Université ORLEANS
(~~IUFM~~) ESPE Centre Val de Loire
Site de BLOIS

Master Meef M1, 2017-2018

CM supplémentaire de MATHEMATIQUES

Patrick WIERUSZEWSKI

DENOMBREMENTS, STATISTIQUES et ***PROBABILITES***

~~*Avertissement* : dernier ***CM*** de l'année, mais on n'a pas tout vu !~~

Pour les « contenus » et notions non « directement » abordés lors des ***CM***, des documents complets seront déposés sur *CELENE*.

De quels points de contenus et notions s'agit-il ?

- Grandeurs et Mesures : document déposé sur *CELENE* ;
- Trigonométrie : idem ;
- Géométrie dans l'Espace : idem ;
- Sans oublier les TICE !

Des séances de ***TP*** (9h) spécifiques sont prévues au S2, en plus des séances normales de ***TD*** (21h).

DENOMBREMENTS

<u>Objectif :</u>

- ***Connaitre et savoir utiliser différentes procédures ou « stratégies » de dénombrement.***

PREAMBULE

Pour démarrer au mieux, on va chercher quelques définitions du côté de la MATERNELLE.

En effet, depuis ces classes jusqu'à aujourd'hui, c'est-à-dire, au niveau du Master, on se pose les mêmes questions relativement à l'acte de DENOMBRER.

La question est : « *combien cet-y ki n'en a ?* »

Pour ce faire, il semble nécessaire de « SAVOIR COMPTER ». Cf. l'article « *Le nombre au cycle II* » de F. et F. EMPRIN, in « Ressources pour la classe SCEREN ».

<u>Question</u> : quelles sont les TECHNIQUES de dénombrement les plus usuelles, les plus « faciles », les plus efficaces,...?

Pour **DENOMBRER** une quantité discrète, on doit connaitre la suite orale des nombres de « 1 en 1 ».

D'où quelques questions :

- Qu'est-ce qu'une **COLLECTION** (*discrète*) ? Le concept de collection correspond à une famille d'objets réunis par une propriété commune. *Exemple* ? *Hypothèse* : ce concept est installé par des activité de tris.
- Qu'appelle-t-on **DESIGNATION** ? Le concept de désignation revient à « *remplacer* » un OBJET par un symbole.

DENOMBRER, c'est attribuer à une COLLECTION une désignation particulière : son cardinal.

Il manque alors un dernier concept, indépendant pour mener à bien une activité de **DENOMBREMENT** par **COMPTAGE** : c'est l'**ENUMERATION**.

L'élève doit pointer une et une seule fois tous les éléments de la collection. Il s'agit de développer des procédures pour être sûr de ne pas oublier d'objet et ne pas pointer deux fois le même.

Avec des nombres raisonnablement “*grands*”, on sait compter, on s’en sort donc avec des moyens empiriques, voire des généralisations en acte.

(*On fait des “essais”, on cherche à écrire toutes les possibilités, on procède aussi par éliminations, on peut faire des dessins ou des graphiques,..).*

Mais avec de « vrais » grands nombres, on a besoin de résultats et de techniques mathématiques consistantes.

Il s’agit de dénombrer, *hihihi*, toutes les possibilités et donc de trouver une technique de comptage qui permet de n’en oublier aucune.

Les quelques exercices et exemples des diapositives suivantes illustrent quelques situations emblématiques relevant du DENOMBREMENT.

Ensuite, ces techniques de DENOMBREMENT vont avoir une grande pertinence dans le CALCUL des PROBABILITES. *A suivre dans la suite…*

Exercice 1

Au restaurant, on a le choix entre deux entrées, trois plats et quatre desserts. Combien de menus distincts peut-on constituer, sachant qu'un menu est un triplet (entrée, plat, dessert) ?

Exercice 2

On veut connaître le nombre de grilles de LOTO (*différentes*) qu'on peut produire en choisissant six nombres parmi les premiers nombres entiers « allant » de 1 à 49.

Exemple 3

Dans un collège, le quart des élèves n'étudient pas l'allemand, le tiers n'étudie pas l'anglais, 600 élèves étudient les deux langues et 100 élèves n'étudient aucune des deux langues. Combien d'élèves n'étudient que l'allemand ?

Indication. On a un exemple emblématique où le tableau à double entrée offre une possibilité technique de de résolution: on cherche des effectifs d'élèves comportant deux critères, on les croise dans un tel tableau.

Exemple 4

On s'intéresse aux chiffres « 2 », « 7 », « 1 », et « 8 ». Combien de nombres distincts de trois chiffres peut-on écrire avec les chiffres donnés ? Idem avec le chiffre « 0 » à la place du chiffre « 8 ».

Indication. Le recours à un « *arbre de choix* » parait « *naturel* ».

STATISTIQUES DESCRIPTIVES

*Un livre incontournable : « **Contes et Décomptes de la Statistique** », Claudine ROBERT, aux éditions VUIBERT.*

Voici ce qu'on peut lire dans un livre pour enfants.

« La girafe est l'animal terrestre le plus « haut ». C'est un mammifère africain. Le mâle adulte mesure environ 6 mètres de haut, son poids est d'environ 1300 kilogrammes et son cou mesure environ 2,5 mètres de long ».

