

GEOMETRIE

cycle III et plus, si affinités...

Quelques questions d'enseignement

« Fil rouge » : résolution de problèmes

Patrick WIERUSZEWSKI

Université ORLEANS, ESPE CVL, BLOIS

Département GCD de MATHEMATIQUES

PLATON ($\approx -428/-347$)

« Que nul n'entre ici s'il n'est pas géomètre ! »

Que de dédales parcourus !!!

Cadre et « territoire » de l'animation-conférence : limites et perspectives ; contenus, programmes, pratiques d'enseignement,...

Sans oublier les habituelles « FRIANDISES »...

Limites et perspectives

- On se situe essentiellement dans le cadre de la géométrie plane enseignée au cycle III, *pour aller vers le collège*. Quid de la géométrie dans l'espace : *commentaires...*
- Le domaine très voisin et connexe des grandeurs et des mesures ne sera pas abordé. *Ah, zut !*
- Les programmes : survol rapide, mais des « analyses-débat » sur quelques points « délicats ». Quid du SCCC(C) et des paliers : *commentaires...*
- Enfin, pour le format de cette animation-conférence, les points de repères théoriques et surtout didactiques seront contextualisés, voire « simplifiés » ! *Ouf !*

La PROBLEMATIQUE du jour : repérer, énoncer, « discuter » et (*essayer de*) comprendre quelques « difficultés » non anodines, mais quotidiennement « banales » dans « l'enseignement-apprentissage » de la GEOMETRIE du cycle III au collège.

On va donc essentiellement interroger les mathématiques et l'épistémologie du professeur. Pour une fois, on va un peu laisser tranquilles les élèves !

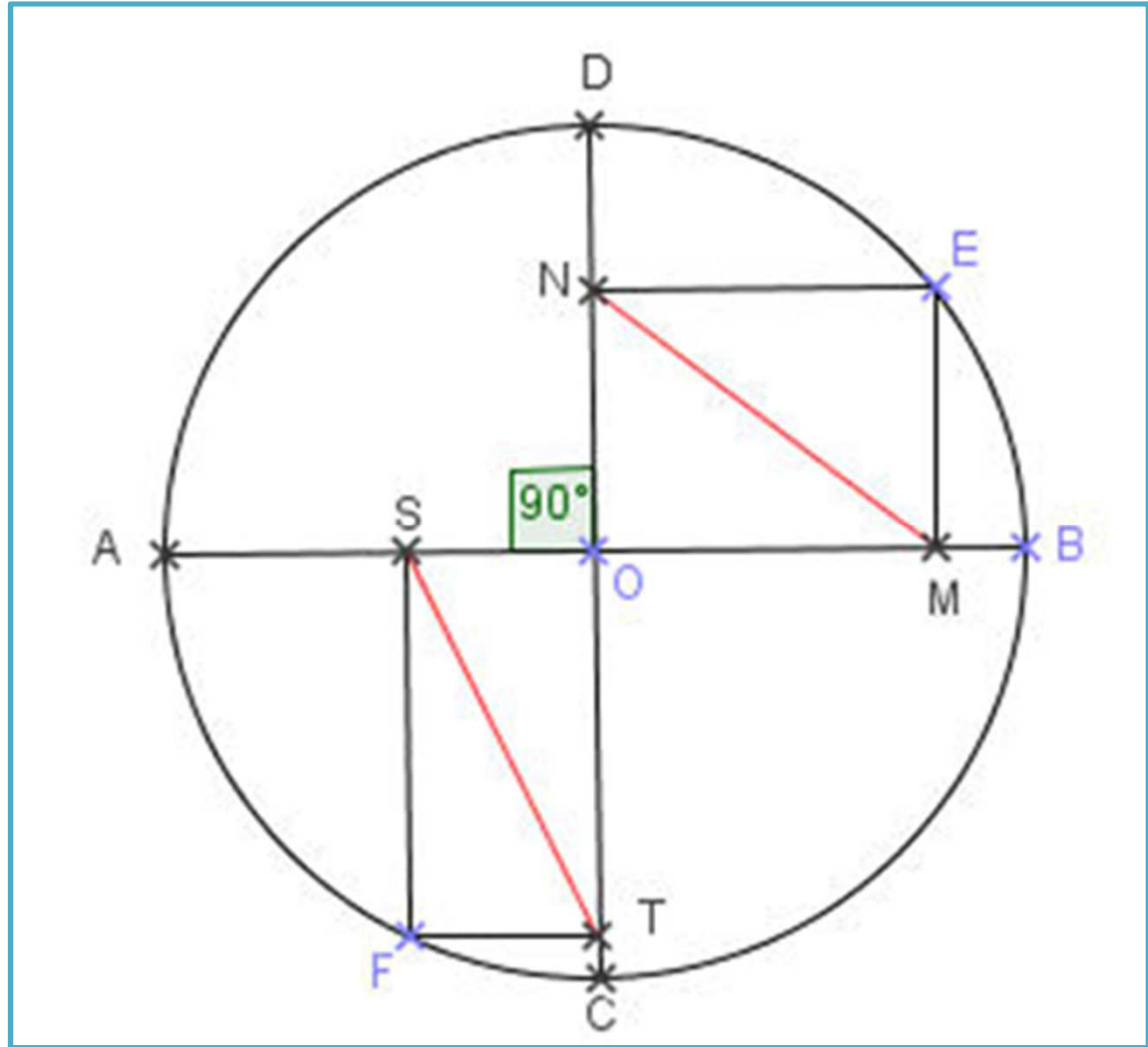
Un premier constat et une situation « banale », sans aucune prétention statistique. *Ouf!*

« *Je suis M2 stagiaire, je suis affecté en cycles II ou III, et donc, par conséquent, je serai chargé d'assurer un enseignement, dans l'ordre, en : (1) GEOMETRIE et (2) Grandeurs et Mesures ; le TOUT dans le cadre élargi de la Résolution de Problèmes...* ». Et pourquoi ?

Parce que la GEOMETRIE, c'est bien ! *Y faut n'en faire !*

Pour commencer : une première friandise, un grand classique !
Pourquoi enseigner la GEOMETRIE ? Commentaires...

Les segments **[AB]** et **[CD]** sont deux diamètres \perp du cercle de centre **O**. Le point **F** est un point du cercle et **FSOT** est un rectangle. Le point **E** est un point du cercle et **EMON** est aussi un rectangle. Quelle est entre **MN** et **ST** la plus grande longueur ? *Why ?*



OUI, mais il y a des OBSTACLES de deux natures : les « FAUX » et les « VRAIS » (JF GRELIER, Toulouse). *Vite fait.*

Du côté de quelques « FAUX » obstacles.

