École supérieure du professorat et de l'éducation
Académie d'Orléans-Tours
UNIVERSITE D'ORLEANS

Master M1

GRANDEURS et MESURES

CM de Mathématiques

Patrick WIERUSZEWSKI

OBJETS, GRANDEURS, MESURES et Divers

A compléter avec les documents annexes déposés sur le cours CELENE

<u>Sommaire et Plan</u>

Du côté des « **<u>notions</u>** » : qu'est-ce qu'une GRANDEUR pour un étudiant Meef-PE ? Qu'est-ce qu'une MESURE pour un étudiant Meef-PE ?

Les GRANDEURS au programme du CRPE.

<u>*Pour aller plus loin*</u> : compléments théoriques et didactiques, exercices et problèmes supplémentaires, quelques formulaires, …

En 2001, Guy BROUSSEAU observait que le mot « GRANDEUR » était ignoré de l'index de *l'Encyclopediae Universalis*, mais qu'il apparaissait dans plus de 1000 articles de cette recension, la plupart scientifiques !

In « Enseigner les Mathématiques à l'Ecole Primaire », Noirfalise et Matheron, éditions Vuibert.

Une première notion naturelle et naïve de « GRANDEUR » : un ***exercice*** pour identifier différents concepts en jeu.

« *Donner du sens aux mathématiques* », *Fénichel et Pfaff, éditions Bordas*

Matériel autorisé. Deux feuilles blanches de format A4, une paire de ciseaux, un feutre ou des crayons divers.

Activité réalisée en *TD*.

CONSIGNE.

1. Sans utiliser aucun instrument usuel de géométrie, découper une feuille de format A4 en deux surfaces ayant le même périmètre et pas la même aire. *De plus, il ne doit pas y avoir de chute, de trou ou de surface « perdue ».* Prouver que le découpage produit répond à la consigne.
2. Idem 1., mais cette fois-ci, les deux surfaces doivent avoir la même aire et pas le même périmètre. *De plus, il ne doit pas y avoir de chute, de trou ou de surface « perdue ».* Prouver que le découpage produit répond à la consigne.

3. Les procédures ou techniques mises en œuvre lors des deux résolutions des deux questions ci-dessus font-elles appel aux mêmes concepts ? *Expliquer*.
4. Pour aller plus loin. (*Consigne donnée à l'oral*).
5. Bilan et correction.

<u>Une première synthèse</u>

- Les OBJETS, les GRANDEURS et les MESURES ne doivent pas être confondues.
- Pour un même OBJET, plusieurs GRANDEURS peuvent être mises en évidence et étudiées. *Exemples*…
- Pour « connaître » un OBJET, il est donc nécessaire de l'étudier sous différents aspects, sans <u>*obligatoirement*</u> et surtout <u>*immédiatement*</u> faire appel au NOMBRE ou à la MESURE. *Exemples*…

Des exemples de GRANDEURS et un premier choix de MODELISATION

Le concept de GRANDEUR se construit en tout premier à partir d'activités de COMPARAISON.

Des masses plus ou moins lourdes, des durées plus ou moins courtes, des aires plus ou moins étendues, … On peut ensuite chercher à ordonner ces grandeurs.

D'où une question : peut-on faire mieux ? En particulier, investir dans de bonnes conditions d'autres RELATIONS, voire des OPERATIONS sur les GRANDEURS.

Une GRANDEUR est dite REPERABLE si on peut définir une relation d'ORDRE permettant de COMPARER puis de RANGER des OBJETS selon cette GRANDEUR.

Dans ce cas, l'expression : « ***Grandeur de l'Objet A*** < ***Grandeur de l'Objet B*** < ***Grandeur de l'Objet C*** » a alors un sens.

Les longueurs, les masses, les aires, les températures sont des GRANDEURS REPERABLES.

On peut aller plus loin

Par exemple, si on mélange deux liquides (*miscibles*) ayant deux températures différentes, la température du mélange n'est pas égale à la somme des températures des deux liquides.

Autre exemple : vitesse moyenne et moyenne des vitesses….

On va donc chercher à définir une GRANDEUR MESURABLE pour certaines GRANDEURS REPERABLES en fabriquant de « bonnes » opérations.

• Une ADDITION. La GRANDEUR de deux OBJETS « réunis » est égale à la somme des GRANDEURS de chaque OBJET.