Quelques questions initiales et premier niveau d'analyse

D'où viennent ces informations sur la hauteur, la masse, la longueur du cou des girafes ? *Par exemple*, une girafe ayant un cou de 3,5 mètres de long est-elle « normale » ? Ou bien est-elle une aberration de la nature ? Ou tout simplement, est-elle une girafe au long cou ? Ou …

Si on a ces « informations », c'est qu'on a mesuré ce qu'on a voulu sur les girafes. Les informations du texte résument alors une masse de données en une information claire, compréhensible et « *fiable* » : c'est un des premiers projets et objectifs des **statistiques descriptives**.

On doit maintenant mettre en forme un cadre de recueil de données, fixer une précision dans les mesures, chercher à résumer ces mesures par une information « fiable » et pourquoi pas numérique.

Par exemple, pour la hauteur : la question est alors: comment associer un nombre aussi « *proche* » que possible des mesures effectuées, recensées et analysées ?

Le premier « vieux » réflexe est de calculer la moyenne, la bonne vieille « moyenne » !

Ce n'est qu'un reflexe : il faut chercher à faire plus et mieux !

A partir de là, on est prêt à « faire » des statistiques !

Si j'étais une girafe, quel sens donner à : « *j'ai un long cou* » dans la communauté des girafes ? Good question !

D’après le site **HATIER**, ***Charnay***, chapitre **18**

Objectifs :

- ***Savoir calculer la moyenne, une valeur de la médiane, l’étendue, une valeur des premier et troisième quartiles d’une série statistique.***
- ***Savoir interpréter ces différentes caractéristiques de position et de dispersion.***

Le but de toute ***étude statistique*** est d’obtenir des informations qui mettent en évidence certains aspects d'un ensemble de données. Ces données peuvent être recueillies à partir d’observations, d’enquête, d’expériences, …

Elles peuvent être organisées dans des ***tableaux*** ou représentées à l'aide de ***diagrammes*** ou de ***graphiques***.

VOCABULAIRE :

Toute étude statistique s’effectue sur ce qu’on appelle une ***population*** dont les éléments sont appelés ***individus***.

Sur ces individus, on choisit d’étudier un « aspect », une dimension, une caractéristique qu’on appelle un ***caractère***.

Par exemple, dans un groupe d'étudiants qui préparent le CRPE (***population*** dont les ***individus*** sont les étudiants) on peut étudier leur nombre de frères et sœurs (***caractère***) on bien la nature de leur licence (***caractère***) ou bien leur taille (***caractère***) ou bien un autre caractère.

<u>DEFINITION :</u>

Un caractère est donc une propriété commune aux individus d'une population.

Cet exemple met en évidence deux types de caractères :

- Des caractères dits ***qualitatifs***, comme par exemple la nature de la licence obtenue à l'Université, la marque d'une voiture, sa couleur, ...
- Des caractères dits ***quantitatifs*** comme le nombre de frères et de sœurs ou la taille des cous des girafes ou… (*les valeurs possibles de ces caractères sont des nombres*). Il faut alors affiner les caractéristiques des caractères quantitatifs.

Parmi les caractères quantitatifs, on peut distinguer deux catégories :

- Des caractères ***quantitatifs discrets*** comme le nombre d'enfants dans une famille (*les valeurs possibles de ces caractères sont des nombres entiers).*
- Des caractères ***quantitatifs continus*** comme la taille des étudiants.

DEFINITION :

La ***fréquence*** d'une valeur d'un caractère est le ***quotient*** de l'effectif de cette valeur par l'effectif total. Elle est souvent exprimée en pourcentage.

On a des données, on les « traite » : on cherche à déterminer quelques caractéristiques « communes » ; on cherche à les regrouper, à les ordonner; on cherche à les représenter ; on cherche des indices numériques pertinents, c'est-à-dire qu'on fait des calculs avec les données observées ou obtenues pour prendre des « décisions ».

EXERCICE 1.

Natalie dit à son amie : « *On vient de nous rendre les notes du partiel, j'ai eu 11 et il y a autant d'étudiants de mon groupe qui ont plus que moi que d'étudiants qui ont moins que moi* ».

Son amie : « *Alors la moyenne du groupe est : 11* ».

Voici les notes du groupe de Natalie : 13 ; 5 ; 6 ; 7 ; 7 ; 8,5 ; 9 ; 9,5 ; 10 ; 12 ; 10 ; 6,5 ; 10,5 ; 11 ; 11,5 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12,5 ; 13 ; 14 ; 15 ; 8 ; 15.

(***1***) Natalie a-t-elle raison ?

(***2***) Peut-on savoir si son ami a tort ou raison ?

Cet exemple permet de mettre en évidence la différence entre deux caractéristiques de position d'une série statistique : la ***moyenne*** *et la* ***médiane.***

Ces indices numériques caractérisent globalement la « ***POSITION*** » des données.

La ***MOYENNE*** d'une série statistique dont les valeurs du caractère sont $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$, ..., $\boldsymbol{x}_p$ et les effectifs correspondants $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$, $\boldsymbol{n}_3$, ...,$\boldsymbol{n}_p$ est notée par :

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} n_i x_i \text{ où } N = n_1 + n_2 + \ldots . + n_p$$

Encore d'autres « moyennes » (*Hors Programme*)
(Extrait d'un ***CM*** du site de Tours)

Moyenne quadratique (utilisée pour l'écart-type)

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Moyenne géométrique (moins sensible au extrêmes)

$$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Moyenne harmonique (moyenne des vitesses A/R)

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

EXERCICE 2

Dans une classe de 25 élèves, il y a 15 filles. Les filles ont une taille moyenne de 1,62m et les garçons de 1,75m. Quelle est la taille moyenne des élèves de cette classe ?

