

GEOMETRIE

cycle III et plus, si affinités...

Quelques questions d'enseignement

« Fil rouge » : résolution de problèmes

Patrick WIERUSZEWSKI

Université ORLEANS, ESPE CVL, BLOIS

Département GCD de MATHEMATIQUES

PLATON ($\approx -428/-347$)

« Que nul n'entre ici s'il n'est pas géomètre ! »

Que de dédales parcourus !!!

Cadre et « territoire » de l'animation-conférence : limites et perspectives ; contenus, programmes, pratiques d'enseignement,...

Sans oublier les habituelles « FRIANDISES »...

Limites et perspectives

- On se situe essentiellement dans le cadre de la géométrie plane enseignée au cycle III, *pour aller vers le collège*. Quid de la géométrie dans l'espace : *commentaires...*
- Le domaine très voisin et connexe des grandeurs et des mesures ne sera pas abordé. *Ah, zut !*
- Les programmes : survol rapide, mais des « analyses-débat » sur quelques points « délicats ». Quid du SCCC(C) et des paliers : *commentaires...*
- Enfin, pour le format de cette animation-conférence, les points de repères théoriques et surtout didactiques seront contextualisés, voire « simplifiés » ! *Ouf !*

La PROBLEMATIQUE du jour : repérer, énoncer, « discuter » et (*essayer de*) comprendre quelques « difficultés » non anodines, mais quotidiennement « banales » dans « l'enseignement-apprentissage » de la GEOMETRIE du cycle III au collège.

On va donc essentiellement interroger les mathématiques et l'épistémologie du professeur. Pour une fois, on va un peu laisser tranquilles les élèves !

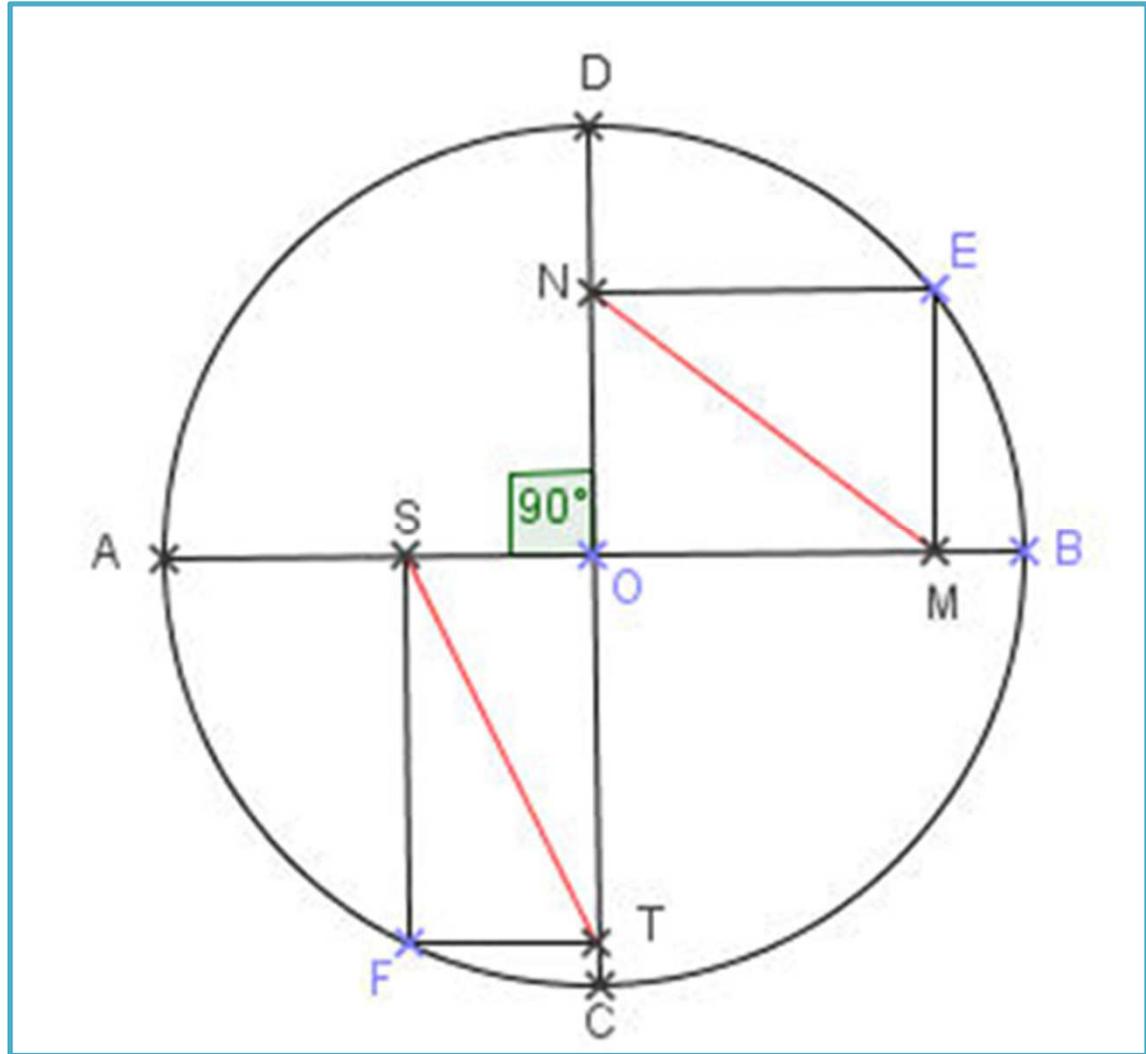
Un premier constat et une situation « banale », sans aucune prétention statistique. *Ouf!*

« *Je suis M2 stagiaire, je suis affecté en cycles II ou III, et donc, par conséquent, je serai chargé d'assurer un enseignement, dans l'ordre, en : (1) GEOMETRIE et (2) Grandeurs et Mesures ; le TOUT dans le cadre élargi de la Résolution de Problèmes...* ». Et pourquoi ?

Parce que la GEOMETRIE, c'est bien ! *Y faut n'en faire !*

Pour commencer : une première friandise, un grand classique !
Pourquoi enseigner la GEOMETRIE ? Commentaires...

Les segments **[AB]** et **[CD]** sont deux diamètres \perp du cercle de centre **O**. Le point **F** est un point du cercle et **FSOT** est un rectangle. Le point **E** est un point du cercle et **EMON** est aussi un rectangle. Quelle est entre **MN** et **ST** la plus grande longueur ? *Why ?*



OUI, mais il y a des OBSTACLES de deux natures : les « FAUX » et les « VRAIS » (JF GRELIER, Toulouse). *Vite fait.*

Du côté de quelques « FAUX » obstacles.

