EXERCICE 1, cycle I

Quelques mots sur la "*comptine numérique*"

La suite ordonnée des nombres entiers (on dit aussi file numérique ou chaîne numérique ou suite numérique ou tout autre formulation synonyme) peut se représenter de diverses manières (liste, piste, bande, tableau, spirale, droite, ...). Les droites numériques sont très utiles pour comparer, ranger, et donc ordonner des nombres (*entiers*) donnés. La "*comptine numérique*", au sens usuel, sert à mettre en place la suite ordonnée des premiers nombres entiers. On la récite, on la chante, on fait pleins de choses et plus on en fait mieux c'est ! Mais un jour, il va falloir l'abandonner...

1) (i) Tâche A. *Une technique* : énumérer chacun des jetons (par le toucher, suivi ou pas d'un déplacement) et lui associer un mot-nombre de la comptine. Arrêter cette énumération et la récitation dès que le tas est épuisé, et enfin, énoncer le dernier mot-nombre prononcé ; celui-ci donne alors la quantité.

(ii) Tâche B. Différente de la tâche A ! *Une technique* : il faut d'abord mémoriser le nombre "12". Ensuite, il faut prendre les jetons, un par un, en prononçant le mot-nombre associé, les déposer dans le panier et (*penser à*) s'arrêter lorsque le "douze" a été énoncé. *Ah oui, quand même, il y a du boulot !*

2) Des erreurs.

- des erreurs, de nature différente, dans la récitation de la comptine ;
- des erreurs dans l'énumération des jetons : ne pas énoncer un mot-nombre, compter plusieurs fois le même jeton, oublier des jetons ;
- ne pas associer le dernier mot-nombre avec la quantité.

3) Dans les deux cas, la comptine numérique est mobilisée pour une mise en correspondance terme à terme de chaque mot-nombre avec un jeton. La tâche B demande en plus la conservation dans la mémoire du nombre "12" comme but à atteindre. Il y ainsi une double action incluant un contrôle obligatoire du comptage ; car de fait, il reste encore des jetons à compter !

Note de PW. Il s'agit de situations emblématiques classiques en Maternelle.
C'est pour ça que quelques mots en M1 peuvent être intéressants.

Variations autour de la tâche "comparer"

4) Les collections sont proches. *Une technique* : apparier un jeton jaune avec un seul autre jeton rouge. De trois choses l'une. Il reste des jetons jaunes ou bien il reste des jetons rouges ou enfin il ne reste pas de jeton et conclure.

5) Les collections sont éloignées. *Une technique* : isoler un jeton jaune et un jeton rouge et éventuellement constituer des "couples". Conclure.

6) Question plus délicate : dans les deux questions précédentes, les variables de situation sont données. Ce n'est pas la cas pour cette question.

- ITEM 1. Comparaison dite perceptive des deux collections. Collections non organisées, mais la différence des quantités est "grande". On peut conclure.
- ITEM 2. Comparaison directe des deux collections. Collections organisées de la même façon, la correspondance "terme à terme" par appariement permet de conclure.
- ITEM 3. Reconnaissance immédiate par ***"subitizing"***. *C'est quoi cette affaire de* ***"subitizing"*** *? C'est la capacité d'embrasser la valeur ou le cardinal d'une collection sans connaître ce nombre afin de comparaison ou autre tâche élémentaire liée à la quantité. Item qui sera développé en M2 ; d'où l'intérêt de réussir le concours, hihihi...*
- ITEM 4. Comparaison outillée par la reconnaissance immédiate de constellations classiques : le "5" et le "6". On peut aussi passer par le comptage usuel.
- ITEM 5. Comparaison par comptages. On ne possède pas de technique économique qui nous facilite la tâche et donc, on passe par la technique emblématique du comptage.
- ITEM 6. (Difficile). Le comptage n'est pas vraiment économique. On monte d'un cran dans l'apprentissage de la numération : nécessité de faire des paquets (paquets de dix en base dix !). On peut aussi apparier des sous-collections, technique peu usuelle.