EXERCICE 3

Dans un examen, l'épreuve de français a pour coefficient 3, l'épreuve de mathématiques 4 et l'épreuve de langue coefficient 2. Un étudiant a obtenu 12/20 en français, 8/20 en mathématiques. Quelle note, sur vingt (*!*), doit-il obtenir en langue pour réussir l'examen, c'est à dire avoir au moins une moyenne égale à 10/20 ?

EXERCICE 4

Un étudiant a obtenu 12 en mathématiques (*coefficient 4*), 8 en langue (*coefficient1*) et 9 en français (*coefficient ?*). Quel doit être le coefficient de la note de français pour qu'il obtienne une moyenne égale à (*au moins*) 10 ?

La ***MEDIANE*** d'une série statistique est la valeur du caractère qui partage cette série en deux parties égales. On dit qu'une médiane est un paramètre (ou un indice) à tendance centrale, comme la moyenne (*arithmétique*) d'une série statistique.

« Souvent », elle fait jouer un rôle négligeable aux valeurs extrêmes de la série.

Méthode de calcul, dans le cas d'une série à *valeurs discrètes* :

On range les valeurs dans l'ordre croissant.

- Si ***N*** est impair, la médiane ***Me*** est la valeur du caractère de rang (***N*** + 1)/2.
- Si ***N*** est pair, la médiane est la demi-somme des termes de rang ***N***/2 et ***N***/2 + 1.

Le ***MODE*** d'une série statistique est la valeur du caractère qui apparaît le plus fréquemment dans la série.

On parle de ***classe modale*** dans le cas d'un caractère continu.

Les notions de ***quartile***, ***quintile***, ***décile*** et ***centile*** sont des extensions de l'idée de médiane à *quatre*, *cinq*, *dix* et *cent* parties d'une série statistique ayant le même effectif.

Les quartiles sont les trois valeurs qui partagent les données d'une série statistique, rangées par valeurs croissante en quatre parties de même effectif, donc égal à 25% de la série. On note ces valeurs ***Q1***, ***Q2*** et ***Q3***.

De fait, ***Q2*** ou quartile central est la MEDIANE ***Me*** de la série.

Des données d'une série statistique sont rangées dans l'ordre croissant.

- Le premier quartile est le plus petit élément ***Q1*** des valeurs de la série statistiques tel qu'au moins 25% (*ou un quart*) des données sont inférieures ou égales à ***Q1***.
- Le troisième quartile est le plus petit élément ***Q3*** des valeurs de la série statistiques tel qu'au moins 75% (*ou trois quarts*) des données sont inférieures ou égales à ***Q3***.
- *Rappel* : ***Q2*** est la médiane.

Les ***INDICES*** dits de ***DISPERSION***

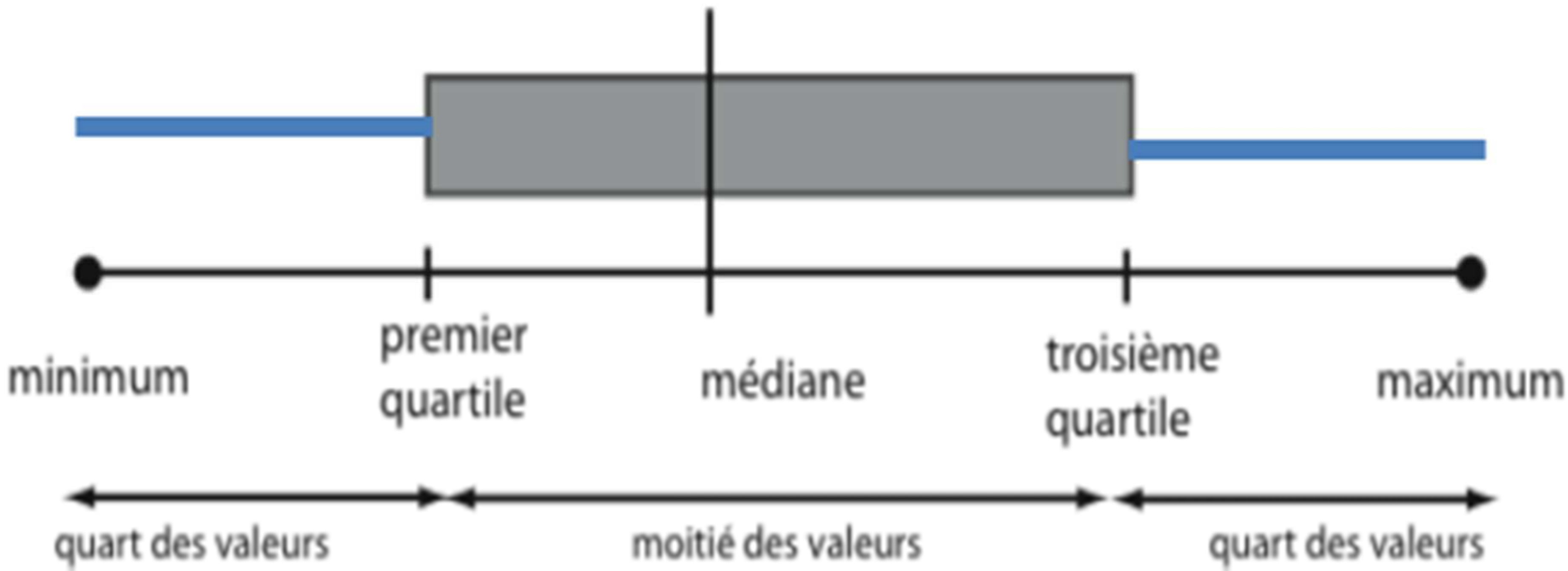
L'***ETENDUE*** d'une série statistique est la DIFFERENCE entre la plus grande et la plus petite des valeurs de la série.

