La *GEOMETRIE* à l'articulation Ecole-Collège : continuités et ruptures dans son enseignement

Patrick WIERUSZEWSKI

Université ORLEANS, ESPE Centre Val de Loire

GCD de Mathématiques, IRES-IREM

JOURNEE académique des MATHEMATIQUES
Bourges, 21 mai 2014. Exposé *E06*

PLATON (≈ – 428/–347)
« *Que nul n'entre ici s'il n'est pas géomètre !* »
Que de *dédales* parcourus.

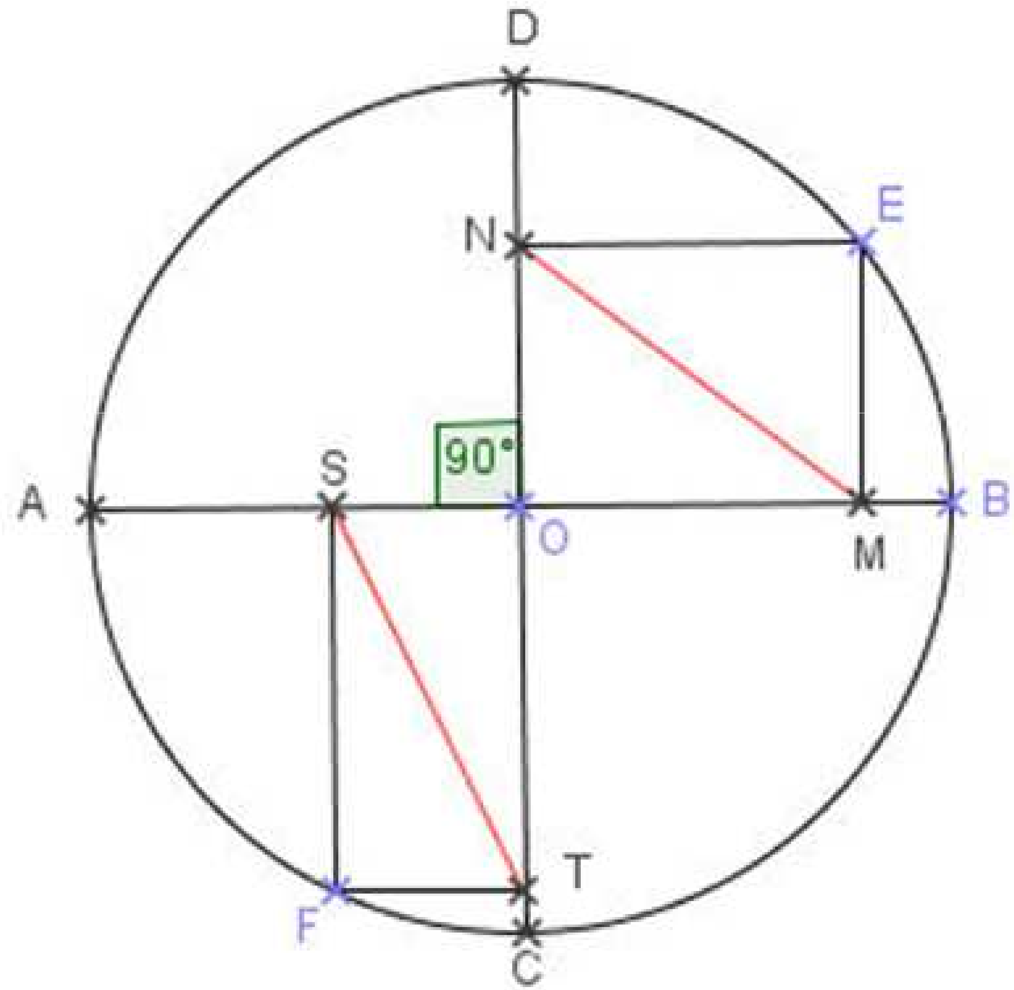
Cadre et « territoire » de l'exposé : limites et perspectives ; contenus, programmes, pratiques d'enseignement,…

Sans oublier les habituelles « *friandises* »…

Limites et perspectives : on se situe essentiellement dans le cadre de la géométrie plane enseignée au cycle III et au début du collège ; le domaine voisin et connexe des grandeurs ne sera pas abordé ; enfin, pour le format de cet exposé, les points de repères théoriques et didactiques seront contextualisés, voire « simplifiés ».