➤ Ce qui relève de la tradition grecque. Le savoir géométrique est ontogénique : il est constitutif de l'homme, et donc, en particulier, il n'est pas à construire. Conséquence : la pratique d'une pédagogie dite de l'OSTENSION : quelques « bonnes » définitions, une « bonne » organisation verticale du savoir, en général, du « simple » au « compliqué » suffiraient ! *Hop là, une belle leçon de « choses » et de vocabulaire et le tour est joué !*

➤ Corollaire 1 : il y a « danger » que les expériences sur les objets géométriques (ou leurs représentations) basculent et glissent (*subrepticement* ?) vers des discours sur ces mêmes objets. De fait, « faire de la GEOMETRIE », c'est savoir DEMONTRER... Exemple...

➤ Corollaire 2 : la tradition cartésienne, caractérisée par la prégnance de la méthode déductive : on va du « simple » au « compliqué » et on avance « step by step ». *Du point à la droite.*

FRIANDISE ou pas ? Parlons-en des points et des droites !

Manuel de niveau CM (1 et 2), chez Magnard. *Prog. 2008.*

Que penser des énoncés ci-dessous, et surtout que peut-on en faire, c'est-à-dire, quels types de problèmes sont résolubles avec ces énoncés ? *Question sensible et cruciale !*

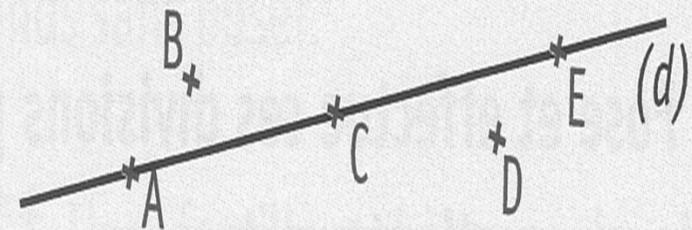
► La géométrie exige **rigueur et précision** dans le vocabulaire utilisé.

Bon d'accord, it's OK !

► Une **droite** est formée par un nombre infini de points alignés : on ne peut donc pas mesurer une droite.

On représente un point par une croix.

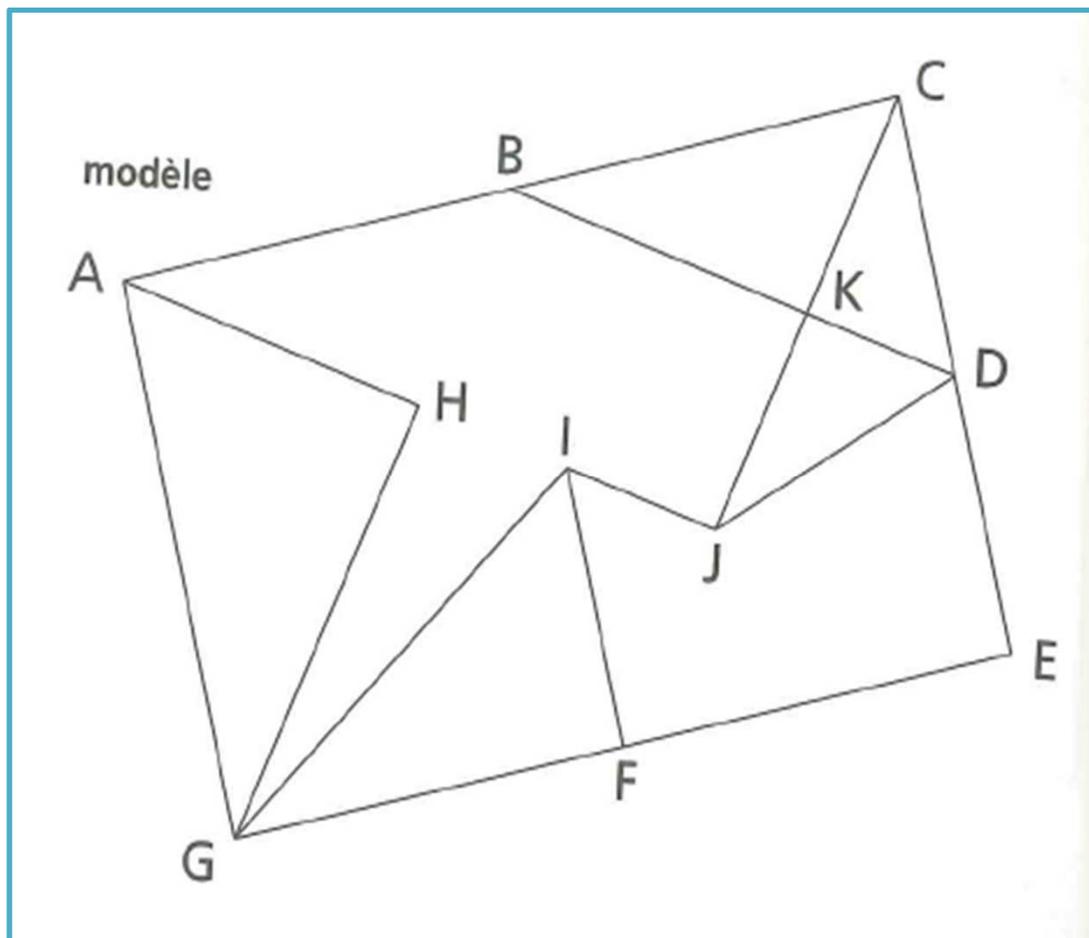
On le nomme au moyen d'une lettre majuscule d'imprimerie.



Les points A, C et E sont alignés.

Ils appartiennent à la droite (d).

La « *définition* » (!?!) du manuel parlent de points alignés, sans aucune activité structurée sur cette relation spatiale. Cela semble donc aller de soi de parler d'alignement. Et pour vous, cela va-t-il de soi ? FRIANDISE, enfin !