Sans autre indice accompagnant l'étendue, il est délicat de ne s'intéresser qu'à cet indice pour prendre des décisions relativement à la série étudiée.

L'***ECART inter-quartile*** est le nombre ***Q3 – Q1***.
(= différence entre les quartiles extrêmes).

DIAGRAMMES en ***BOÎTE***

On peut représenter les quartiles d'une série statistique avec un diagramme comme ci-dessous appelé « diagramme en boîte » ou « boîte à moustaches ».



EXERCICE 5

a) Déterminer le « diagramme en boîte » des données suivantes **:**
12 ; 5 ; 6 ; 10 ; 3 ; 11 ; 15 ; 16 ; 5 ; 10 ; 11 ; 8 ; 3 ; 12 ; 5 ; 2.

b) Même question avec les données **:**
25 ; 12 ; 7 ; 11 ; 12 ; 16 ; 15 ; 10 ; 15 ; 10.

EXERCICE 6

Indiquez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
Si on ajoute deux à toutes les valeurs d'une série statistique, on augmente :

(1) la médiane de 2 ?

(2) la moyenne de 2 ?

(3) l'étendue de 2 ?

(4) le premier quartile de 2 ? *Justifier ou expliquer…*

Pas de correction : exercices très faciles…

Un exercice d'un sujet du CRPE 2014

Le cross du collège a eu lieu. 200 élèves de troisième ont franchi la ligne d'arrivée.
Voici les indicateurs des performances réalisées en minutes.

Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Moyenne	Étendue
12,5	14,8	15,7	16,3	15,4	4,2

Répondre aux questions suivantes en justifiant.

1) Quelle est la performance en minutes du dernier arrivé ?
2) Quelle est la somme des 200 performances en minutes ?
3) Ariane est arrivée treizième. Donner l'encadrement le plus précis possible de sa performance en minutes.
4) L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   Affirmation : Plus de 50% des élèves ont mis un temps supérieur au temps moyen.

PROBABILITES
d'après le site **Hatier, *Charnay*,** chapitre **19**

Objectif : ***Calculer la probabilité d'événements élémentaires***

EXERCICE 1 : Vers la notion de probabilité

On dispose de cinq boules : 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on note la couleur de la boule tirée.

1. Cette expérience est-elle une expérience aléatoire ? Justifier.
2. Préciser parmi les affirmations suivantes quelles sont celles qui sont vraies :

(***a***) Il y a autant de chances d'avoir une boule rouge que d'avoir une boule noire.

(***b***) Il est plus probable d'obtenir une boule rouge qu'une boule noire.

(***c***) Il y a plus de chances d'avoir une boule noire qu'une boule rouge.

(***d***) Il y a deux chances sur trois d'avoir une boule rouge.

(***e***) Il y a deux chances sur cinq d'avoir une boule rouge.

<u>Pistes de solution</u>

1. Cette expérience est effectivement une expérience dite expérience aléatoire car l'ensemble des résultats possibles est parfaitement bien identifié (*tirer une boule rouge ou une boule noire*) et on ne peut savoir, a priori, la couleur de la boule tirée.

2. Seules les phrases (***c***) et (***e***) sont vraies. On dira, dans ce cas, que la probabilité de tirer une boule rouge est égale à 2/5. La probabilité de tirer une boule noire est égale à 3/5.

EXERCICE 2 : probabilités et fréquences

Cette association notionnelle repose sur une idée moderne, actuelle, effectivement efficace de l'enseignement des probabilités : on l'appelle l'approche fréquentiste, par opposition à l'approche laplacienne, plus ancienne et basée sur d'autres axiomes mobilisant des théories de la mesure…

On dispose d'un sac contenant les cinq boules de l'exercice précédent. On se livre à l'expérience suivante : on tire une boule au hasard du sac on note sa couleur, on remet cette boule dans le sac. On refait un nouveau tirage. On effectue cette expérience un très grand nombre de fois. On calcule ensuite la fréquence d'apparition d'une boule rouge.

a) Faire un pronostic concernant cette fréquence.

b) Faire l'expérience 100 fois, 1000 fois, 10^9 fois, … Calculer la fréquence d'apparition de la boule rouge. Le résultat trouvé correspond-il au pronostic de la question **a)** ?