<u>Pour commencer</u> : une première friandise, un grand classique.
Pourquoi enseigner la GEOMETRIE ?

Les segments **[AB]** et **[CD]** sont deux diamètres ⊥ du cercle de centre **O**. Le point **F** est un point du cercle et **FSOT** est un rectangle. Le point **E** est un point du cercle et **EMON** est aussi un rectangle. Quelle est entre **MN** et **ST** la plus grande longueur ? *Why* ?



<u>La PROBLEMATIQUE du jour</u> : repérer, énoncer, « discuter » et comprendre quelques « difficultés » non anodines, mais « banales » dans « l'enseignement-apprentissage » de la GEOMETRIE du cycle III jusqu'au collège.

En toute première lecture, on peut s'autoriser à interpréter le « slogan » de Platon comme le fait que la GEOMETRIE appartiendrait à une sorte de « *cercle des géomètres disparus*… », une secte ! : la GEOMETRIE demeurerait alors la propriété des quelques uns, il faudrait montrer (*plus que !*) patte blanche pour pénétrer ce cercle…

Et pourtant, la GEOMETRIE est un « domaine » qui apporte beaucoup, en termes de connaissances et de savoirs !

- La GEOMETRIE propose des <u>outils cognitifs de base</u> : langages structurés, modes de pensée(*s*), esprit(*s*) de rigueur, …
- La GEOMETRIE développe et optimise les rapports entre le *PERCU* et le *CONCU* ou le *SU*. *« <u>Bien voir autorise à mieux comprendre et comprendre permet de bien voir</u> ».* Mais, il y a « conflit » : *Cf. travaux de F COLMEZ et B PARZYSZ.*

➢ Enfin, la GEOMETRIE constitue, en particulier, un point de rencontre entre modèle(s) théorique(s) et savoir-faire techniques. (…)

OUI, mais il y a des OBSTACLES de deux natures : les « *FAUX* » et les « *VRAIS* » (*JF GRELIER*).

Du côté de quelques « FAUX » obstacles.

<u>Ce qui relève de la tradition grecque</u>. Le savoir géométrique est ontogénique : il est constitutif de l'homme, et donc, en particulier, il n'est pas à construire. <u>*Conséquence*</u> : la pratique d'une pédagogie dite par OSTENSION : quelques « bonnes » définitions, des propriétés bien énoncées et rédigées, une « bonne » organisation du savoir, en général, du « simple » au « compliqué » suffiraient ! *Et hop, le tour est joué : une belle leçon de « choses » en Mathématiques.*

(Cf. diapositives suivantes sur définition d'une droite…)

- *Corollaire 1* : il y a « danger » que les expériences sur les objets géométriques (ou leurs représentations) basculent et glissent vers des discours sur ces mêmes objets. De fait, « faire de la GEOMETRIE », c'est savoir DEMONTRER… *Exemples…*
- *Corollaire 2* : la tradition cartésienne, caractérisée par la prégnance de la méthode déductive : on va du « *simple* » au « *compliqué* » et on avance step by step. *Exemple* : Du point à la droite, en passant par la liste des « incontournables » ! Sans oublier ce qui caractérise toute leçon de choses : les écritures symboliques ! *Exemples…*
- *Corollaire 3* : l'histoire récente des « Mathématiques Modernes ». L'algèbre linéaire investit le territoire de la GEOMETRIE. *Bon, voilà !*
- *Corollaire 4* : le rapport aux instruments de construction géométrique. Les figures géométriques se construisent à la règle (*non graduée*) et au compas. Quid des instruments moins « nobles » ? Deux exemples de travaux mathématiques à partir de gabarits non standards : *Cf. diapositives suivantes…*

1) Manuel de niveau CM (1 et 2), chez Magnard. *Prog. 2008.*

Que penser des énoncés ci-dessous, et surtout que peut-on en faire, c'est-à-dire, quels types de problèmes sont résolvables avec ces énoncés ?