GRANDEUR de (**A** + **B**) = GRANDEUR de **A** + GRANDEUR de **B**

• Une MULTIPLICATION dite « externe ». La GRANDEUR d'un nombre ***n*** d'OBJETS identiques est égale à ***n*** fois la GRANDEUR de l'OBJET générique.

GRANDEUR de ***n*** OBJETS **A** = ***n*** × GRANDEUR de **A**

Définition

Une GRANDEUR REPERABLE sur laquelle on peut définir une ADDITION et une MULTIPLICATION externe (*comme ci-dessus*) est une GRANDEUR MESURABLE.

Il convient maintenant d'établir une « relation » entre les NOMBRES et les GRANDEURS MESURABLES.

Ce qui est loin d'être simple !

Pour mesurer une GRANDEUR, on cherche à la COMPARER à une GRANDEUR (*de même espèce*) appelée ETALON, choisie comme UNITE.
Le but est alors de savoir combien de fois la GRANDEUR ETALON est contenue dans la GRANDEUR à mesurer.

Cette « opération » s'appelle le MESURAGE et le ***nombre*** d'étalons contenus dans la GRANDEUR s'appelle la MESURE. En particulier, la MESURE dépend de l'ETALON choisi.

Le MESURAGE n'est pas toujours aussi simple : comment faire quand cela ne tombe pas « juste » ? Comment assurer *une « meilleure » précision* dans la MESURE ?

C'est presque toute l'histoire des Mathématiques qui se résume dans cette question ! En effet, c'est par des problèmes de mesurabilité (en cherchant des conditions de commensurabilité) que les théories des nombres se sont développées au cours des siècles.

Soit la GRANDEUR ***g*** d'un OBJET **O** choisie comme GRANDEUR ETALON. Soit **W** un OBJET dont on veut déterminer la GRANDEUR ***w***, en fonction de ***g***.
Quels sont les cas possibles ?

(i) Cas où ***g*** est exactement contenue ***n*** fois dans ***w***.
On peut écrire : ***w*** = ***n*** « fois » ***g*** = ***n.g***

(ii) Que faire quand l'égalité du (i) n'est pas établie ? <u>Un principe</u> : on envisage le recours à des **sous-unités** ou à des **encadrements** de plus en plus fins. <u>*C'est très difficile !*</u>

<u>Exemples</u>

- 12 cm² désigne une AIRE. « 12 » est un NOMBRE qui exprime la **mesure** de cette AIRE, dans le cas où le cm² est pris comme UNITE.
- <u>Lorsqu'on change d'UNITE, la MESURE change</u> : 12 cm² et 1200 mm² désignent la même AIRE. Mais comme l'unité choisie est différente, les mesures ne correspondent pas au même nombre. On peut écrire : ***12 cm² = 1200 mm²***, *mais* ***12 ≠ 1200*** !

Les UNITES de MESURE. Un ensemble d'organismes nationaux et internationaux assure la légalité et la conformité des mesures physiques.

- Le Bureau International des Poids et des Mesures
- L'Organisation Internationale de Métrologie légale
- La Conférence Générale des Poids et des Mesures, …

Parmi les sept unités de base du <u>SYSTÈME INTERNATIONAL</u> (*unités SI*), on peut retenir : le METRE (m), le KILOGRAMME (kg) et la SECONDE (s).

Le LITRE (L) est aussi une autre UNITE d'usage courant.

Le SYSTÈME METRIQUE est fondé sur la NUMERATION DECIMALE.

Une fois qu'on a les « bonnes » UNITES et les « bonnes » conversions, les égalités suivantes sont VRAIES :

$1kg = 1000 \times 1g = 1000g = 10^{3}g$; $1m = 0{,}001km = 10^{-3}$ km ; mais aussi : $1min = 60 \times 1s = 60s$; …

A titre culturel, les autres unités de base du SI sont :

- L’ampère (**A**). Unité du SI mesurant l’intensité électrique.
- Le kelvin (**K**). Unité du SI mesurant la température.(*Ce n’est pas le degré Celsius, ni le degré Fahrenheit*).
- La mole (**mol**). Unité du SI mesurant la quantité de matière.
- Le candela (**cd**). Unité du SI mesurant l’intensité lumineuse.

