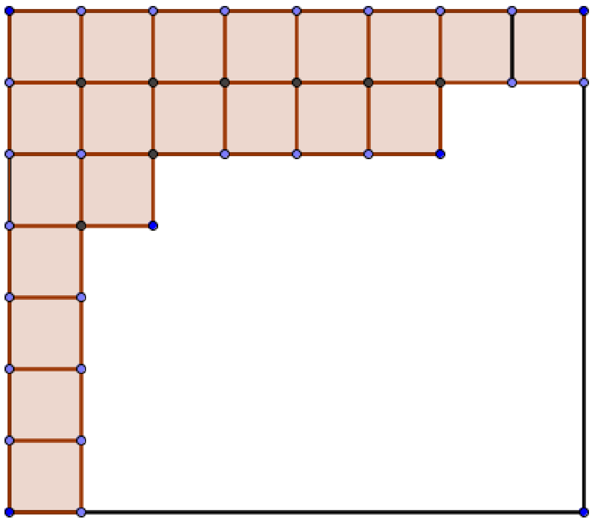
1) Si TIM fait 14 pas, combien de sauts PIAF doit-il faire ?
2) Si TIM fait 180 pas, combien de sauts PIAF doit-il faire ?
3) Si PIAF fait 60 sauts, combien de pas TIM doit-il faire ?
4) Si PIAF fait 730 sauts, combien de pas TIM doit-il faire ? …

- (***CM2, Euro-Math***).

17 DVD coûtent 204 euros. Quel est le prix de 23 DVD ?
6 jeux vidéo identiques coûtent 150 euros, donner le prix de 8 jeux, déduire alors le prix de 7 jeux ? …

- **Le carrelage.**

Voici le plan d'une chambre (rectangulaire) dont le sol doit être carrelé. Il a fallu trois heures pour poser les carreaux coloriés. Question. Combien de temps faut-il pour terminer l'ouvrage, dans les mêmes conditions ?



- **Le chocolat.** Cette tablette de chocolat pèse 250 g. On a besoin de 75 g pour réaliser une recette de cuisine. Quelle quantité doit-on prendre ?