Question sensible et cruciale !

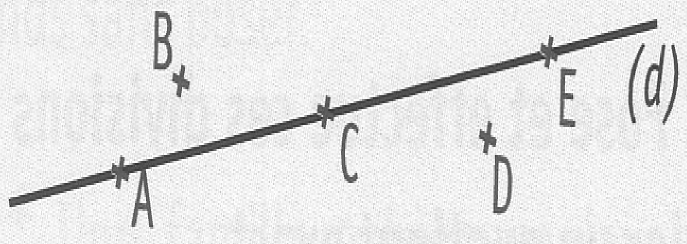
- La géométrie exige **rigueur et précision dans le vocabulaire utilisé.**

Bon, it's OK !

- Une **droite** est formée par un nombre infini de points alignés : on ne peut donc pas mesurer une droite.

On représente un point par une croix.

On le nomme au moyen d'une lettre majuscule d'imprimerie.



Les points A, C et E sont alignés.

Ils appartiennent à la droite (d).

2) Manuel de CM édité par Retz. Même consigne que la diapositive précédente. *Prog. 2002*

Je découvre

En géométrie, la droite passant par les points A et B se note (AB).
Elle comprend le point A, le point B et tous les points alignés avec A et B.

- *Peux-tu imaginer un point de (AB) situé sur l'autre page du livre ? Montre-le approximativement.*
- *Peux-tu imaginer un point de (AB) situé plus loin dans ta salle de classe ? ... plus loin, au-delà de ton école ? ... au-delà de la Terre ?*

J'ai appris

(AB) comprend : 1°) le point A et le point B,

2°) tous les points à l'intérieur de [AB],

3°) tous les points alignés avec A et B et situés à l'extérieur de [AB].

La longueur d'une droite est infinie.

En géométrie, pour nous aider à imaginer la droite passant par A et B, on trace toujours un trait plus long que celui qui relie les points A et B. Mais ce trait est forcément beaucoup moins long que (AB) !

Question : comment se dépatouiller avec ces représentations, ces conceptions et ces « définitions » au collège ? C'est une question centrale pour le professeur !

Au fait, est-on au clair sur une définition « précise » d'une droite, dans l'espace euclidien ?

Un fac-similé : la définition de T. Simpson dans « *Eléments de Géométrie* », 1747.

« *Une droite est celle qui étant mené d'un point **A** à un autre point **B** ne se détourne ni à droite, ni à gauche, et qui est la plus courte que l'on puisse mener entre ces deux points, **A** et **B*** ».

Note de PW : on doit à Simson (est-ce le même Simpson ?) le théorème dit de la droite de Simson dans un triangle.

On se donne un triangle (**PLJ**) et son cercle circonscrit (C). Soit **M** un point de (C). On appelle **M1**, **M2** et **M3**, les pieds respectifs des perpendiculaires aux côtés du triangle passant par **M**. Les points **M1**, **M2** et **M3** sont alignés sur une droite appelée droite de Simson du triangle (**PLJ**).

Démonstration : c'est pas un cadeau !!!

Quelques vrais « obstacles » (= difficultés à enseigner).

- Préoccupation centrale de tout professeur de ne pas « opposer » démarche déductive et démarche inductive.
- *La représentation de l'espace* : on « fait » de la GEOMETRIE sur des objets géométriques que parfois on ne sait pas dessiner ou pas représenter. Les trois espaces (micro, méso, macro)…
- *Le langage spécifique de la GEOMETRIE* : c'est un langage sur la spatialité. Au primaire, les relations spatiales étudiées portent sur le REPERAGE et le POSITIONNEMENT, l'ORIENTATION, la DIRECTION (dont la PERPENDICULARITE et le PARALLELISME) et la notion de TRANSFORMATION (essentiellement la « SYMETRIE-PLIAGE »).
- *Corollaire* : apprendre de la GEOMETRIE consiste ainsi à structurer des connaissances sur les formes, et à structurer des connaissances sur les relations spatiales qu'ont les formes entre elles.