- Ce qui relève de la tradition grecque. Le savoir géométrique est ontogénique : il est constitutif de l'homme, et donc, en particulier, il n'est pas à construire. Conséquence : la pratique d'une pédagogie dite de l'OSTENSION : quelques « bonnes » définitions, une « bonne » organisation verticale du savoir, en général, du « simple » au « compliqué » suffiraient ! *Hop là, une belle leçon de « choses » et de vocabulaire et le tour est joué !*
- Corollaire 1 : il y a « danger » que les expériences sur les objets géométriques (ou leurs représentations) basculent et glissent (*subrepticement* ?) vers des discours sur ces mêmes objets. De fait, « faire de la GEOMETRIE », c'est savoir DEMONTRER... Exemple...
- Corollaire 2 : la tradition cartésienne, caractérisée par la prégnance de la méthode déductive : on va du « simple » au « compliqué » et on avance « step by step ». *Du point à la droite.*

FRIANDISE ou pas ? Parlons-en des points et des droites !

Manuel de niveau CM (1 et 2), chez Magnard. *Prog. 2008.*

Que penser des énoncés ci-dessous, et surtout que peut-on en faire, c'est-à-dire, quels types de problèmes sont résolubles avec ces énoncés ? *Question sensible et cruciale !*

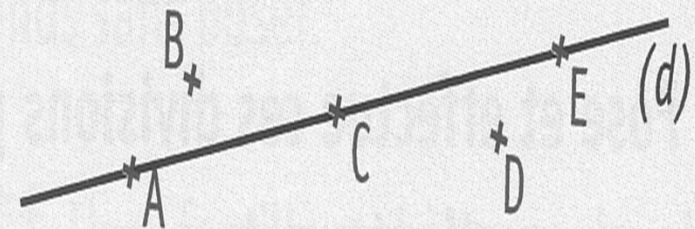
► La géométrie exige **rigueur et précision** dans le vocabulaire utilisé.

Bon d'accord, it's OK !

► Une **droite** est formée par un nombre infini de points alignés : on ne peut donc pas mesurer une droite.

On représente un point par une croix.

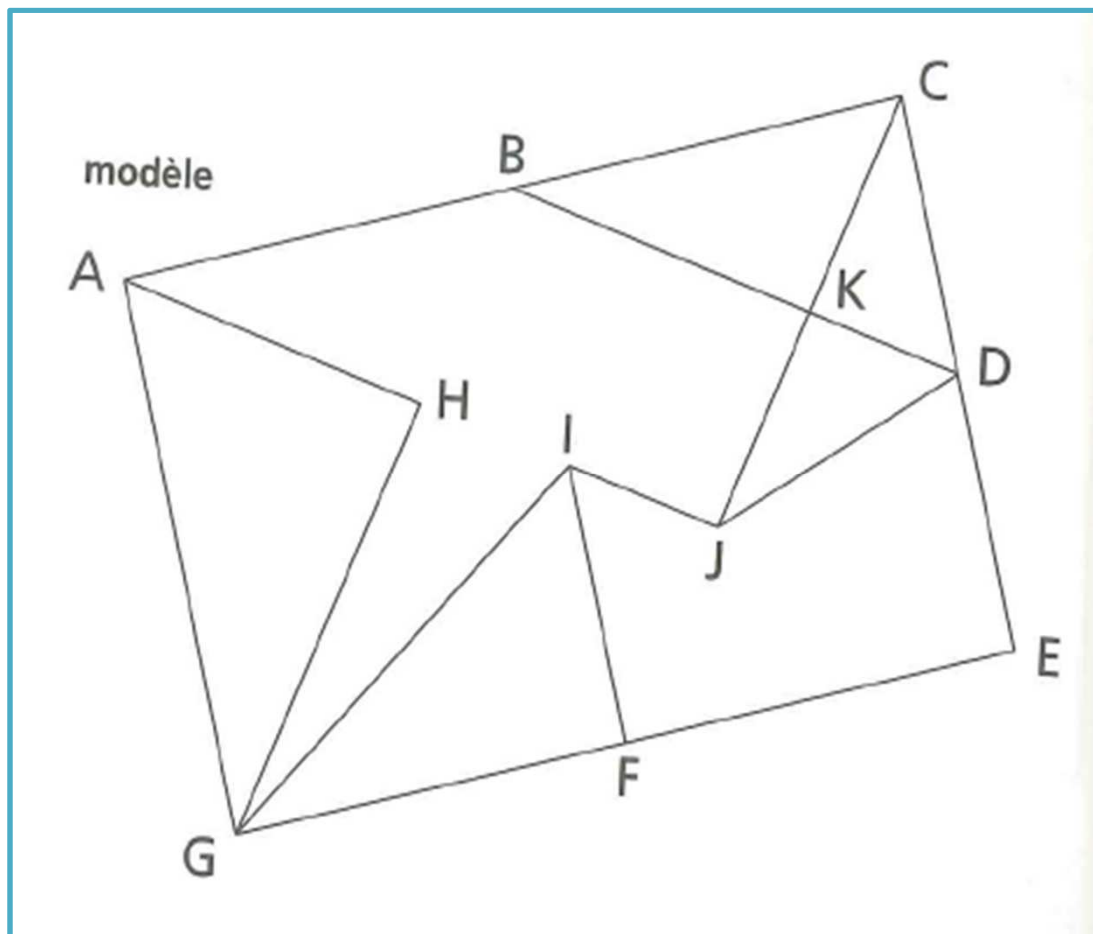
On le nomme au moyen d'une lettre majuscule d'imprimerie.



Les points A, C et E sont alignés.

Ils appartiennent à la droite (d).

La « *définition* » (?!?) du manuel parlent de points alignés, sans aucune activité structurée sur cette relation spatiale. Cela semble donc aller de soi de parler d'alignement. Et pour vous, cela va-t-il de soi ? FRIANDISE, enfin !