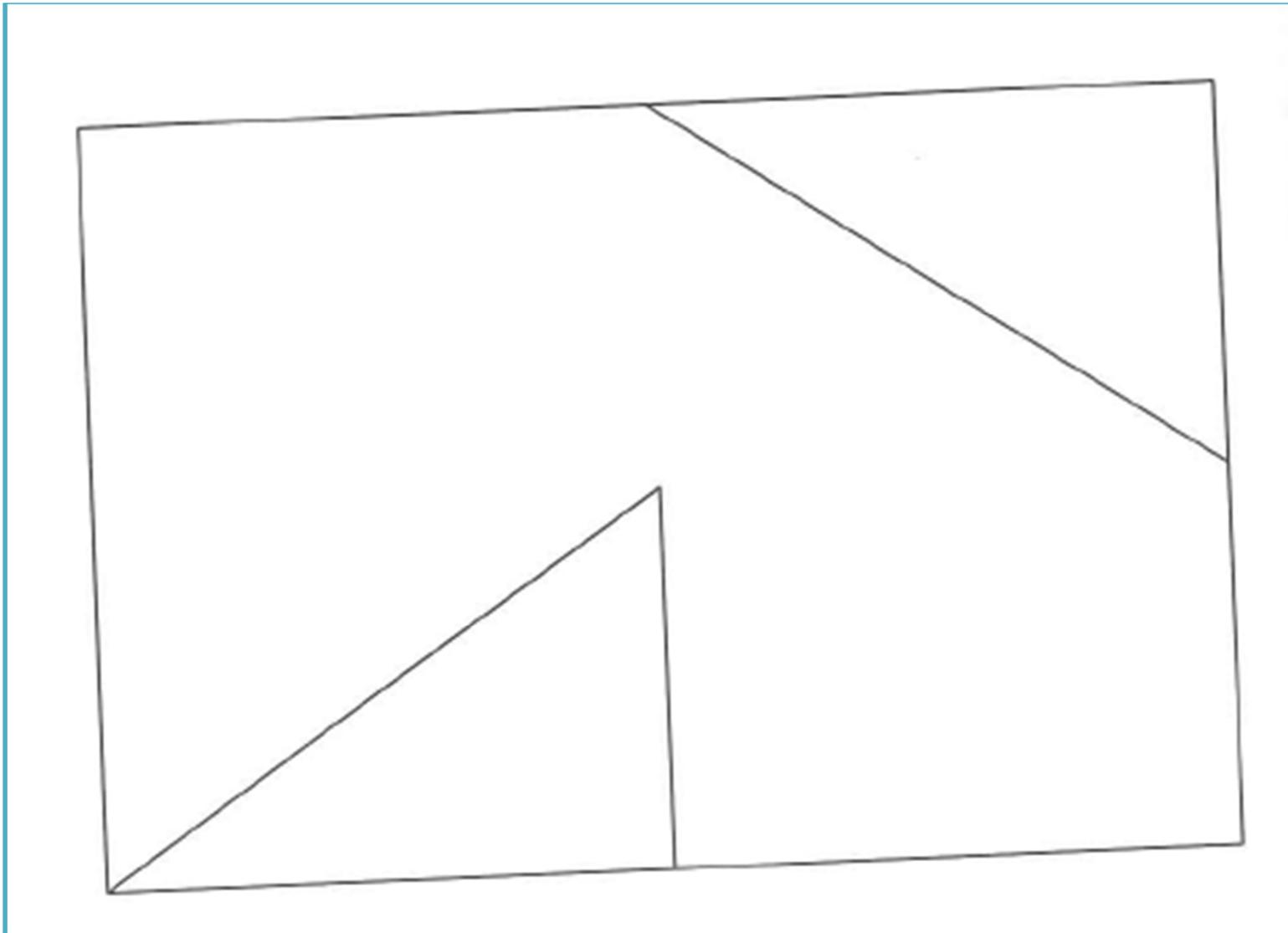
Une « activité-élève » pour « parler » d'alignement. (D'après « EuroMath », CM1)

Figure ci-contre : le « modèle ».

Figure à reproduire : diapositive suivante.

Consigne : compléter la figure de la diapositive suivante pour qu'elle soit semblable au modèle.

Variables de situation : instruments autorisés, ...



Travail **PE** : quels invariants, quelles variables, intérêt et objectifs d'une telle activité géométrico-graphique ?
On poursuit l'étude des « obstacles »...

➤ Corollaire 3 : l'histoire récente des « Mathématiques Modernes ». L'algèbre linéaire et la géométrie analytique investissent le territoire de la GEOMETRIE. *Bon, voilà !*

➤ Corollaire 4 : le rapport aux instruments de construction géométrique. Les figures géométriques se construisent à la règle (*non graduée*) et au compas.

Quid des instruments moins « nobles » ? Et les LGD ?

FRIANDISE. Un nouvel instrument incontournable : le triangle obtusangle (*triangle possédant un angle obtus*) en dur.

On se donne (*le dessin, oui, oui, rien d'autre !*) d'une droite nommée (**d**).

Tâches. A l'aide d'un gabarit d'un triangle obtusangle, **CONSTRUIRE** mucho droites perpendiculaires à (**d**). Idem avec mucho droites parallèles à (**d**). *Commentaires et débats...*

Notes de PW. *On peut encore n'en faire pleins de trucs avec ce gabarit ! Et avec un triangle acutangle ?*

Du côté des «VRAIS » obstacles.

- Préoccupation permanente de tout professeur (PE et PLC) de ne pas « opposer » démarche déductive et démarche inductive. Analyse des manuels...
- La représentation de l'espace : on « fait » de la GEOMETRIE sur des objets géométriques que parfois on ne sait pas dessiner ou pas représenter.

Les trois espaces (micro, méso, macro)...

- Le langage spécifique de la GEOMETRIE : c'est un langage sur la spatialité. *Tout à fait délicat...*

Au primaire, les relations spatiales étudiées portent sur l'ALIGNEMENT, le REPERAGE et le POSITIONNEMENT, l'ORIENTATION, la DIRECTION (dont la PERPENDICULARITE et le PARALLELISME) et la notion de TRANSFORMATION (essentiellement la « SYMETRIE-PLIAGE »). On a tout le programme !

Idem au collège, mais avec de nouveaux objectifs.

➤ Corollaire : apprendre de la GEOMETRIE consiste pour l'apprenant à structurer des connaissances sur les formes, et à structurer des connaissances sur les relations spatiales qu'ont les formes entre elles.

La question posée au PE et au PLC : par quoi est-il pédagogiquement raisonnable de commencer ?

Une piste (nouvelle ?) Un manuel de cycle : « Math, CYCLE 3 », chez Hatier.

➤ Rôle(s) et place(s) des supports d'expériences graphiques, d'expériences numérisées, puis d'expériences géométriques. Variables de situations et variables didactiques... *Vaste question !*

A partir de là, l'affaire se complique : c'est le problème du professeur ! *Komment c'est-y donc ki faut-y faire ?*

On n'y coupe pas : il faut regarder les programmes...