- Pour la mesure des angles, en mathématiques, on utilise le radian (**rd**).

Définition. Le radian est l’angle qui, ayant son sommet au centre d’un cercle, intercepte un arc de cercle de longueur égale au rayon du cercle.

On a l’égalité : π **rd** = 180°.

<u>*C'est le moment de résoudre quelques exercices*</u>. Ah, yes !
Un exercice de CONVERSION de durée par changement de système d'unités

i. Exprimer dans le système sexagésimal une durée de 0,376h.

ii. Exprimer dans le système décimal une durée de 23min 45s.

Changements de vitesse, en quatrième vitesse !

<u>*Rappel*</u>. Les formules à savoir : $\mathbf{d} = \mathbf{v} \times \mathbf{t}$; $\mathbf{v} = \mathbf{d}/\mathbf{t}$ et $\mathbf{t} = \mathbf{d}/\mathbf{v}$ (*avec les « bonnes » unités*).

i. Exprimer en km/h une vitesse de 732m/s.

ii. Exprimer en m/s une vitesse de 133km/h.

ii. <u>Un grand classique</u> : « vitesse moyenne ?=? moyenne des vitesses ». *Etude détaillée d'un exemple.*

On continue *(CRPE 1996).* Avant que n'entre en vigueur le système métrique, les capacités étaient mesurées avec des unités qui variaient selon les régions et aussi selon les matériaux considérés. Ainsi pour les liquides, le MUID de Paris correspondait à 268,2 litres, tandis que le MUID de Lunel (*près de Montpellier*) utilisé dans le Languedoc correspondait à 700 litres.

Un vigneron languedocien qui voulait vendre 5 MUIDS (de Lunel) de vin à Paris devait exprimer cette quantité en MUIDS de Paris. Donner alors la valeur décimale arrondie au centième de la mesure en MUIDS de Paris des 5 MUIDS de Lunel.

Le MUID avait des multiples et des sous-multiples : le SETIER et la PINTE. Un SETIER valait 8 PINTES et un MUID valait 36 SETIERS.

Calculer en MUIDS, SETIERS et PINTES de Paris la capacité d'un réservoir de forme parallélépipédique (*rectangle*) dont les dimensions, en centimètres d'aujourd'hui, sont 50 pour la hauteur, 350 pour la largeur et 391,87 pour la longueur.

Question bonus, pour le fun, PW. Au bout de combien de PINTES d'un breuvage lunellois (*le muscat ?*) ou parisien, un « honnête homme » peut-il être déclaré en état d'ivresse par la maréchaussée lors d'un contrôle malheureusement inopiné ? Justifier. *Hihihi…*

Un premier tableau récapitulatif recensant les points de repère indispensables pour bien comprendre et assimiler ce que sont les grandeurs usuelles étudiées à l'Ecole Primaire : périmètres (ou longueurs), aires et volumes.

	SEGMENT de DROITE	SURFACE (plane)	SOLIDE
OBJET GEOMETRIQUE	***Une définition :*** Sous-ensemble non vide d'une droite, définie comme intersection de deux demi-droites d'origines distinctes.	***Une définition :*** Partie bornée (*ou fermée*) d'un plan dont l'intérieur, *non vide*, est limité par une ou plusieurs courbes fermées de longueur finie.	***Une définition :*** Région bornée de l'espace « 3D », dont l'intérieur, non vide, est limité par une ou plusieurs surfaces fermées d'aire finie.

GRANDEUR ***Les trois grandeurs sont des grandeurs mesurables.***	Par déplacement(s) et superposition, les segments sont « plus courts », « plus longs » ou « superposables ». ***La notion de longueur a pour but de rendre compte du caractère commun à plusieurs segments.*** **LONGUEUR** : un « invariant » d'une famille ou d'une classe de segments de droite.	Par déplacement(s) ou par « découpage-recollement », les surfaces se superposent ou s'incluent. Les surfaces occupent donc « plus ou moins » de place dans le plan. ***La notion d'aire a pour but de rendre compte de l'occupation du plan, sans tenir compte de la forme de la surface***. **AIRE** : un « invariant » d'une famille ou d'une classe de surfaces.	Par inclusion ou par « remplissage », les solides peuvent se « comparer ». Les solides occupent « plus ou moins » de place dans l'espace. ***La notion de volume a pour but de rendre compte de cette occupation de l'espace, sans tenir compte de la forme du solide.*** **VOLUME** : un « invariant » d'une famille ou d'une classe de solides.