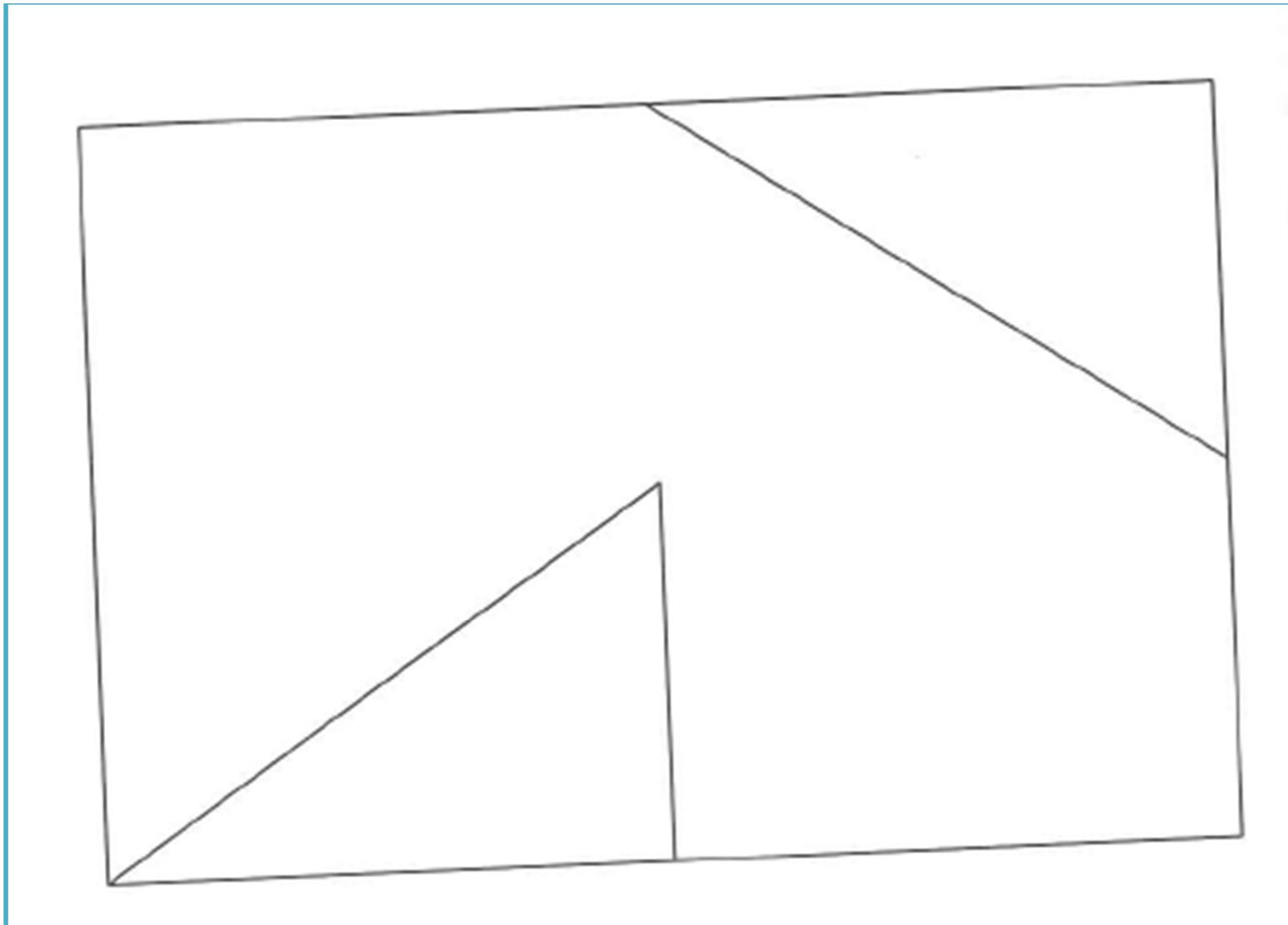
Une « activité-élève » pour « parler » d'alignement. (D'après « EuroMath », CM1)

Figure ci-contre : le « modèle ».

Figure à reproduire : diapositive suivante.

Consigne : compléter la figure de la diapositive suivante pour qu'elle soit semblable au modèle.

Variables de situation : instruments autorisés, ...



Travail **PE** : quels invariants, quelles variables, intérêt et objectifs d'une telle activité géométrico-graphique ?
On poursuit l'étude des « obstacles »...

➤ Corollaire 3 : l'histoire récente des « Mathématiques Modernes ». L'algèbre linéaire et la géométrie analytique investissent le territoire de la GEOMETRIE. *Bon, voilà !*

➤ Corollaire 4 : le rapport aux instruments de construction géométrique. Les figures géométriques se construisent à la règle (*non graduée*) et au compas.

Quid des instruments moins « nobles » ? Et les LGD ?

FRIANDISE. Un nouvel instrument incontournable : le triangle obtusangle (*triangle possédant un angle obtus*) en dur.

On se donne (*le dessin, oui, oui, rien d'autre !*) d'une droite nommée (**d**).

Tâches. A l'aide d'un gabarit d'un triangle obtusangle, **CONSTRUIRE** mucho droites perpendiculaires à (**d**). Idem avec mucho droites parallèles à (**d**). *Commentaires et débats...*

Notes de PW. *On peut encore n'en faire pleins de trucs avec ce gabarit ! Et avec un triangle acutangle ?*

Du côté des «VRAIS » obstacles.

- Préoccupation permanente de tout professeur (PE et PLC) de ne pas « opposer » démarche déductive et démarche inductive. Analyse des manuels...
- La représentation de l'espace : on « fait » de la GEOMETRIE sur des objets géométriques que parfois on ne sait pas dessiner ou pas représenter.

Les trois espaces (micro, méso, macro)...

- Le langage spécifique de la GEOMETRIE : c'est un langage sur la spatialité. *Tout à fait délicat...*

Au primaire, les relations spatiales étudiées portent sur l'ALIGNEMENT, le REPERAGE et le POSITIONNEMENT, l'ORIENTATION, la DIRECTION (dont la PERPENDICULARITE et le PARALLELISME) et la notion de TRANSFORMATION (essentiellement la « SYMETRIE-PLIAGE »). On a tout le programme !

Idem au collège, mais avec de nouveaux objectifs.

➤ Corollaire : apprendre de la GEOMETRIE consiste pour l'apprenant à structurer des connaissances sur les formes, et à structurer des connaissances sur les relations spatiales qu'ont les formes entre elles.

La question posée au PE et au PLC : par quoi est-il pédagogiquement raisonnable de commencer ?

Une piste (nouvelle ?) Un manuel de cycle : « Math, CYCLE 3 », chez Hatier.

➤ Rôle(s) et place(s) des supports d'expériences graphiques, d'expériences numérisées, puis d'expériences géométriques. Variables de situations et variables didactiques... *Vaste question !*

A partir de là, l'affaire se complique : c'est le problème du professeur ! *Komment c'est-y donc ki faut-y faire ?*

On n'y coupe pas : il faut regarder les programmes...