Eléments d'analyse et émergence de quelques points « délicats » à la lecture des programmes 2008 et des programmes du début du collège.

- Cercle. Dès la Maternelle, on s'intéresse au « rond » (*ainsi qu'au carré et au triangle*), mais aussi au cercle en 2015 ! Comme le tracé d'un cercle au compas est une tâche spécifique du cycle III, il paraît « logique » qu'on s'intéresse aussi au « rond » au cycle II. (...). *Que disent ou que préconisent les programmes ?*
- Triangle rectangle au cycle II. Si on ne « travaille », au cycle II, qu'avec des triangles rectangles, pourquoi le spécifier comme tel, sur un plan pédagogique ? (...) *Quid des autres ?*
- Triangle, suite. Hauteur dans un triangle au cycle III. Il y a essentiellement deux acceptions dans les manuels : hauteur comme objet géométrique, une perpendiculaire particulière et hauteur comme grandeur, distance la plus courte d'un point à une droite. *Liens entre ces deux acceptions et activités idoines à produire (...)*

On poursuit...

- Travail sur le quadrillage au cycle II : des manques d'explicitations ou ? Tâche usuelle : reproduire sur papier quadrillé au CP, oui mais, il faut être en CE1 pour « repérer » noeuds et cases d'un quadrillage.
- Angle droit et droites perpendiculaires. Point très délicat ! Hypothèse forte : distinguer le concept d'angle droit et celui de droites perpendiculaires. Hypothèse forte, suite. Une « utilisation-apprentissage » trop prématurée de l'utilisation de l'équerre, à partir du CE1 peut « bloquer » la compréhension de l'angle droit. *Idem pour les parallèles...*
- Extrait du programme. « (...) Connaître un vocabulaire géométrique élémentaire approprié (...) ». La question qui vient est « lequel ? », corollaire : pourquoi faire ?
- GEOMETRIE et autres domaines connexes. On n'en parle pas, zut, bis !

Il s'agit (*presque*) de (*re*)poser et de (*re*)penser le problème de l'enseignement de la GEOMETRIE.

Un principe (*très schématisé*) : fonder l'enseignement sur une démarche dite empirique, partant des objets matériels pour faire émerger des *invariants* qui seront *modélisés* par les objets mathématiques.

Ensuite, on « boucle » ; les objets mathématiques vont alors permettre de réappréhender les objets matériels par leurs invariants : il y a, par essence un rapport de nature dialectique entre ces objets de nature différente.

Oui, mais, facile à dire !!! Des exemples vont suivre, ouf !!!

D'une certaine manière, les programmes officiels y sont globalement sensibles. En effet, depuis les programmes 1985, puis ceux de 1995–1996, puis ceux 2002, de 2007 et enfin, ceux d'aujourd'hui (*en attendant 2016...*), il est mis en filigrane le fait que ces programmes argumentent et militent de manière plus ou moins équilibrée et approfondie pour un enseignement d'une GEOMETRIE qu'on pourrait qualifier de « GEOMETRIE active ». Alors « activons » !

Les enjeux de « l'enseignement – apprentissage »

- Les activités « d'enseignement – apprentissage » à l'école primaire ne visent pas des **connaissances** dites **formelles** (*par exemple* : l'apprentissage direct et immédiat de définitions ou de propriétés), *mais plutôt* des **connaissances** dites **fonctionnelles** (*dans le but de résoudre des problèmes*).
- D'où « une entrée » dans la GEOMETRIE enseignée par les **RELATIONS GEOMETRIQUES** plutôt que par les **NOTIONS**.

Ah, là, il va falloir expliquer ! On a déjà commencé. Ah bon ?

Les **OBJETS** : pas de recensement, on les connaît, *ou plutôt*, on entretient certains rapports avec ces objets. *Voir les programmes et les diapositives précédentes.*

Du côté des **RELATIONS** spatiales **GEOMETRIQUES** : c'est le nœud des programmes. *Elles ont déjà été référencées, mais on en remet une couche.*

Un petite friandise, à déguster immodérément !

MATERIEL autorisé :

- Un crayon (*bien taillé*)
- Une règle NON graduée.

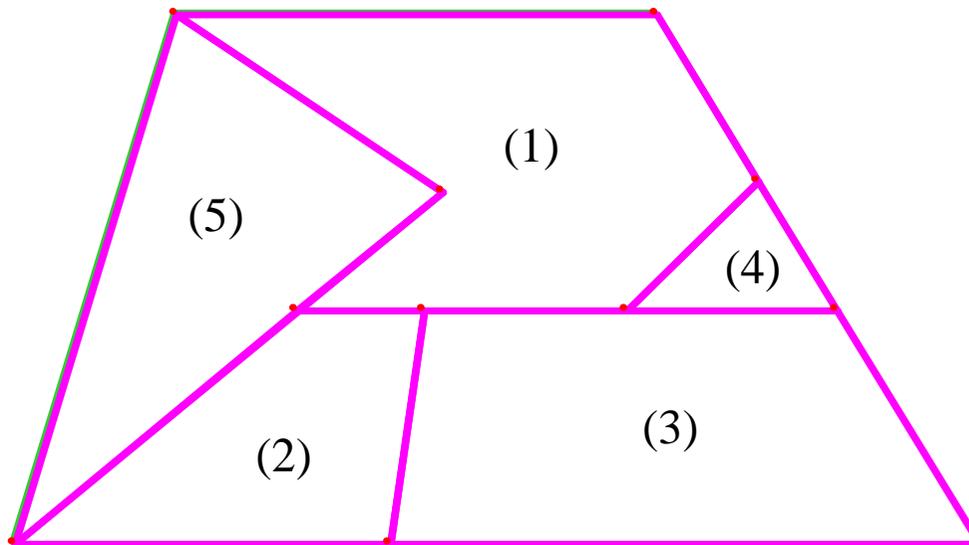
Rien d'autre ? NON !