Rappel : *Une fréquence est un QUOTIENT :*

fréquence (une donnée) *= effectif* (la donnée)*/ effectif total.*

Pistes de solution

a) La fréquence doit tendre vers 2/5.

b) Si vous avez fait l'expérience, vous avez pu constater que le résultat pour un petit nombre d'expériences pouvait être assez éloigné de 2/5. Mais plus on augmente le nombre d'expériences plus le résultat se rapproche de 2/5 qui est la probabilité de l'apparition d'une boule rouge. *Instruments* : calculatrice ou tableur pour simuler un grand nombre de tels tirages. On confirme ainsi cette approche dite fréquentiste de la probabilité.

Note de ***PW*** : c'est cette approche qui est privilégiée dans l'enseignement des probabilités aujourd'hui ; d'autant plus que les moyens technologiques de simulation des expériences autorisent un « grand » nombre de telles expériences.

EXERCICE 3 ***Calculer une probabilité***

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de « 1 » à « 6 ». On note le numéro obtenu.

a) Calculer la probabilité d’obtenir un « 5 ».
b) Calculer la probabilité d’obtenir un nombre pair.
c) Calculer la probabilité d’obtenir un multiple de « 3 ».
d) Calculer la probabilité d’obtenir un nombre qui n’est pas un multiple de « 3 ». Donner deux techniques.

Justifier…

Pistes de solution

a) Le dé est parfaitement équilibré donc la probabilité d’apparition d’un nombre de « 1 » à « 6 » est la même, elle est donc égale à 1/6.
b) Il y a trois nombre pairs possibles : « 2 » ; « 4 » ou « 6 ». La probabilité d’obtenir un nombre pair est donc de 3/6 = 1/2.
c) Il y a deux multiples de « 3 » possibles : 3 et 6. La probabilité d’obtenir un multiple de 3 est donc de 2/6 = 1/3.
d) *METHODE 1* : Pour calculer la probabilité d’obtenir un nombre qui n’est pas multiple de « 3 » on peut chercher les nombres qu’on peut obtenir et qui ne sont pas des multiples de 3 : 1 ; 2 ; 4 ; et 5.
Il y en a 4, donc la probabilité de tirer un nombre qui n’est pas multiple de « 3 » est de 4/6 = 2/3.
METHODE 2 : Un nombre est soit un multiple de « 3 » soit il n’en est pas un. Donc l’événement « *Obtenir un nombre qui n’est pas multiple de « 3 »* » est l’événement contraire de « *Obtenir un multiple de « 3 »* » donc la probabilité d’obtenir un nombre qui n’est pas un multiple de « 3 » est : 1 – 1/3 = 2/3.

<u>EXERCICE 4 (*Influence du passé sur l'avenir*).</u>

On lance un dé à six faces parfaitement équilibré numéroté de 1 à 6. On note le numéro obtenu. On répète cette expérience 10 fois. On a obtenu 10 fois le 6.

Parmi ces phrases quelle(s) est (sont) celle(s) qui est (sont) vraie(s) ?

(***1***) La onzième fois qu'on lance ce dé la probabilité d'obtenir le 6 est plus grande que celle d'obtenir un autre nombre.
(***2***) La onzième fois qu'on lance ce dé la probabilité d'obtenir le 6 est moins grande que celle d'obtenir un autre nombre.
(***3***) La onzième fois qu'on lance ce dé la probabilité d'obtenir le 6 est la même que celle d'obtenir un autre nombre.

Pour une belle simulation :
Cf. fichier tableur « dé électronique »…

Pistes de solution

Les lancers sont indépendants. Il n'y a aucune influence des lancers précédents sur les lancers suivants.

Donc la onzième fois qu'on lance le dé la probabilité d'obtenir le 6 est la même que celle d'obtenir un autre nombre, c'est-à-dire **1/6**.

Quelques mises au point : GENERALITES et VOCABULAIRE

On appelle ***EXPERIENCE ALEATOIRE*** une expérience vérifiant les trois conditions suivantes :

i. On obtient des résultats possibles (ou « issues ») qu'on peut *parfaitement* déterminer ou nommer.
ii. En même temps, on ne sait pas lequel de ces résultats va se produire lorsqu'on effectue l'expérience.
iii. L'expérience doit pouvoir être aussi reproduite autant de fois qu'on le souhaite dans les mêmes conditions.

Définition dite « intuitive » d'une probabilité (*Charnay*)

À partir d'une ***expérience aléatoire*** on peut définir ce qu'on appelle des EVENEMENTS ou des ISSUES qui sont des ensembles de résultats.

Pour certaines expériences aléatoires on peut déterminer par un quotient la « *chance* » qu'un événement a de se produire.

Ce quotient est appelé **probabilité** de **l'événement**.

PROBABILITE et FREQUENCE :

Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la fréquence de n'importe quel événement de cette expérience finit par se stabiliser autour d'un nombre qui est la probabilité de cet événement. (Cf. diapositive 26).

On parle, bis et ter, ainsi d'une approche fréquentiste des probabilités.

C'est cette approche qui est privilégiée au collège et au lycée.

<u>PROPRIETE</u>

Quand les résultats d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité alors la probabilité d'un événement est égale au quotient :

$$\frac{\textit{Nombre de résultats favorables à la réalisation de l'événement}}{\textit{Nombre de résultats possibles}}$$

<u>Conséquences :</u>

- *La probabilité d'un événement est toujours comprise entre 0 et 1.*
- *La somme des probabilités de tous les résultats d'une expérience aléatoire est égale à 1.*

EXERCICE 1

On dispose d'un sac qui contient les vingt-six lettres de l'alphabet.