MESURE	A unité fixée, la mesure d'une longueur est un ***NOMBRE***. (Unités de *<u>mesure des longueurs</u>* du système métrique, unités SI).	A unité fixée, la mesure d'une aire est un ***NOMBRE***. (Unités de *<u>mesure des aires</u>* du système métrique, unités SI).	A unité fixée, la mesure d'un volume est un ***NOMBRE***. (Unités de *<u>mesure des volumes</u>* du système métrique, unités SI).

On peut bâtir un tableau analogue pour les autres grandeurs usuelles étudiées au primaire, c'est à dire : les **angles** (***gabarit*** *pour la mesure*), la **masse**, la **capacité**, la **durée**. Il faut préciser que **le volume** n'est traité qu'avec les **capacités** : on travaille l'aspect unidimensionnel de cette grandeur. Les autres aspects plus algébriques (*les formules*) sont au programme du collège.

Justement, on y va du côté des « formules » : comment les « générer » et surtout, lesquelles retenir ?

Pour commencer, Les **formulaires** répondent directement à cette question ! Cependant, cela ne peut suffire.

Remarque. Un formulaire se « construit » : il n'est pas figé une fois pour toute, son recours ne doit pas être systématique, quelques formules doivent pouvoir être reconstruites à partir d'autres, plus génériques. Bien entendu, il n'est pas dispensé d'apprendre « par cœur » certaines formules fondamentales !

Une « formule » possède un double aspect : elle décrit non seulement un algorithme de calcul, mais surtout elle donne une information relativement à la DIMENSION géométrique d'un objet étudié, lorsque par exemple, on travaille sur les concepts de périmètre, d'aire ou de volume.

En particulier, les « formules » usuelles et non-usuelles appartiennent aux domaines plus généraux de l'algèbre et de l'analyse.

On peut « ***toujours* »** (*Aïe, Aïe, Aïe !*) calculer le périmètre d'une figure plane convexe et polygonale fermée en additionnant les longueurs des côtés de cette figure.

Retenir **: PERIMETRE = SOMME de LONGUEURS**

Une aire se calcule en effectuant le produit de deux longueurs : ce sont les aspects algébrique et analytique qui sont convoqués (*fonction à deux variables*).

Il convient aussi de ne pas oublier qu'une aire se détermine aussi par pavages, donc la mesure de cette aire peut être obtenue comme somme de mesures d'aire.

Retenir **: AIRE = PRODUIT de DEUX LONGUEURS**
Ou AIRE = SOMME d'AIRES

Une petite mise au point de vocabulaire. On commet usuellement des abus de langage et d'écriture, en parlant de « *périmètre du cercle* » ou « *aire du cercle* » ou … En fait, un cercle est une ***ligne***, donc on peut (*essayer*) de déterminer sa longueur, à l'aide d'une formule ou pas !, mais son aire est nulle (*et oui !*), un disque est une ***surface*** : il a donc un périmètre et une aire, qu'on a l'habitude de calculer avec les formules connues.

Un volume se calcule en effectuant le produit d'une aire par une longueur.

Même remarque que pour les aires : il y a les aspects fonctionnels, donc multidimensionnels ; mais aussi les aspects « additifs » liés aux pavages ou remplissages de solides à l'aide d'autres solides plus « génériques ».

<u>Retenir</u> **: VOLUME = AIRE $\times$ LONGUEUR**
Ou VOLUME = *SOMME* de VOLUMES

Toutes ces formules présentent des ***<u>caractéristiques linéaires et multilinéaires</u>*** ; en cela, elles renvoient à une relecture attentive du **CM** sur la **PROPORTIONNALITE** *(déposé sur le cours CELENE).*

On va donc les recenser toutes ces formules.
On commence par lesquelles ? Les aires, puis les volumes, d'accord. Et les périmètres ???