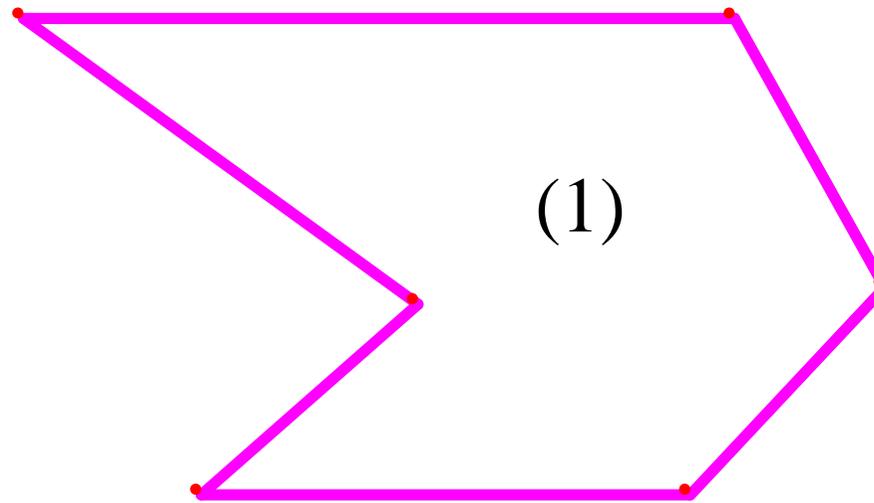
CONSIGNE :

A l'aide du matériel autorisé, reproduire ce « PUZZLE », sachant qu'on ne dispose que de la pièce n°(1) ci-contre. (*Laisser les traces de construction*).

Cf. diapositive suivante

Equipe de MJ Perrin, IUFM, Lille





Inflation de Friandise ...Un jardinier plante dix arbres dans son jardin. Il a réussi à les disposer en formant cinq lignes (*droites, of course !*) de quatre arbres à chaque ligne. Retrouver une disposition possible.

Les **RELATIONS**

- 1) Relations d'appartenance (*ou d'incidence*) et alignement.
- 2) Parallélisme, Perpendicularité.
- 3) Les égalités, en particulier, les égalités de longueurs.
- 4) La notion de repérage.
- 5) Les isométries, similitude d'objets (*superposabilité avec ou sans retournement, agrandissements ou réductions*).

Les **PROPRIETES**

Certains énoncés expriment des propriétés d'objets qui peuvent être des éléments d'une définition (...). *Le cube...*

D'autres énoncés expriment des théorèmes.

Commentaires : à l'école primaire, les propriétés sont d'abord des outils implicites de solutions à des problèmes (Exemple : « *est-il possible de construire un triangle avec deux angles droits ?* »). Ces propriétés constituent alors des **outils** pour valider une solution. Enfin, ces propriétés ne sont pas du tout des objets d'étude à l'école. (...)

Les différentes « ACTIVITES » géométriques déclinées à l'aide de verbes d'action idoines.

Les différents « types » de problèmes.

- **DECRIRE**
- **CLASSER**
- **REPRODUIRE**
- **CONSTRUIRE**
- **REPRESENTER**
- **(CALCULER)**

Les verbes ci-contre, associés à une ou à des expansions nominales, voire propositionnelles ou à des compléments vont ainsi définir ce qu'on va appeler des « types de tâches ».

Des exemples ? Oui, Au moins un, un peu plus loin : une FRIANDISE.

Atelier : définir chacun de ces verbes et les illustrer de d'exemples adaptés (*objectifs, consigne(s), « contraintes » sur le matériel, évaluations, ...*).

DISPOSITIFS pour mettre en œuvre les verbes d'action décrits ci-dessus : les « types d'énoncés », accompagnés de registres de langues adaptés.

On « part » d'un ...

On « produit » un ...

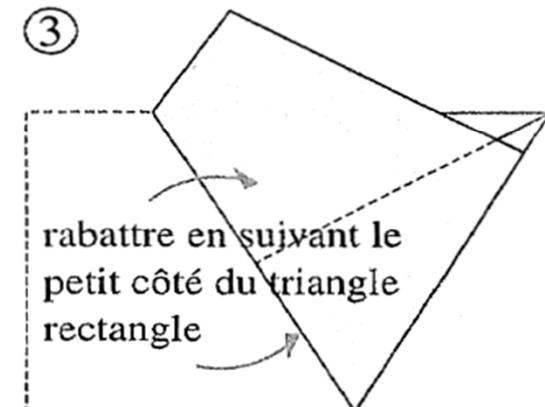
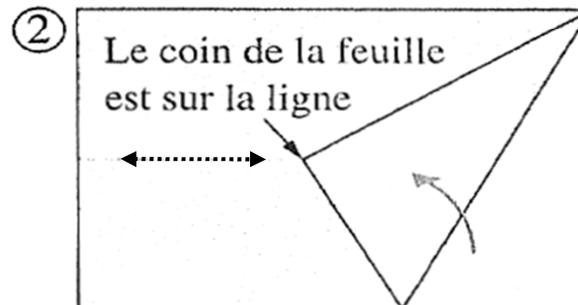
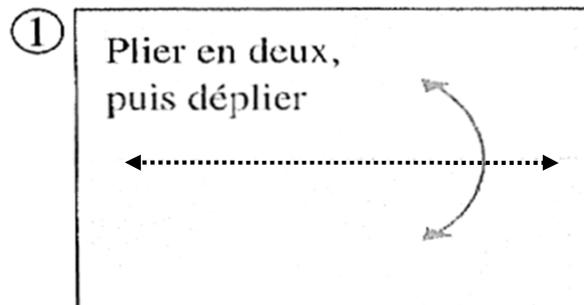
TEXTE	TEXTE
TEXTE	FIGURE
FIGURE	FIGURE
FIGURE	TEXTE

FRIANDISE : construction d'un gabarit de TRIANGLE EQUILATERAL ou mieux, d'un gabarit d'angle de 60° .

Matériel : une feuille A4 et c'est TOUT. *Ah bon !*

Manipuler

Prendre une feuille rectangulaire et réaliser les trois pliages comme sur les figures ①, ② et ③.



Mathématiques « embarquées » : c'est une autre paire de manches. Il y a des « histoires » de médiatrice, de cercles, d'angles, ... Mais on tient là des pistes de travail sur la notion d'angle, en fabriquant des gabarits, indépendamment de la mesure. *Ah, yes !*

Pour ceux que ça intéresse, contacter PW en fin de conférence.

Puisqu'on y est. On continue ! FRIANDISE, encore

Une première définition du PARALLELOGRAMME ou une rencontre avec les premières parallèles « obliques ».