Eléments d'analyse et émergence de quelques points « délicats » à la lecture des programmes 2008 et des programmes du début du collège.

- Cercle. Dès la Maternelle, on s'intéresse au « rond » (*ainsi qu'au carré et au triangle*), mais aussi au cercle en 2015 ! Comme le tracé d'un cercle au compas est une tâche spécifique du cycle III, il paraît « logique » qu'on s'intéresse aussi au « rond » au cycle II. (...). *Que disent ou que préconisent les programmes ?*
- Triangle rectangle au cycle II. Si on ne « travaille », au cycle II, qu'avec des triangles rectangles, pourquoi le spécifier comme tel, sur un plan pédagogique ? (...) *Quid des autres ?*
- Triangle, suite. Hauteur dans un triangle au cycle III. Il y a essentiellement deux acceptions dans les manuels : hauteur comme objet géométrique, une perpendiculaire particulière et hauteur comme grandeur, distance la plus courte d'un point à une droite. *Liens entre ces deux acceptions et activités idoines à produire (...)*

On poursuit...

- Travail sur le quadrillage au cycle II : des manques d'explicitations ou ? Tâche usuelle : reproduire sur papier quadrillé au CP, oui mais, il faut être en CE1 pour « repérer » noeuds et cases d'un quadrillage.
- Angle droit et droites perpendiculaires. Point très délicat ! Hypothèse forte : distinguer le concept d'angle droit et celui de droites perpendiculaires. Hypothèse forte, suite. Une « utilisation-apprentissage » trop prématurée de l'utilisation de l'équerre, à partir du CE1 peut « bloquer » la compréhension de l'angle droit. *Idem pour les parallèles...*
- Extrait du programme. « (...) Connaître un vocabulaire géométrique élémentaire approprié (...) ». La question qui vient est « lequel ? », corollaire : pourquoi faire ?
- GEOMETRIE et autres domaines connexes. On n'en parle pas, zut, bis !

Il s'agit (*presque*) de (*re*)poser et de (*re*)penser le problème de l'enseignement de la GEOMETRIE.

Un principe (*très schématisé*) : fonder l'enseignement sur une démarche dite empirique, partant des objets matériels pour faire émerger des *invariants* qui seront *modélisés* par les objets mathématiques.

Ensuite, on « boucle » ; les objets mathématiques vont alors permettre de réappréhender les objets matériels par leurs invariants : il y a, par essence un rapport de nature dialectique entre ces objets de nature différente.

Oui, mais, facile à dire !!! Des exemples vont suivre, ouf !!!

D'une certaine manière, les programmes officiels y sont globalement sensibles. En effet, depuis les programmes 1985, puis ceux de 1995–1996, puis ceux 2002, de 2007 et enfin, ceux d'aujourd'hui (*en attendant 2016...*), il est mis en filigrane le fait que ces programmes argumentent et militent de manière plus ou moins équilibrée et approfondie pour un enseignement d'une GEOMETRIE qu'on pourrait qualifier de « GEOMETRIE active ». Alors « activons » !

Les enjeux de « l'enseignement – apprentissage »

- Les activités « d'enseignement – apprentissage » à l'école primaire ne visent pas des **connaissances** dites **formelles** (*par exemple* : l'apprentissage direct et immédiat de définitions ou de propriétés), *mais plutôt* des **connaissances** dites **fonctionnelles** (*dans le but de résoudre des problèmes*).
- D'où « une entrée » dans la GEOMETRIE enseignée par les **RELATIONS GEOMETRIQUES** plutôt que par les **NOTIONS**.

Ah, là, il va falloir expliquer ! On a déjà commencé. Ah bon ?

Les **OBJETS** : pas de recensement, on les connaît, *ou plutôt*, on entretient certains rapports avec ces objets. *Voir les programmes* et les diapositives précédentes.

Du côté des **RELATIONS** spatiales **GEOMETRIQUES** : c'est le nœud des *programmes*. *Elles ont déjà été référencées, mais on en remet une couche.*

Un petite friandise, à déguster immodérément !

MATERIEL autorisé :

- Un crayon (*bien taillé*)
- Une règle NON graduée.

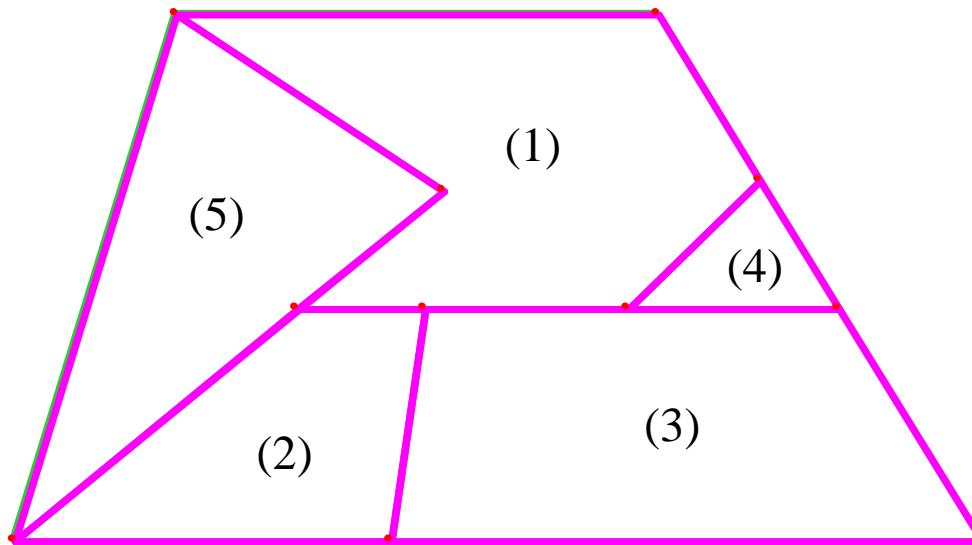
Rien d'autre ? NON !