On tire un jeton au hasard, quelle est la probabilité des événements suivants :

a) Obtenir une voyelle.

b) Obtenir une lettre du mot « CONCOURS ».

Pistes de solution

Il y a 26 résultats ou issues possibles.

a) Il y a 6 voyelles (*a, e, i, o, u et y).*

Donc la probabilité d'avoir une voyelle est : 6/26 = 3/13.

b) Il y a six lettres différentes dans le mot « concours » (*c, o, n, u, r, s), c'est-à-dire : il y a 6 résultats ou issues favorables.*

Donc la probabilité d'obtenir une lettre du mot « concours » est de : 6/26 = 3/13.

PROBABILITE de l' EVENEMENT CONTRAIRE

Si ***p*** est la probabilité d'un événement alors (1 – ***p***) est la probabilité de l'événement contraire.

EXEMPLE :

On dispose d'une urne contenant des jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard. Quelle est la probabilité de ne pas tirer un multiple de trois ?

EVENEMENTS INDEPENDANTS

Deux événements d'une expérience aléatoire sont dits indépendants si le résultat de l'un n'a aucune influence sur l'autre et réciproquement.

EXEMPLE :

On dispose de deux sacs. Le sac **A** contient deux boules rouges et trois boules vertes. Le sac **B** contient cinq boules jaunes et trois boules bleues. Les événements « ***Tirer une boule rouge du sac A*** » et « ***Tirer une boule jaune du sac B*** » sont deux événements indépendants.

PROPRIETE (*admise*)

Si deux événements **A** et **B** d'une expérience aléatoire sont indépendants ***alors*** la probabilité de l'événement ***« A** et **B »***, souvent notée : **p**(***A** et **B***) est égal au produit des probabilités de ***A*** et de la probabilité de ***B***.

EXEMPLE *:*

En reprenant l'exemple précédent la probabilité de l'événement « Tirer une boule rouge du sac **A** et tirer une boule jaune du sac **B** » est égale à *: 2/5 × 5/8 = 10/40 =* ***1/4.***

PROBLEME1 (*d'après le cours Hatier, Charnay*)

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées « 1 » ; « 1 » ; « 2 » ; « 2 » ; « 3 » ; « 4 » et de deux sacs qui contiennent des boules. Le sac **A** contient une boule rouge et deux boules noires. Le sac **B** contient deux boules jaunes et trois boules vertes.

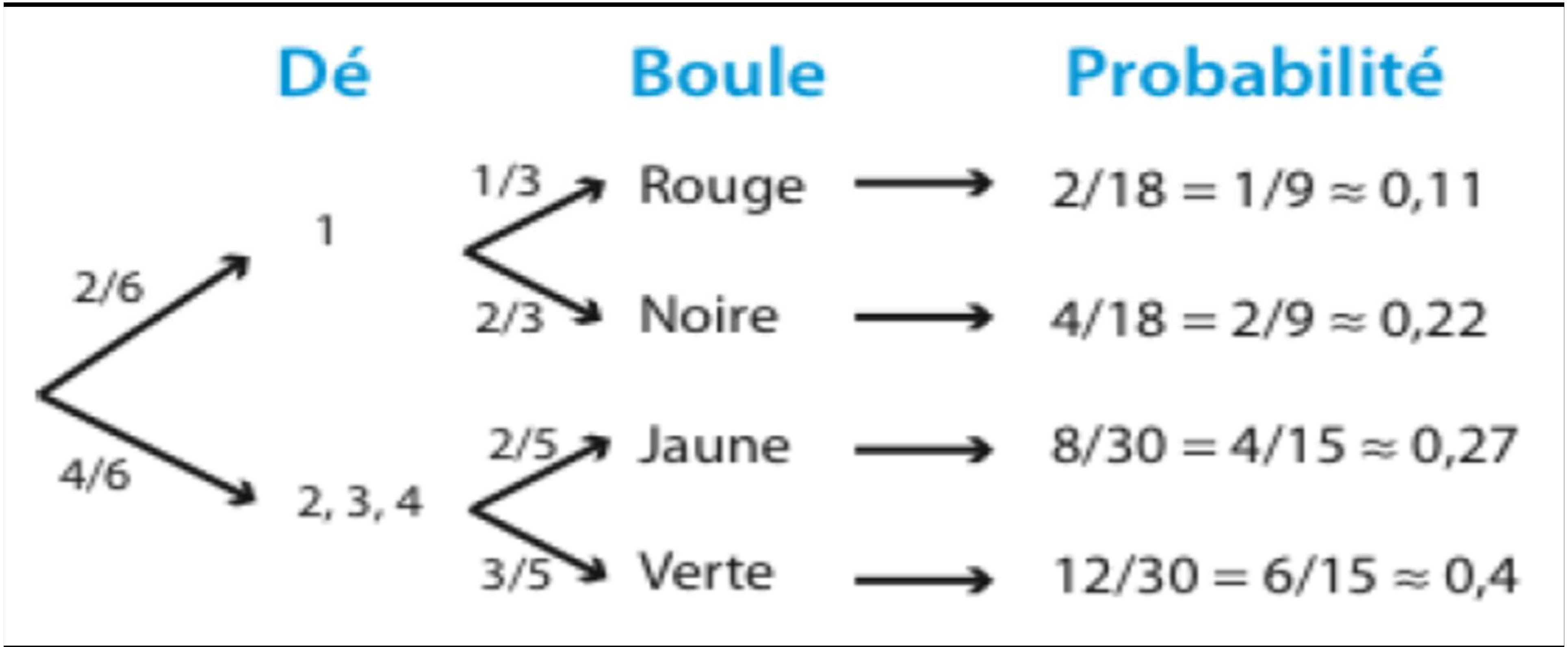
Règle du jeu : *On lance le dé, s'il tombe sur « 1 » alors on tire une boule dans le sac **A** ; s'il tombe sur « 2 », sur « 3 » ou sur « 4 », alors on tire alors une boule dans le sac **B**.*