Technique : il *SUFFIT* de plier de façon quelconque (mais « oblique ») la feuille de format A4, en partant d'un coin. On découpe (*Ah ! Rupture de contrat : pas de matériel, oui, mais, vite fait, un petit coup de canif ou mieux de ciseaux !*) et on met de « l'autre côté ». Pas mal ! *On scotch(e), on ne rhum pas !*

Mathématiques embarquées : essentiellement une transformation géométrique faisant apparaître des angles alternes internes égaux : une caractérisation du parallélisme en mathématiques.

On est pourtant loin des origamis, trop difficile, mais c'est pas mal quand même !

Quelques mots sur la PERPENDICULARITE

Sur un plan conceptuel : sur « quoi » s'appuie, *pas trop fort quand même !*, la notion de « perpendicularité » ?

- Dans l'espace 3D : les relations « *Vertical – Horizontal* ». *Référence obligée, mais « obstacle » potentiel ?*
- Un « coin » d'un rectangle générique, par opposition à d'autres « coins », « *non droits* ».
- Un « *quart de rond* » = un quart de l'angle plein. (*Production de deux gabarits*).
- Un « *pli sur le pli* » : une double symétrie axiale.
- Du côté des GRANDEURS : plus court chemin d'un point à une droite. *Aspect non abordé aujourd'hui.*

Les instruments spécifiques : règles, équerres et dérivées, gabarits, dont le triangle « en dur », compas, feuille « double pli », ... *Il y en a d'autres...*

Les supports (*dans le micro-espace*) : feuilles blanches, réseaux quadrillés et réseaux pointés, ...

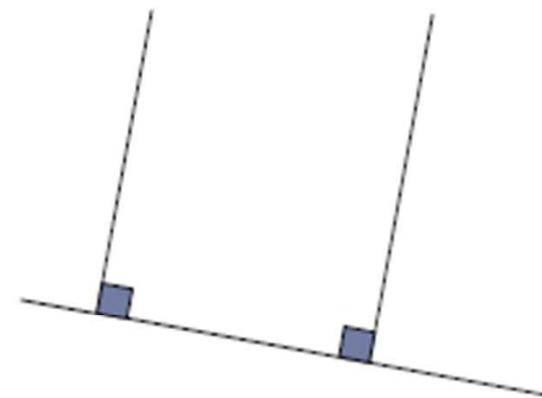
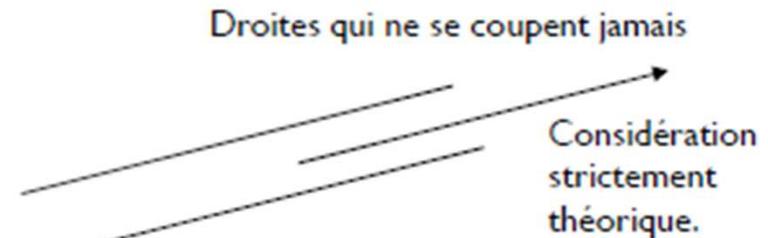
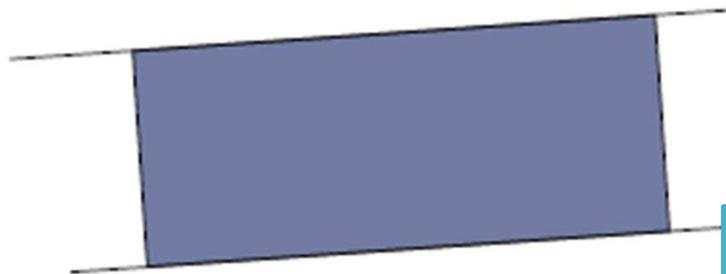
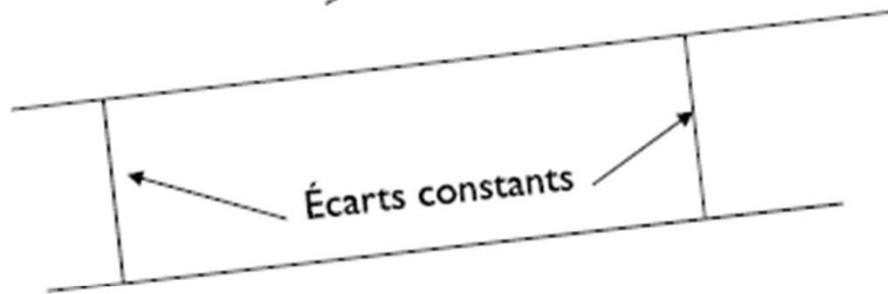
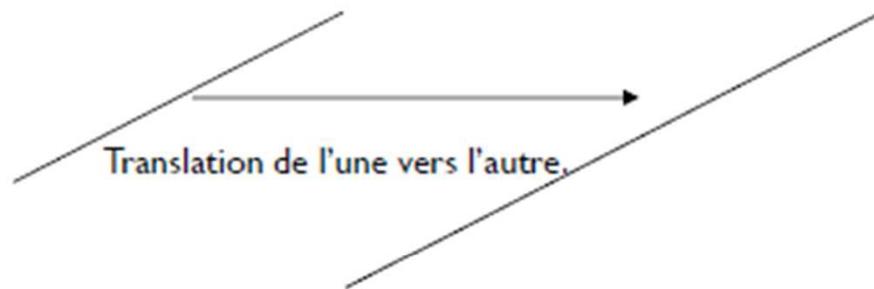
Les tâches élémentaires concernant la PERPENDICULARITE :

- T1. Une droite donnée ou choisie, dans un faisceau quelconque, sur un support choisi, est-elle perpendiculaire à une autre droite ? Discours explicatif ?
- T2. Deux droites, idem ci-dessus, sont-elles perpendiculaires ? Verbes d'actions : RECONNAITRE, VERIFIER, ... Contrôles et validations ?
- T3 et T3'. CONSTRUIRE une droite PERPENDICULAIRE, puis la droite PERPENDICULAIRE à une droite donnée, idem passant par un point donné. Variables de situation : instruments autorisés, supports de graphisme.
- PERPENDICULAIRE(S) et OBJETS MATHEMATIQUES, étude de quelques propriétés remarquables : la perpendicularité est un invariant dans bcp de configurations spatiales et dans bcp de contextes. *Territoire à investir !*

Ces tâches élémentaires s'exécutent sur des supports variés et avec des instruments de construction à mettre en « concurrence ».

Quelques mots sur le PARALLELISME

Les aspects (*distincts*) de cette RELATION, sur papier blanc : quelles ENTREES pour préparer quelles ACTIVITES ?