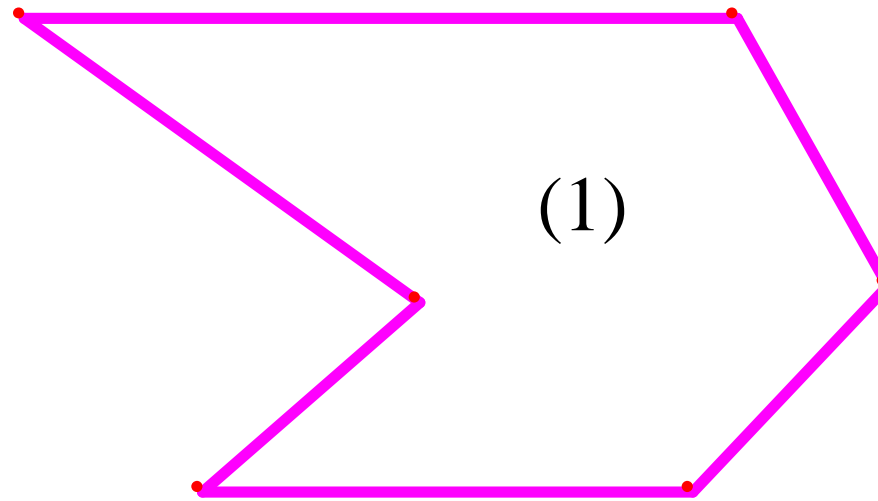
CONSIGNE :

A l'aide du matériel autorisé, reproduire ce « PUZZLE », sachant qu'on ne dispose que de la pièce n°(1) ci-contre. (*Laisser les traces de construction*).

Cf. diapositive suivante

Equipe de MJ Perrin, IUFM, Lille





Inflation de Friandise ...Un jardinier plante dix arbres dans son jardin. Il a réussi à les disposer en formant cinq lignes (*droites, of course !*) de quatre arbres à chaque ligne. Retrouver une disposition possible.

Les **RELATIONS**

- 1) Relations d'appartenance (*ou d'incidence*) et alignement.
- 2) Parallélisme, Perpendicularité.
- 3) Les égalités, en particulier, les égalités de longueurs.
- 4) La notion de repérage.
- 5) Les isométries, similitude d'objets (*superposabilité avec ou sans retournement, agrandissements ou réductions*).

Les **PROPRIETES**

Certains énoncés expriment des propriétés d'objets qui peuvent être des éléments d'une définition (...). *Le cube...*

D'autres énoncés expriment des théorèmes.

Commentaires : à l'école primaire, les propriétés sont d'abord des outils implicites de solutions à des problèmes (Exemple : « *est-il possible de construire un triangle avec deux angles droits ?* »). Ces propriétés constituent alors des **outils** pour valider une solution. Enfin, ces propriétés ne sont pas du tout des objets d'étude à l'école. (...)

Les différentes « ACTIVITES » géométriques déclinées à l'aide de verbes d'action idoines.
Les différents « types » de problèmes.

- **DECRIRE**
- **CLASSER**
- **REPRODUIRE**
- **CONSTRUIRE**
- **REPRESENTER**
- **(CALCULER)**

Les verbes ci-contre, associés à une ou à des expansions nominales, voire propositionnelles ou à des compléments vont ainsi définir ce qu'on va appeler des « types de tâches ».

Des exemples ? Oui, Au moins un, un peu plus loin : une FRIANDISE.

Atelier : définir chacun de ces verbes et les illustrer de d'exemples adaptés (*objectifs, consigne(s), « contraintes » sur le matériel, évaluations, ...*).

DISPOSITIFS pour mettre en œuvre les verbes d'action décrits ci-dessus : les « types d'énoncés », accompagnés de registres de langues adaptés.

On « part » d'un ...

On « produit » un ...

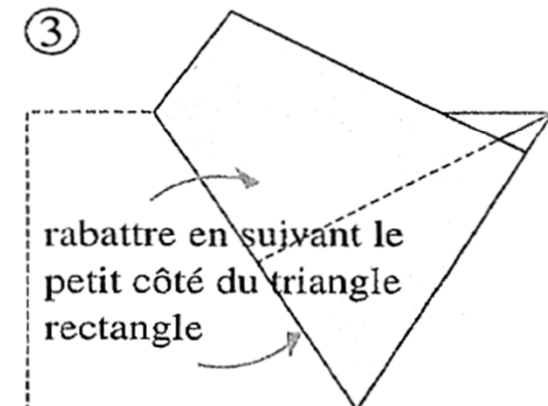
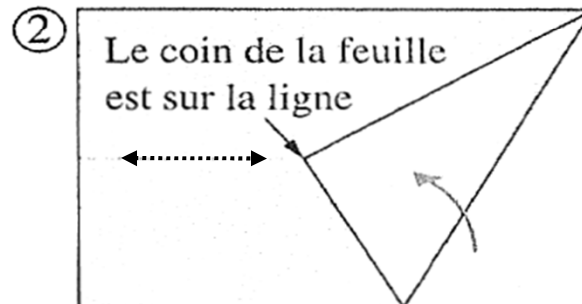
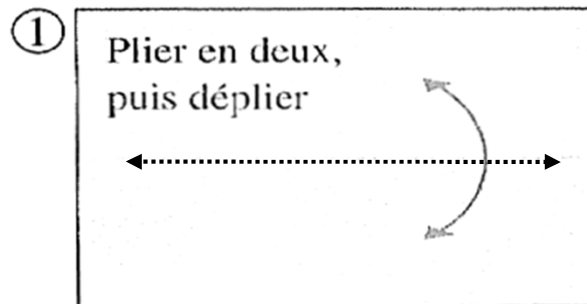
TEXTE	TEXTE
TEXTE	FIGURE
FIGURE	FIGURE
FIGURE	TEXTE

FRIANDISE : construction d'un gabarit de TRIANGLE EQUILATERAL ou mieux, d'un gabarit d'angle de 60° .

Matériel : une feuille A4 et c'est TOUT. *Ah bon !*

Manipuler

Prendre une feuille rectangulaire et réaliser les trois pliages comme sur les figures ①, ② et ③.



Mathématiques « embarquées » : c'est une autre paire de manches. Il y a des « histoires » de médiatrice, de cercles, d'angles, ... Mais on tient là des pistes de travail sur la notion d'angle, en fabriquant des gabarits, indépendamment de la mesure. *Ah, yes !*

Pour ceux que ça intéresse, contacter PW en fin de conférence.

Puisqu'on y est. On continue ! FRIANDISE, encore

Une première définition du PARALLELOGRAMME ou une rencontre avec les premières parallèles « obliques ».

Technique : il *SUFFIT* de plier de façon quelconque (mais « oblique ») la feuille de format A4, en partant d'un coin. On découpe (*Ah ! Rupture de contrat : pas de matériel, oui, mais, vite fait, un petit coup de canif ou mieux de ciseaux !*) et on met de « l'autre côté ». Pas mal ! *On scotch(e), on ne rhum pas !*

Mathématiques embarquées : essentiellement une transformation géométrique faisant apparaître des angles alternes internes égaux : une caractérisation du parallélisme en mathématiques.