Commentaires. La question 6) est vraiment une "bonne" question. Elle va avoir une actualité au cycle II, en particulier dès que les "groupements" par paquets vont s'avérer pertinents pour comprendre et assimiler la numération décimale. Il va falloir, concomitamment, donner du sens aux règles d'échanges du "dix contre un" ou du "un contre dix", qui est une autre composante essentielle de la numération décimale. Et après, vamos pour les opérations ! Bonjour le boulot...

EXERCICE 2, cycle I

Quelques commentaires. (i) Cet exercice a été posé au CRPE 2015. Le corrigé détaillé figure dans les annales COPIRELEM. (ii) Les cartes sont "découpables", rigides, plastifiées, d'assez grand format. Et avant toute chose ou tout "travail" comme disent les élèves, ceux-ci doivent "jouer" avec et même produire une ou des règles du jeu. Cette phase de DEVOLUTION est essentielle pour entrer dans les apprentissages. 1) Deux compétences, programmes 2008. Il faut s'attendre à ce genre d'item. Les compétences ne s'inventent pas : elles sont généralement précises et corrélées à des objectifs d'apprentissage. Revoir le CM de Didactique des Mathématiques. On peut proposer :

1. Comparer des quantités, à partir d'un matériel "ludique" ;
2. Dénombrer une quantité (avec plusieurs techniques possibles, Cf. EXERCICE 1).

Attention au contre sens : il ne s'agit pas ici de décrire des procédures ou des techniques de résolution de tâches. Rappel : (1) on répond aux questions et on ne touille pas la "soupe"... (2) On répond en référence aux compétences citées ci-dessus. Cf. le corrigé COPIRELEM : difficile de faire mieux ! (3) Quelques pistes. Là aussi, Cf. le corrigé COPIRELEM, bis. Comparaison des deux jeux par la forme, les "dessins", les tailles, les orientations des représentations : un premier jeu sans critères uniformes et un deuxième jeu plus traditionnel. Donc, rapport aux procédures différent. Avec un critère commun : avec les deux jeux, on rentre de façon explicite dans la numération : il y a des décompositions de nombres. Par exemple, "6", c'est 6, mais c'est aussi "3" et "3" ou bien, "4", c'est plus grand que "2", ...

EXERCICE 3, cycle II

1) a) A première lecture, on peut penser qu'il y a adéquation. Mais, "les jeux sont faits" dès la première image ! Max "range" tout de suite ses crayons par paquets de dix, et le NOM *dizaine* est donné !

1) b) On est typiquement dans une conception dite "transmissive" de l'enseignement. Cf. le CM de Didactique des Mathématiques, paragraphe illustré sur les conceptions de l'enseignement-apprentissage.

2) a) Cohérence : même support (on range des crayons, déjà pré-rangés !, par paquets de dix) et même représentation de la situation (des crayons, des boîtes remplies et quelques crayons "seuls". Note de PW : on fait des paquets, mais on ne s'intéresse pas encore à la quantité. Non cohérence : la tâche évolue ; on doit remplir un texte à trous et de fait, calculer une somme (Cf. note ci-dessus). Il y a quatre boîtes pleines et huit crayons non encore rangés : on doit traduire cet état par un NOMBRE, en passant explicitement par la décomposition canonique. On peut se poser du rôle que peut ou doit jouer le petit dessin à droite de la page : on a "4" paquets de dix et "8" crayons non rangés qui "donne" le nombre 48. Pas facile ! ! ! C'est ce qu'on peut appeler une rupture de contrat en didactique !

2) b)
- Erreur 1. La tâche est précise : "je compte les crayons" et donc, un élève peut compter en passant par la *comptine numérique* ou autre... et donc le but visé consistant à réaliser des paquets est minoré, voire occulté.
- Erreur 2. Plus délicat. On passe du "je vois" à "je compte" et on doit remplir le tableau, après avoir dessiné les boîtes, avec une autre représentation symbolique de la réponse (constellation du dé vs représentation des crayons). Rupture de contrat : ce qui a été fait avant n'a pas une utilité directe pour résoudre la nouvelle tâche. Il y a trop d'implicites.