Source : conférence Fabien EMPRIN

Les tâches élémentaires concernant le PARALLELISME :

- T1. Une droite donnée ou choisie, dans un faisceau quelconque, sur un support choisi, est-elle parallèle à une autre droite ?
- T2. Deux droites, idem ci-dessus, sont-elles parallèles ? Verbes d'actions : RECONNAITRE, VERIFIER, ... Contrôles et validations ? Un nouvel instrument : le « guide-âne »...
- T3 et T3'. CONSTRUIRE une, puis la droite PARALLELE à une droite donnée, idem passant par un point donné. Variables de situation : instruments autorisés, supports de graphisme.
- PARALLELISME et OBJETS MATHEMATIQUES, étude de quelques propriétés remarquables : le parallélisme est un invariant dans bcp de configurations spatiales et dans bcp de contextes. *Territoire à investir !*

Un petit tour du côté des QUADRILATERES un mode de génération en tant que surfaces fermées

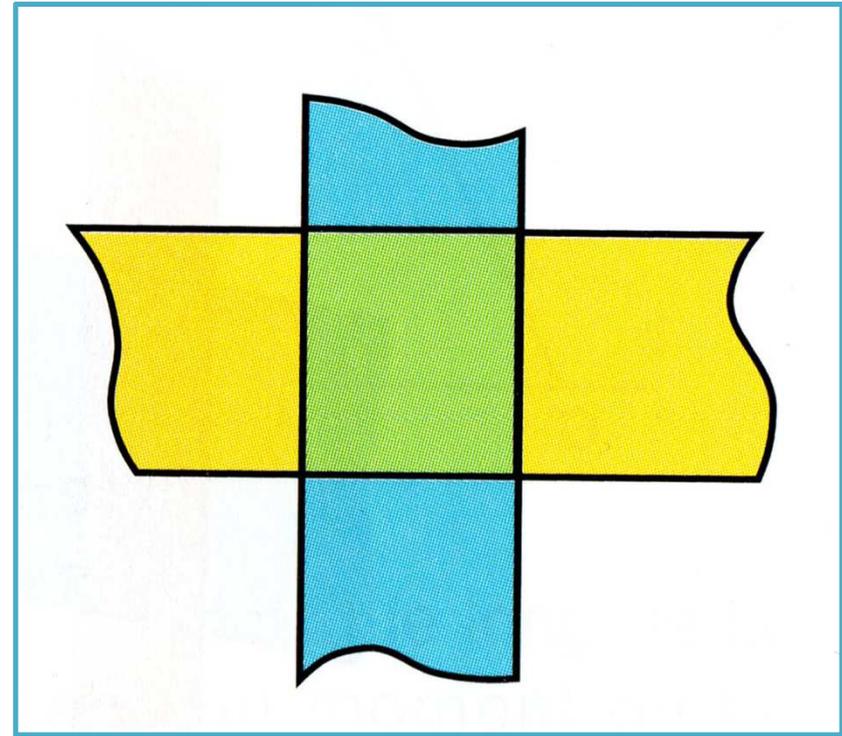
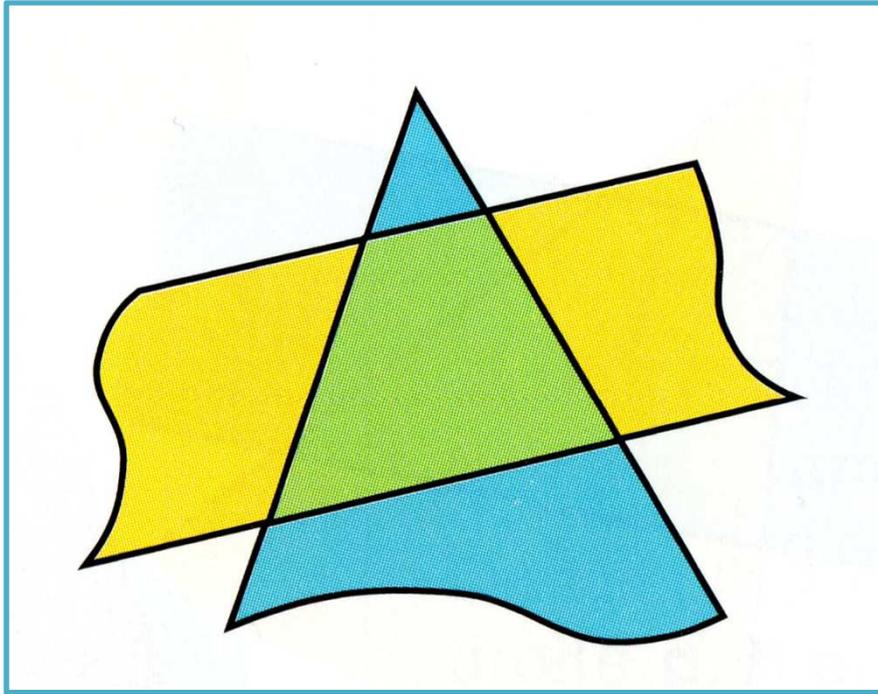
La question est : comment générer ou engendrer UN quadrilatère (*en tant que nouvelle figure géométrique*) à partir de surfaces planes « simples » ? (A définir !).

L'approche qui est ici privilégiée est celle consistant à définir le quadrilatère comme croisement ou intersection de deux surfaces planes « simples » et illimitées.

L'objectif consiste donc à créer de tels nouveaux objets. Ensuite, par « manipulations » (*déplacements, glissements, rotations, ...*), on cherche des invariants.

MATERIEL : des « bandes » découpées, à bords parallèles ou pas ; des « angles » découpés, ...

Cf. diapositive suivante pour une illustration.



Une autre activité emblématique :
le jeu des « **KwadriEtikettes** ». *D'après F. BOULE et CRPE...*

Cf. Diapositive suivante.

Voici un JEU, il est constitué de dix « zétikettes ».
(où chaque zétikette est « porteuse » d'une propriété
mathématique).

(1) Deux angles droits (<i>seulement</i>)	(6) Côtés opposés parallèles
(2) Quatre angles droits	(7) Deux côtés parallèles (<i>seulement</i>)
(3) Côtés égaux « deux à deux »	(8) Diagonales égales
(4) Deux côtés égaux (<i>seulement</i>)	(9) Diagonales perpendiculaires
(5) Quatre côtés égaux	(10) Diagonales se coupant en leur milieu

La QUESTION : « koi kon peut n'en faire de ces **zétikettes** ? »

Quelques pistes... Travail **PE**, et oui !

(Variables : instruments autorisés, programmes de construction à rédiger, ...).