On est pourtant loin des origamis, trop difficile, mais c'est pas mal quand même !

Quelques mots sur la PERPENDICULARITE

Sur un plan conceptuel : sur « quoi » s'appuie, *pas trop fort quand même !*, la notion de « perpendicularité » ?

- Dans l'espace 3D : les relations « *Vertical – Horizontal* ». *Référence obligée, mais « obstacle » potentiel ?*
- Un « coin » d'un rectangle générique, par opposition à d'autres « coins », « *non droits* ».
- Un « *quart de rond* » = un quart de l'angle plein. (*Production de deux gabarits*).
- Un « *pli sur le pli* » : une double symétrie axiale.
- Du côté des GRANDEURS : plus court chemin d'un point à une droite. *Aspect non abordé aujourd'hui.*

Les instruments spécifiques : règles, équerres et dérivées, gabarits, dont le triangle « en dur », compas, feuille « double pli », ... *Il y en a d'autres...*

Les supports (*dans le micro-espace*) : feuilles blanches, réseaux quadrillés et réseaux pointés, ...

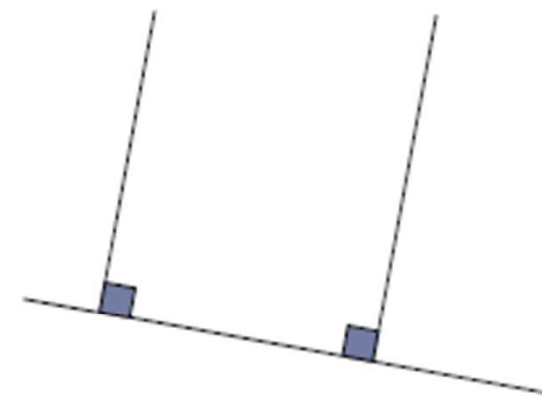
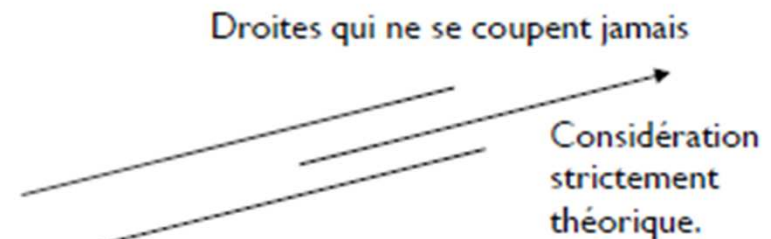
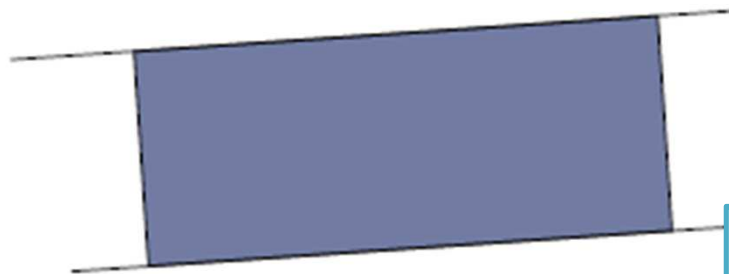
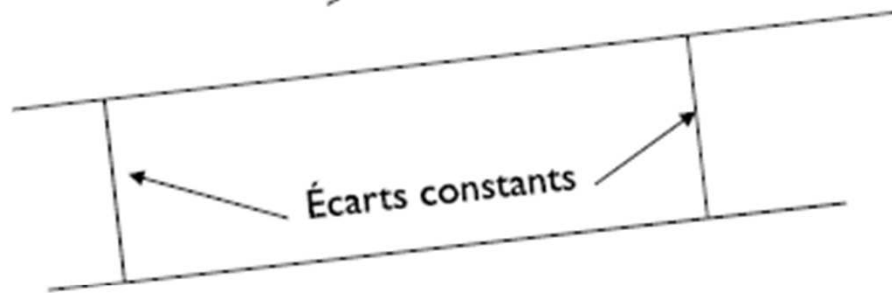
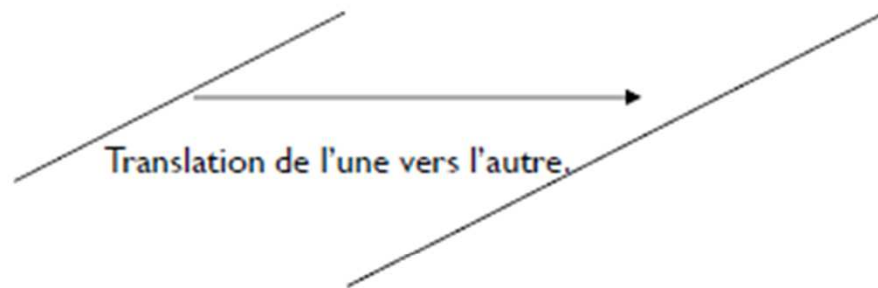
Les tâches élémentaires concernant la PERPENDICULARITE :

- T1. Une droite donnée ou choisie, dans un faisceau quelconque, sur un support choisi, est-elle perpendiculaire à une autre droite ? Discours explicatif ?
- T2. Deux droites, idem ci-dessus, sont-elles perpendiculaires ? Verbes d'actions : RECONNAITRE, VERIFIER, ... Contrôles et validations ?
- T3 et T3'. CONSTRUIRE une droite PERPENDICULAIRE, puis la droite PERPENDICULAIRE à une droite donnée, idem passant par un point donné. Variables de situation : instruments autorisés, supports de graphisme.
- PERPENDICULAIRE(S) et OBJETS MATHEMATIQUES, étude de quelques propriétés remarquables : la perpendicularité est un invariant dans bcp de configurations spatiales et dans bcp de contextes. *Territoire à investir !*

Ces tâches élémentaires s'exécutent sur des supports variés et avec des instruments de construction à mettre en « concurrence ».

Quelques mots sur le PARALLELISME

Les aspects (*distincts*) de cette RELATION, sur papier blanc : quelles ENTREES pour préparer quelles ACTIVITES ?