• <u>CARRE</u> **C** de côté $\boldsymbol{x}$ (*cm*)	Aire (**C**) = $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^2$ (cm^2)
• <u>RECTANGLE</u> ***R*** de longueur ***L*** (*cm*) et de largeur ***l*** (*cm*)	Aire (**R**) = $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{l}$ (cm^2)
• <u>LOSANGE</u> **G** de diagonales ***d1*** (*cm*) et ***d2*** (*cm*)	Aire (**G**) = $(\boldsymbol{d1} \times \boldsymbol{d2})/2$ (cm^2)
• <u>PARALLELOGRAMME</u> **P** de longueur ***L*** (*cm*) et de hauteur associée ***h*** (*cm*)	Aire(**P**) = $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{h}$ (cm^2)
• <u>TRIANGLE</u> **T** de base ***b*** (*cm*) et de hauteur associée ***h*** (*cm*)	Aire (**T**) = $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{h})/2$ (cm^2)
• DISQUE **D** de rayon ***r*** (*cm*)	Aire (**D**) = $\pi \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}$ (cm^2)
• SPHERE **S** de rayon ***r*** (*cm*)	Aire (**S**) = $4 \times \pi \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}$ (cm^2)

Au fait, pourquoi est-ce le même « π » dans les deux formules : *longueur du cercle* et *aire du disque* ? Très bonne question ! (~~*Cf. Dossier ConfPeda : « Géométrie au cycle III »*~~).

• **CUBE** d'arête $\boldsymbol{x}$ (*cm*)	Volume (**cube**) = $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x}$ (cm^3)
• **PAVE DROIT** de dimensions $\boldsymbol{L}$ (*cm*), $\boldsymbol{l}$ (*cm*) et $\boldsymbol{h}$ (*cm*)	Volume (**pavé**) = $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{h}$ (cm^3)
• **PRISME (*droit*)** à base triangulaire de longueur de surface latérale $\boldsymbol{L}$ (*cm*)	Volume (**prisme**) = **Aire** (triangle de base) × **L** (cm^3)
• **CYLINDRE (*droit*)** de rayon de disque de base $\boldsymbol{r}$ (*cm*) et de hauteur $\boldsymbol{h}$ (*cm*)	Volume (**cylindre**) = $\pi \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{h}$ (cm^3)
• **CONE** de rayon de disque de base $\boldsymbol{r}$ (*cm*) et de hauteur $\boldsymbol{h}$ (*cm*)	Volume (**cône**) = $1/3 \times \pi \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{h}$ (cm^3)
• **PYRAMIDE** de base polygonale et de hauteur $\boldsymbol{h}$ (*cm*)	Volume (**pyramide**) = $1/3 \times$ **Aire** (polygone de base) × $\boldsymbol{h}$ (cm^3)
• **BOULE** de rayon $\boldsymbol{r}$ (*cm*)	Volume (**boule**) = $4/3 \times \pi \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}$ (cm^3)

EXERCICE (*à chercher, sans corrigé, zut !*)

1. Retrouver la formule donnant l'aire d'un trapèze, à partir de celle d'un triangle.

2. Voir les fiches ***TD*** pour d'autres exercices.

On termine avec de nouvelles grandeurs : les grandeurs composées.

Par exemple, la vitesse est une *grandeur composée quotient* : on utilise des grandeurs « simples » pour la définir et elle peut s'exprimer sous la forme d'un quotient.

(~~*Détails donnés pendant le CM*~~)

Le tableau ci-dessous contient douze étiquettes représentant, pour la plupart, des grandeurs. Il s'agit de produire quatre « formules » liant trois grandeurs homogènes entre elles.

Donner, pour chaque « formule », les trois égalités, en les accompagnant des bonnes unités.

Etiquette ***1*** : distance réelle (*en ?*).	*Etiquette* ***5*** : volume écoulé (*en ?*).	*Etiquette* ***9*** : vitesse moyenne (*en ?*).
Etiquette ***2*** : capital placé (*en ?*).	*Etiquette* ***6*** : taux de placement.	*Etiquette* ***10*** : échelle de la carte.
Etiquette ***3*** : durée parcours (*en ?*).	*Etiquette* ***7*** : distance sur carte (*en ?*)	*Etiquette* ***11*** : débit moyen (*en ?*).
Etiquette ***4*** : durée de l'écoulement (*en ?*)	*Etiquette* ***8*** : distance parcourue (*en ?*)	*Etiquette* ***12*** : intérêt du capital (*en ?*).