3) a) C'est un problème d'organisation des collections et de disposition des "dessins". Argumenter, oui, mais, sans touillage de soupe... Par exemple, pour les exercices [4] et [5], les collections sont pré-organisées, mais pas par dix et cela peut occasionner des réelles difficultés supplémentaires. En particulier, il y a deux groupements par "5" disposés différemment : "en rond" pour l'exercice [4] et "en colonne" pour l'exercice [5], est-ce aussi simple de compter "en rond" que de compter "en colonne" ?

3) b) Pourquoi DEFI ? C'est essentiellement par rapport au cardinal de la collection : c'est encore un très "grand nombre" à ce niveau de l'année. Mais, modulo le passage des crayons aux livres, la tâche calque exactement celle qui est proposée dans la première illustration. Il faut bien comprendre que *"4" paquets de dix crayons et "8" crayons non rangés "donne" le nombre 48* est équivalent à *"6" paquets de dix livres et "6" livres non rangés "donne" le nombre 66.*
Deuxième argument à trouver, facile...

4) Un principe : on ne fait pas la course au vocabulaire pour faire la course au vocabulaire. En particulier, le mot ***dizaine*** ne peut pas encore faire sens en début d'apprentissage. Il fera sens lorsque d'autres mots apparaîtront, en particulier le mot ***centaine***. Et donc, on a droit à du vocabulaire transitoire efficace et contextualisé... Les mots employés : "boîtes pleines", "filets de dix", "sacs de dix", "tas de dix briques" sont pertinents à ce niveau et remplacent utilement le mot ***dizaine***. Ils ont vocation à améliorer la dévolution et la compréhension des tâches et ils ont aussi vocation à être progressivement abandonné au profit du mot générique décontextualisé : la ***dizaine***.

EXERCICE 4, cycle II. Un peu de Géométrie, bonne idée !

1. Activité préparatoire : du PLIAGE, avec une feuille de papier la plus générique possible (çàd sans coins apparents, sans régularités géométriques ni régularités métriques, ...) ! Ensuite, on va aller plus loin et chercher à dessiner la trace du pli : c'est une (très bonne) image d'une ***droite***. Ensuite, on plie plusieurs fois et on observe dynamiquement ce qui peut être obtenu, en dessinant les traces des plis comme représentant des "droites" sur chaque pli. ... L'objectif premier de cette activité est de construire un gabarit (*mathématique, oui, oui !*) d'un angle droit par double pliage (= pli, puis "re"pli sur le pli : pas si facile en termes de motricité fine !). Un objectif secondaire peut être de percevoir l'angle droit comme étant l'angle le plus familier. Objectif qu'on va tester avec le gabarit. Pour résumer :
   - Pratiquer des pliages et des doubles pliages pour mettre en évidence un "coin" ou un "sommet d'un coin". Représenter ou dessiner les traces obtenues. D'où l'idée, chercher un invariant : le "re"pli sur le pli, pour représenter l'angle droit = angle familier.
   - Ces "coins", dont l'invariant, peuvent alors être utilisés dans la classe pour percevoir et "voir" des angles droits dans cet environnement : horizontalité et verticalité (note de PW : pas terrible !) dans le plan, puis dans d'autres cas occupant le méso-espace : exemple emblématique, le quadrillage.
   - Effectuer alors un début de tri : il y a des "angles droits" , il y en a qui ne le sont pas, sachant que tous les angles droits se ressemblent.
   - On peut passer à des activités plus géométriques et dessiner des figures usuelles (carré, rectangle, triangle rectangle) possédant un ou des angles droits, à l'aide des instruments pas encore idoines.

2.a La question de la validation : question centrale dans toute activité d'enseignement-apprentissage ! Validation – élève : déplacements dans la salle de classe et vérification que l'angle droit est un bon "coin" ou un bon angle dans cet environnement, idem avec des gabarits en dur de carrés ou de rectangles ou de triangles rectangles, idem dans des réseaux quadrillés.