Source : conférence Fabien EMPRIN

Les tâches élémentaires concernant le PARALLELISME :

- T1. Une droite donnée ou choisie, dans un faisceau quelconque, sur un support choisi, est-elle parallèle à une autre droite ?
- T2. Deux droites, idem ci-dessus, sont-elles parallèles ? Verbes d'actions : RECONNAITRE, VERIFIER, ... Contrôles et validations ? Un nouvel instrument : le « guide-âne »...
- T3 et T3'. CONSTRUIRE une, puis la droite PARALLELE à une droite donnée, idem passant par un point donné. Variables de situation : instruments autorisés, supports de graphisme.
- PARALLELISME et OBJETS MATHEMATIQUES, étude de quelques propriétés remarquables : le parallélisme est un invariant dans bcp de configurations spatiales et dans bcp de contextes. *Territoire à investir !*

Un petit tour du côté des QUADRILATERES un mode de génération en tant que surfaces fermées

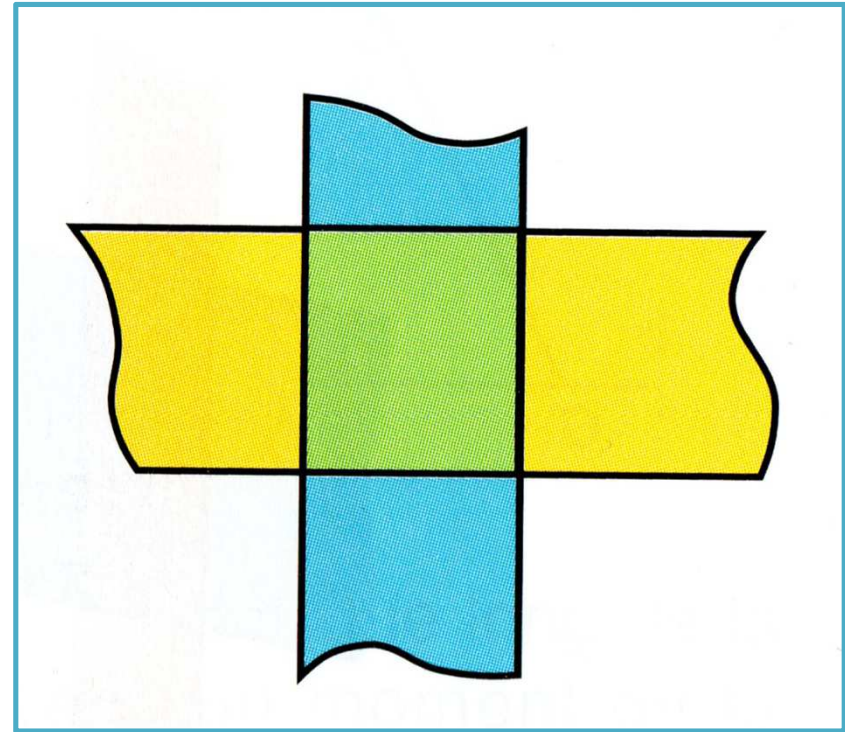
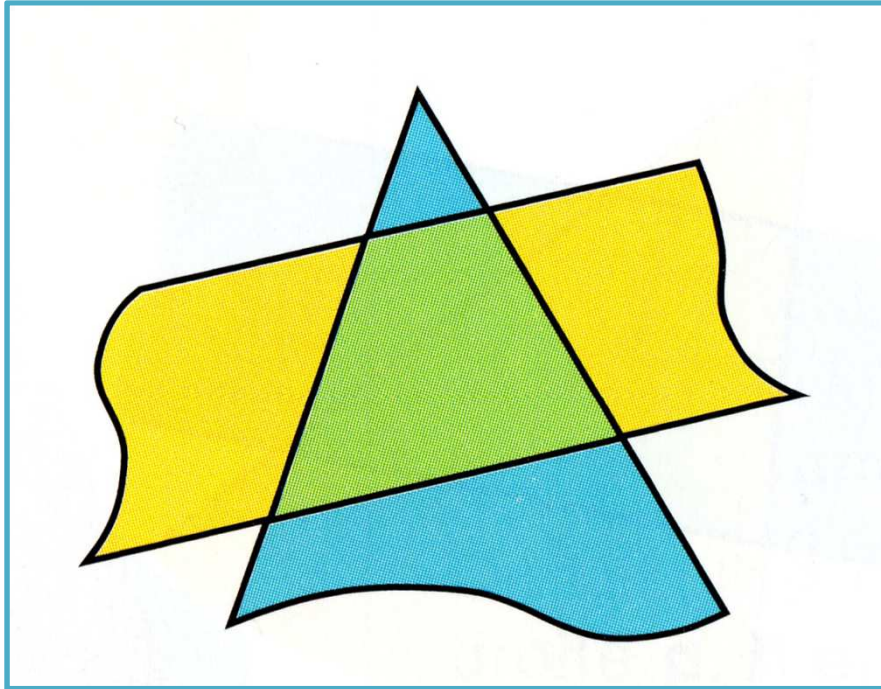
La question est : comment générer ou engendrer UN quadrilatère (en tant que nouvelle figure géométrique) à partir de surfaces planes « simples » ? (A définir !).

L'approche qui est ici privilégiée est celle consistant à définir le quadrilatère comme croisement ou intersection de deux surfaces planes « simples » et illimitées.

L'objectif consiste donc à créer de tels nouveaux objets. Ensuite, par « manipulations » (*déplacements, glissements, rotations, ...*), on cherche des invariants.

MATERIEL : des « bandes » découpées, à bords parallèles ou pas ; des « angles » découpés, ...

Cf. diapositive suivante pour une illustration.



Une autre activité emblématique :
le jeu des « **KwadriEtikettes** ». *D'après F. BOULE et CRPE...*

Cf. Diapositive suivante.

Voici un JEU, il est constitué de dix « zétikettes ».
(où chaque zétikette est « porteuse » d'une propriété mathématique).

(1) Deux angles droits (<i>seulement</i>)	(6) Côtés opposés parallèles
(2) Quatre angles droits	(7) Deux côtés parallèles (<i>seulement</i>)
(3) Côtés égaux « deux à deux »	(8) Diagonales égales
(4) Deux côtés égaux (<i>seulement</i>)	(9) Diagonales perpendiculaires
(5) Quatre côtés égaux	(10) Diagonales se coupant en leur milieu

La QUESTION : « koi kon peut n'en faire de ces **zétikettes** ? »

Quelques pistes... Travail **PE**, et oui !

(Variables : instruments autorisés, programmes de construction à rédiger, ...).

Un PROJET : ***un cahier de GEOMETRIE au Cycle III.***

Bon d'accord, mais qu'est-ce qu'on y « met » dedans ?