Un PROJET : ***un cahier de GEOMETRIE au Cycle III.***

Bon d'accord, mais qu'est-ce qu'on y « met » dedans ?

CONTENU

- Une liste des instruments et de leurs principales fonctions illustrées ;
- Les premières définitions contextualisées ou non. Un lexique et du vocabulaire ; *un principe* : varier les traces écrites ;
- Des constructions type, avec ou sans programme de constructions, type « BD » (*images fixes ou « film » de la construction, façon planche de BD*) ;
- Des problèmes de recherche, avec pistes de solutions. Et d'autres « problèmes », avec les solutions (...)

Quelles traces écrites dans le cahier ?
Elles recouvrent principalement quatre rubriques

Activités de découvertes, « liens » avec autres disciplines, autres aspects, ...	« Exercices-types » et exercices de « recherche »	Les CONNAISSANCES et les SAVOIRS	Les TECHNIQUES « privées » ou standards
A renseigner	A renseigner	A renseigner	A renseigner

A noter, des collections de manuels proposent un cahier de géométrie à partir du CE2.

On peut utilement et librement s'en inspirer pour des travaux diversifiés.

ANNEXES

Un manuel de cycle.

Recueil des
savoirs mathématiques ;
Organisation en
thèmes des notions au
programme ;
Banque
d'exercices conséquente ;
...

Cf. diapositive suivante :
un exercice intéressant ?

CYCLE 3

MATH

• Mise à niveau
• Entraînement
• Différenciation
750 exercices

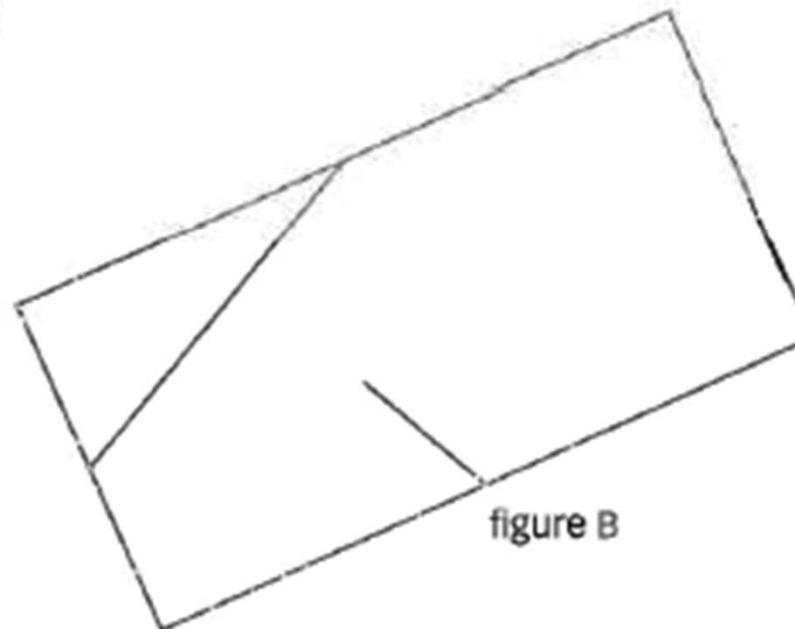
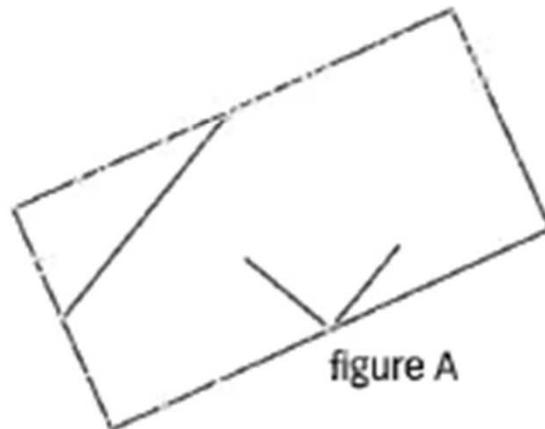
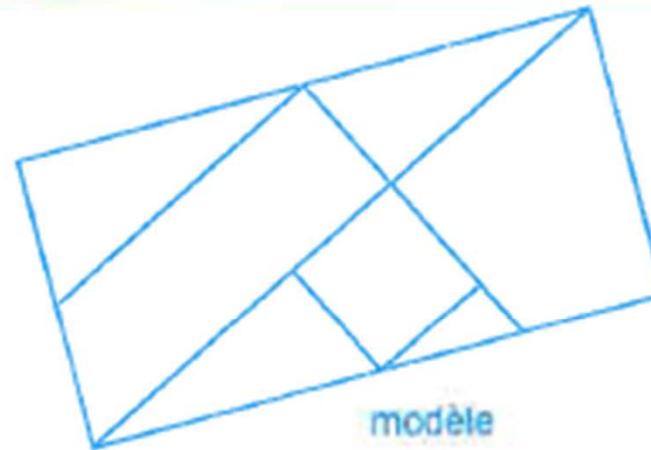
www.editions-hatier.fr

Hatier

Super Exercice

- 28** Repère sur la figure modèle les alignements et les angles droits. Décalque les figures A et B. Complète-les pour qu'elles soient semblables à la figure modèle. Utilise ta règle et ton équerre.

On dit qu'une figure est semblable à la figure modèle si c'est la même, mais en plus grand ou en plus petit.



Des points et des droites, suite, mais surtout beaucoup de poésie. (Manuel de CM édité par Retz)

Programmes 2002 : ce n'est plus d'actualité. Ouf !

Je découvre

En géométrie, la droite passant par les points A et B se note (AB). Elle comprend le point A, le point B et tous les points alignés avec A et B.



- *Peux-tu imaginer un point de (AB) situé sur l'autre page du livre ?
Montre-le approximativement.*
- *Peux-tu imaginer un point de (AB) situé plus loin dans ta salle de classe ?
... plus loin, au-delà de ton école ? ... au-delà de la Terre ?*

J'ai appris

- (AB) comprend :
- 1° le point A et le point B,
 - 2° tous les points à l'intérieur de [AB],
 - 3° tous les points alignés avec A et B et situés à l'extérieur de [AB].



La longueur d'une droite est infinie.

En géométrie, pour nous aider à imaginer la droite passant par A et B, on trace toujours un trait plus long que celui qui relie les points A et B. Mais ce trait est forcément beaucoup moins long que (AB) !

Je termine sur cette belle proposition philosophico-poétique, merci et à bientôt.

patrick.wieruszewski@univ-orleans.fr