2.b ATTENTION ! C'est le M1 qui est interrogé dans cette question. Toute bonne explication mathématique basée sur la symétrie axiale est acceptée. (*Théorème : un "pli" représente une droite, toute droite possède une infinité d'axes de symétrie, tous perpendiculaires, par définition, à cette droite*). Conformité avec les programmes 2008 : NON. La séquence n'est pas conforme, car il n'y a rien dans le B.O. sur la fabrication d'instruments à ce niveau de classe, bien que l'utilisation de gabarits soit mentionnée (mais au CE1 et pas au CP ; oui, mais on est dans une logique de cycle et cela semble être le choix des auteurs de commencer tout de suite à travailler avec un gabarit d'angle droit). Rappel : pas de jugement sur les choix, on reste dans la lecture la plus analytique possible du B.O. Pour aller plus loin. L'exercice 1 permet de construire un gabarit d'angle droit, c'est "jouable" au CP, mais on ne sait rien sur son "utilisation" : vérifier qu'un angle est droit (exercice 2) et utiliser un angle droit pour réaliser des constructions (exercice 3). Ces tâches géométriques sont plutôt spécifiques de compétences relevant du CE1.

3.a et 3.b INCONTOURNABLE... Deux compétences. Pour l'activité de ce manuel, on peut exhiber et mettre en évidence les deux compétences générales suivantes. C1 : Reconnaître perceptivement un angle droit dans une figure complexe ou dans un environnement complexe. C2 : Vérifier à l'aide de l'instrument gabarit-équerre l'existence d'angle(s) droit(s) dans une figure complexe.
Combien d'angles droits ? J'en ai dénombré quatorze. A confirmer...

4.a et 4.b La compétence : "Utiliser un gabarit d'angle pour réaliser un tracé d'angle droit" (*Oui, mais c'est au programme de CE1, cependant, cela semble cohérent avec les choix des auteurs du manuel !*) Description des tâches. Il convient d'utiliser le gabarit d'angle droit pour vérification par superposition dans l'exercice 2 et réaliser un tracé sans positionnement particulier dans l'exercice 3. D'où quelques difficultés essentiellement « techniques » :

- Organisation des tracés : maintenir l'équerre, tracer le long des bords avec un crayon, ne pas "tourner autour de l'angle droit", mais dessiner d'abord le support de l'un des côtés, recommencer plusieurs fois.
- Travailler dans le peu d'espace-papier proposé dans chaque case.

  Une difficulté plus "conceptuelle" :
- Concevoir un angle droit, indépendamment de sa position spatiale.

5.a Compléter une figure pré-construite à l'aide d'un gabarit-équerre ou d'une équerre afin d'obtenir un carré ou un rectangle, sur un support non quadrillé. Construire le quatrième sommet d'un rectangle ou d'un carré.

5.b Pour construire un rectangle, il suffit de construire trois angles droits. Autre réponse possible, complémentaire de la précédente : un rectangle possède une longueur et une largeur distincte.

5.c
- Quelques difficultés. Une conception erronée de l'angle droit, idem pour un carré ou un rectangle.
- Difficulté liée à l'utilisation de l'équerre (positionner l'équerre le long d'un côté et faire coïncider l'un des sommets du rectangle avec le sommet de l'angle droit de l'équerre).
- Difficulté à utiliser plusieurs fois de suite le même gabarit d'angle droit.
- Les figures à compléter sont données dans des positions non prototypiques. (*Variable didactique)*
- La construction se fait sur du papier blanc ou uni. (*Variable didactique)*

5.d La mise à disposition d'un calque, sur lequel figure chaque quadrilatère complété, parait de loin la meilleure réponse car il est difficile à ce niveau (fin de CP) d'envisager des vérifications par pliages (axes de symétrie) ou par comparaison de longueurs (compas ou bande papier) ; on n'évoque pas la vérification des angles droits car ils sont supposés bien tracés...

EXERCICE 5, cycle III

1) Pas de problème particulier : les deux grandeurs distinctes en jeu sont le PERIMETRE et l'AIRE d'une figure (polygonale) plane.

2)a et 2)b Assez subtil ! Les deux triangles possèdent un côté commun : [AM] (la médiane issue de A) et deux côtés de même longueur : $BM = MC$; il suffit donc d'avoir une information : BA = ou $\neq$ AC. Conclure... D'où les cas particuliers : (ABC) isocèle en A et (ABC) équilatéral donnent des périmètres égaux.