Patrick propose à Paul le jeu suivant :

- si on tire une boule jaune, alors Patrick gagne un point ;
- si on tire une boule noire, alors Paul gagne un point ;
- si on tire une boule rouge ou une boule verte, alors personne ne gagne ni ne perd.

Question : le jeu est-il équitable ? Pour répondre à cette question, établir un arbre de probabilité pour calculer la probabilité de chaque résultat.

Piste de solution : on utilise un arbre de choix

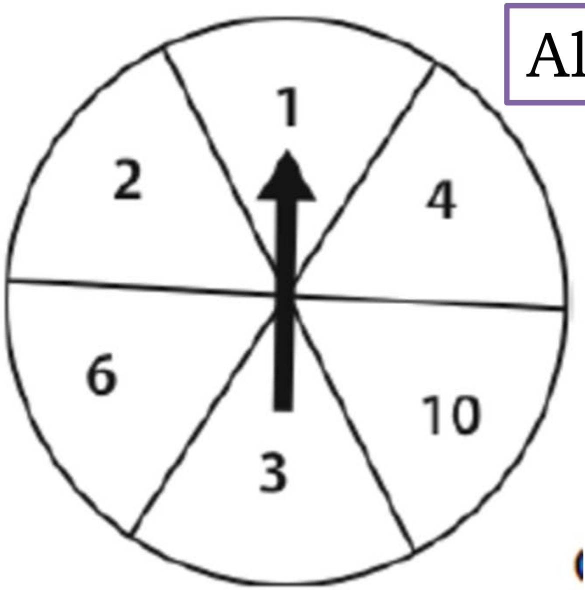


Conclusion :

Ce jeu n’est donc pas tout à fait équitable car la probabilité de tirer une boule jaune est d’environ 0,27 et celle de tirer une boule noire est de 0,22.

PROBLEME 2

Au stand d'une fête foraine, un jeu consiste à faire tourner la roulette. Si l'aiguille s'arrête sur un nombre impair on tire un lot dans un sac. Dans ce sac, il y a trois voitures bleues et une voiture blanche. Quelle est la probabilité d'avoir une voiture blanche ?



Alors, c'est combien cette probabilité ?

Pour aller plus loin, un problème *classique*, pas aussi évident qu'il en a l'air !

Un square est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes (Juliette, puis Roméo) arrivent successivement et s'installent au hasard sur un des trois bancs.

Quelle est la probabilité que ces deux personnes soient assises côte à côte ?

Quelques questions, avant de se lancer dans la résolution…

- Qu'est-ce qui peut « *téléphoner* » l'équiprobabilité ?
- Quelles sont les issues ?
- Cet énoncé ne comporte-t-il pas quelques imprécisions ?

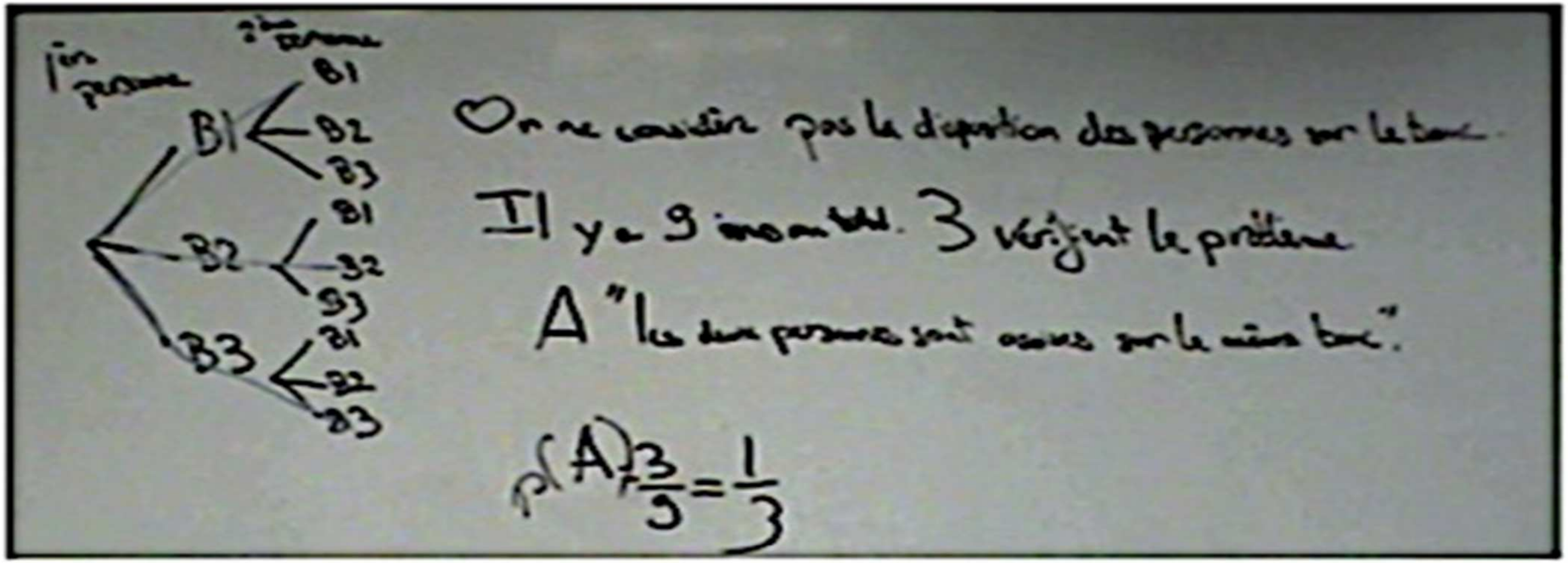
Et alors, on fait quoi ? *Facile* : on REFLECHIT un peu plus que d'habitude…