Par quoi il est pédagogiquement raisonnable de commencer ?

- Rôle(s) et place(s) des supports d'expériences graphiques, puis géométriques. Variables de situations et variables didactiques…

A partir de là, l'affaire se complique : c'est le problème du professeur ! *Comment c'est-y donc ki faut-y faire* ?

Les enjeux de « l'enseignement – apprentissage »

- Les activités « d'enseignement – apprentissage » à l'école primaire et au début du collège ne visent pas directement des **connaissances** dites ***formelles*** (*<u>par exemple</u>* : l'apprentissage direct et immédiat de définitions ou de propriétés), *mais plutôt* des **connaissances** dites ***fonctionnelles*** (*dans le but de résoudre des problèmes*).

- D'où « une entrée » dans la GEOMETRIE enseignée par les ***RELATIONS*** *GEOMETRIQUES* plutôt que par les ***NOTIONS***.

Les **OBJETS** : pas de recensement, on les connaît, *ou plutôt*, on entretient certains rapports avec ces objets. *Voir les programmes* et les brochures professionnelles.

Du côté des ***RELATIONS*** *GEOMETRIQUES* : c'est le nœud des *programmes*.

Les **RELATIONS**

1) Relations d'appartenance (*ou d'incidence*) et alignement.
2) Parallélisme, Perpendicularité.
3) Les égalités, en particulier, les égalités de longueurs.
4) La notion de repérage.
5) Les isométries, similitude d'objets (*superposabilité avec ou sans retournement, agrandissements ou réductions*).

Les **PROPRIETES**

Certains énoncés expriment des propriétés d'objets qui peuvent être des éléments d'une définition (…).

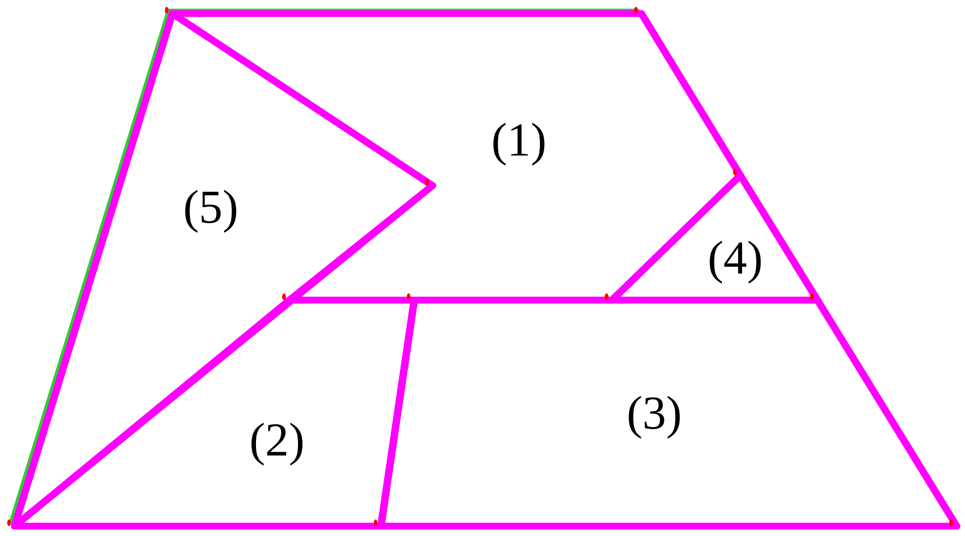
D'autres énoncés expriment des théorèmes.