3) Un grand classique en didactique : un "théorème en acte". Cf. les TD... *Enoncé du "théorème en acte" : pour les figures planes, les périmètres sont rangés comme les aires et réciproquement.*

4) On a répondu en détails à cette question pendant les TD consacrés à ces notions. Rappel, vite fait : comparaisons directe, comparaison indirecte par découpage-recollement ou comparaison indirecte à l'aide d'un gabarit tiers, comptage-dénombrement dans un quadrillage, "amélioration" du carreau-unité, ...

5) et 6) Renvoi aux TD déjà mentionnés. (les énoncés et les corrigés se trouvent dans le cours CELENE de PW. Ouf ! *Une maxime à méditer : le mieux est l'ennemi du bien*)

EXERCICE 6, cycle III. Extrait du sujet S1, M1, site d'ORLEANS de janvier 2016.

1) Réponses fausses, mais pas nécessairement cohérentes dans les erreurs. Un grand classique : Basile manifeste en acte une définition fausse d'un nombre décimal : pour lui, un nombre décimal est la concaténation (ou le "collage") de deux nombres entiers, séparés par une virgule et du coup, les calculs se font de chaque côté de la virgule. Le langage oral usuel et banal renforce cette conception : la tâche : calculer (1,3 + 1,12) se lit (trop) souvent : *calculer un virgule trois plus un virgule douze* et donc, on "fait" 1 + 1 et 3 + 12 qui peut donner 15 ou 42 ; mais 42, c'est un peu beaucoup ; et 1,15 c'est pas trop mal comme résultat, ça peut le faire ! Réponse à densifier : Cf. item 2)

2) Il semble que ce soit la même conception qui soit en jeu pour cette tâche de rangement, surtout si on oralise too much. Par exemple, on a : $6 < 100$, donc $5{,}6 < 5{,}100$: parties entières égales, donc on ne s'intéresse qu'aux parties décimales et voilà, enlevé c'est pesé. Note de PW : il faut aussi être au clair sur *parties entières* et *parties décimales*. Bref, il y a une révolution à faire... PW signale aussi que cela fait des décennies et des décennies que ces aspects délicats concernant le nombre décimal sont étudiés. Les premières études didactiques sérieuses, of course, datent de la fin des années 1970, début des années 1980. D'où la question : a-t-on avancé depuis ?

3) Deux clefs : (i) la décomposition canonique, en s'intéressant au rang de chaque chiffre ; (ii) d'autres formats d'écriture et donc de diction de ces nombres. On peut, et même on doit, dire "un et trois dixièmes" ou "treize dixièmes" pour 1,3. C'est surtout pour dire 1,12 que cela va être important. On va donc dire "cinq et cent millièmes" pour 5,100 qui se dit aussi "cinq et un dixième", d'où l'égalité. On va dire aussi "cinq mille cent millièmes" et ... Il est important que ces dictions et ces conversions et égalités d'écritures distinctes soient pratiquées quotidiennement au cycle III, et ce, dès le CM1.

3), 4), 5) A corriger seul : Revoir les cours et TD sur la question. Très bonne idée, il va falloir revenir en arrière et se souvenir de ce qui a été fait en octobre et novembre.

6) Une ou des définitions. Surtout pas **"un nombre à virgule"**, TOUT sauf ça, car = chronique d'une katastrof annoncée. On peut en proposer plusieurs, dans différents contextes et pour résoudre différentes tâches.
PW conseille d'aller jeter un oeil non distrait (!) dans des manuels de cycle III ; les énoncés de la collection Hatier sont tout à fait pertinents. Il y a aussi des énoncés moins pertinents : excellente occasion de s'intéresser à ces supports pédagogiques...
Une définition liée à la notion de **quotient**.
Un nombre décimal, quelle que soit son écriture, est un nombre qui multiplié par 10, 100, 1000, ... donne un nombre entier.
Débat à prévoir sur cette définition certes robuste, mais délicate à appréhender, autant pour la professeur que pour les élèves au cycle III et au collège...