CONTENU

- Une liste des instruments et de leurs principales fonctions illustrées ;
- Les premières définitions contextualisées ou non. Un lexique et du vocabulaire ; *un principe* : varier les traces écrites ;
- Des constructions type, avec ou sans programme de constructions, type « BD » (*images fixes ou « film » de la construction, façon planche de BD*) ;
- Des problèmes de recherche, avec pistes de solutions. Et d'autres « problèmes », avec les solutions (...)

Quelles traces écrites dans le cahier ?
Elles recouvrent principalement quatre rubriques

Activités de découvertes, « liens » avec autres disciplines, autres aspects, ...	« Exercices-types » et exercices de « recherche »	Les CONNAISSANCES et les SAVOIRS	Les TECHNIQUES « privées » ou standards
A renseigner	A renseigner	A renseigner	A renseigner

A noter, des collections de manuels proposent un cahier de géométrie à partir du CE2.

On peut utilement et librement s'en inspirer pour des travaux diversifiés.

ANNEXES

Un manuel de cycle.

Recueil des
savoirs mathématiques ;
Organisation en
thèmes des notions au
programme ;
Banque
d'exercices conséquente ;
...

Cf. diapositive suivante :
un exercice intéressant ?

CYCLE 3

M A T H

• Mise à niveau
• Entraînement
• Différenciation
750 exercices

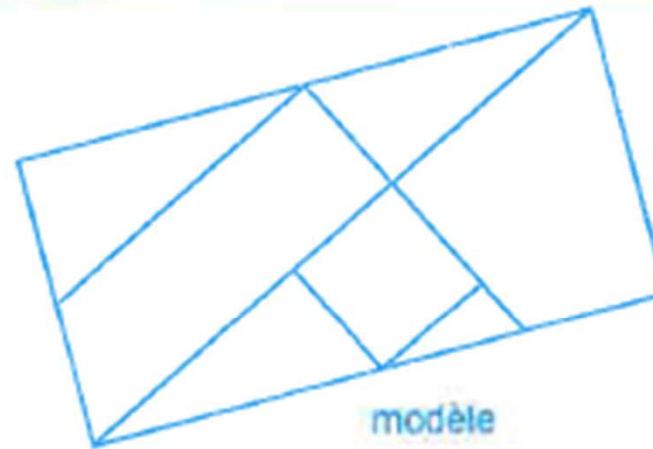
Intégration sur
www.editions-hatier.fr

Hatier

Super Exercice

- 28** Repère sur la figure modèle les alignements et les angles droits. Décalque les figures A et B. Complète-les pour qu'elles soient semblables à la figure modèle. Utilise ta règle et ton équerre.

On dit qu'une figure est semblable à la figure modèle si c'est la même, mais en plus grand ou en plus petit.



modèle

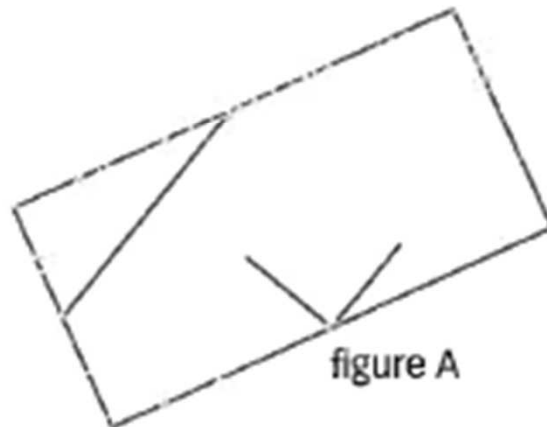


figure A

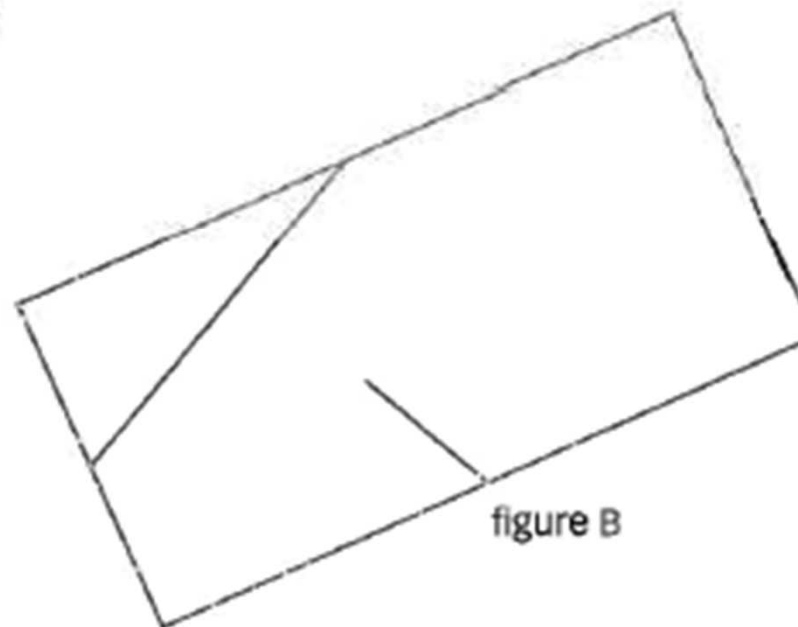


figure B

Des points et des droites, suite, mais surtout beaucoup de poésie. (Manuel de CM édité par Retz)

Programmes 2002 : ce n'est plus d'actualité. Ouf !

Je découvre

En géométrie, la droite passant par les points A et B se note (AB). Elle comprend le point A, le point B et tous les points alignés avec A et B.



- *Peux-tu imaginer un point de (AB) situé sur l'autre page du livre ?
Montre-le approximativement.*
- *Peux-tu imaginer un point de (AB) situé plus loin dans ta salle de classe ?
... plus loin, au-delà de ton école ? ... au-delà de la Terre ?*

J'ai appris

- (AB) comprend :
- 1° le point A et le point B,
 - 2° tous les points à l'intérieur de [AB],
 - 3° tous les points alignés avec A et B et situés à l'extérieur de [AB].



La longueur d'une droite est infinie.

En géométrie, pour nous aider à imaginer la droite passant par A et B, on trace toujours un trait plus long que celui qui relie les points A et B. Mais ce trait est forcément beaucoup moins long que (AB) !

Je termine sur cette belle proposition philosophico-poétique, merci et à bientôt.

patrick.wieruszewski@univ-orleans.fr