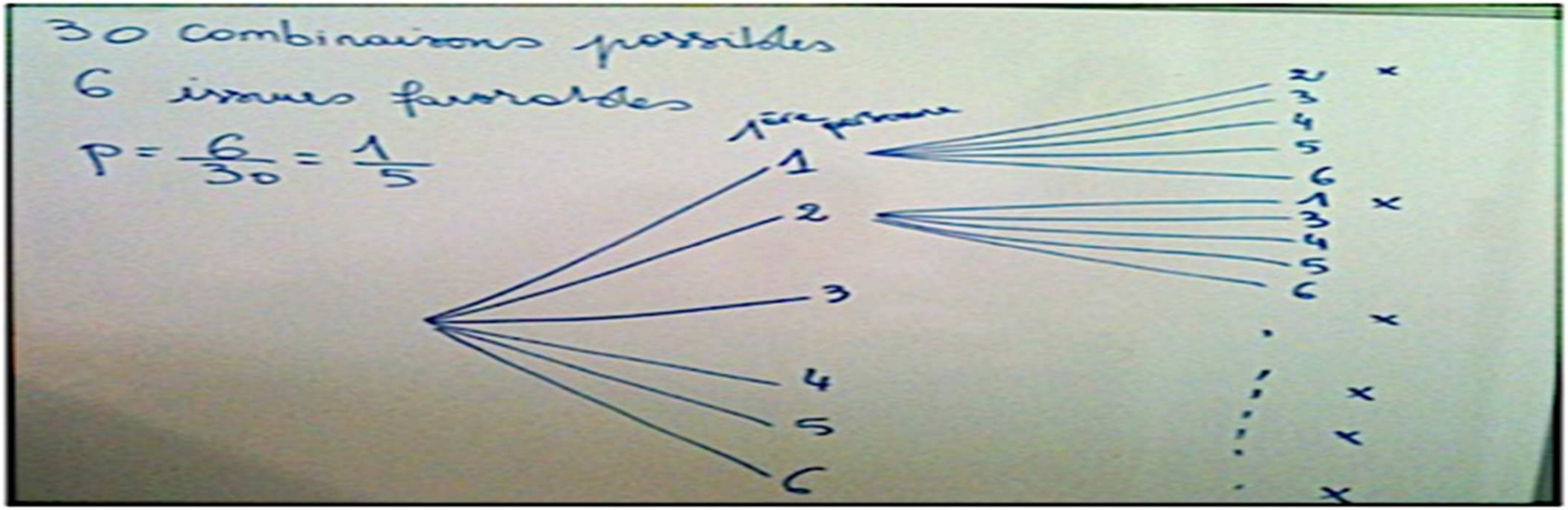
En fait, on peut donner DEUX réponses distinctes à ce problème, en fonction des interprétations des imprécisions !

D'abord, quelques éléments de réponse aux questions de la diapositive précédente :

- Equiprobabilité des issues suggérée par le mot « au hasard ». Mais est-ce que s'asseoir au hasard sur un banc suffit comme information pour résoudre le problème : pas sûr ! *Autre mot important* : « successivement », donc une personne, Roméo, arrive après la première, Juliette.
- Les issues : deux possibilités, les bancs ou les places.
- Du coup, ce problème manque d'informations et on va lui associer deux réponses distinctes. On peut le modéliser suivant deux solutions, yes et pas yes ! *Cf. diapositive suivante, avec deux productions d'élèves de la classe de seconde.*

Stop, après cet exercice : embrouille encore plus embrouilleuse !


1ère personne
2ème personne
B1
B2
B3
B1
B2
B3
B1
B2
B3
B1
B2
B3
On ne considère pas la disposition des personnes sur le banc.
Il y a 9 issues totales. 3 vérifient le problème
A "les deux personnes sont assises sur le même banc".
p(A) = 3/9 = 1/3


30 combinaisons possibles
6 issues favorables
p = 6/30 = 1/5
1ère personne
1
2
3
4
5
6
2
3
4
5
6
1
3
4
5
6