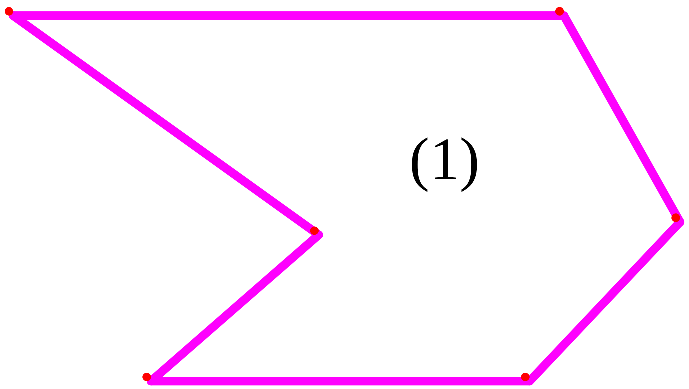
<u>Commentaires</u> : à l'école primaire, les propriétés sont d'abord des outils implicites de solutions à des problèmes (*<u>Exemple</u>* : « *est-il possible de construire un triangle avec deux angles droits ?* »). Ces propriétés constituent alors des ***<u>outils</u>*** pour valider une solution. <u>Enfin, ces propriétés ne sont pas du tout des objets d'étude à l'école, alors qu'au collège les "études" évoluent</u> (…)

Une deuxième « friandise »…

<u>MATERIEL autorisé</u> :

- Un crayon (*bien taillé*)
- Une règle NON graduée.





<u>CONSIGNE :</u>
A l'aide du matériel autorisé, reproduire ce PUZZLE, sachant qu'on ne dispose que de la pièce n°(**1**) ci-contre. (*Laisser les traces de construction*). MJ Perrin, IUFM, Lille.

« Résumé » des programmes :

- Les relations et propriétés géométriques : **alignement**, **perpendicularité**, **parallélisme**, **égalité de longueurs**, **symétrie axiale**, **milieu d'un segment**.
- Les instruments et les « techniques » appropriées : **règle** (*non graduée et graduée*), **équerre**, **compas**, **gabarits (**d'hiver et divers**)**, **calque**, **papiers maillé et pointé**, **pliage(s)**.
- Les figures planes : **C**, **R**, **L**, **Pg**, **T** (*dont les cas particuliers*), le **cercle**. « Verbes d'action » : **DECRIRE**, **REPRODUIRE**, **CONSTRUIRE**, **CALCULER**. Vocabulaire vu comme une conquête de l'enseignement. (Les solides usuels. « Verbes d'action » : idem ci-dessus, **RECONNAITRE**, **REPRESENTER**. Vocabulaire spécifique : **sommet**, **arête**, **face**).
- Les problèmes. Les problèmes de reproduction ou de construction de configurations géométriques diverses mobilisent la connaissance des figures usuelles. Ils sont l'occasion d'utiliser, à bon escient le vocabulaire spécifique et les démarches de mesurage et de tracé.
- C'est parti pour quelques problèmes et activités…

Le jeu des QUADRIETIKETTES (*F. Boule et CRPE*)

Voici un JEU, il est constitué des dix « étikettes » suivantes.
(Chaque étiquette est « porteuse » d'une propriété mathématique)

(1) Deux angles droits (*seulement*)	**(6) Côtés opposés parallèles**
(2) Quatre angles droits	**(7) Deux côtés parallèles (*seulement*)**
(3) Côtés égaux deux à deux	**(8) Diagonales égales**
(4) Deux côtés égaux (*seulement*)	**(9) Diagonales perpendiculaires**
(5) Quatre côtés égaux	**(10) Diagonales se coupant en leur milieu**

La QUESTION : « koi kon peut n'en faire de ces étikettes ? »
Quelques pistes…
(*Variables : instruments autorisés, programmes de construction à rédiger, …*).

- CHOISIR une étikette. Tâche : CONSTRUIRE ou DESSINER un quadrilatère possédant la propriété étikettée. (*Bof !*).

  Exemple : étikette (***1***). Allons-y, dessinons quand même !

- (*Mieux*). CHOISIR deux étikettes. Tâche : idem ci-dessus, mais le quadrilatère doit posséder les deux propriétés étikettées.

  Exemple : étikettes (***1***) et (***9***). Allons-y, construisons !

- (*On continue*). CHOISIR une étikette. Tâche : RECENSER les étikettes incompatibles avec l'étikette choisie.

  Exemple : étikette (***7***). Allons-y, recensons !

- (*Suite et fin provisoire : difficile*). Tâche : RETROUVER le « bon » quadrilatère particulier qui est défini par un JEU minimal de ***n*** étikettes. (*Avec **n** = 1 ou 2 ou 3 ou plus*).

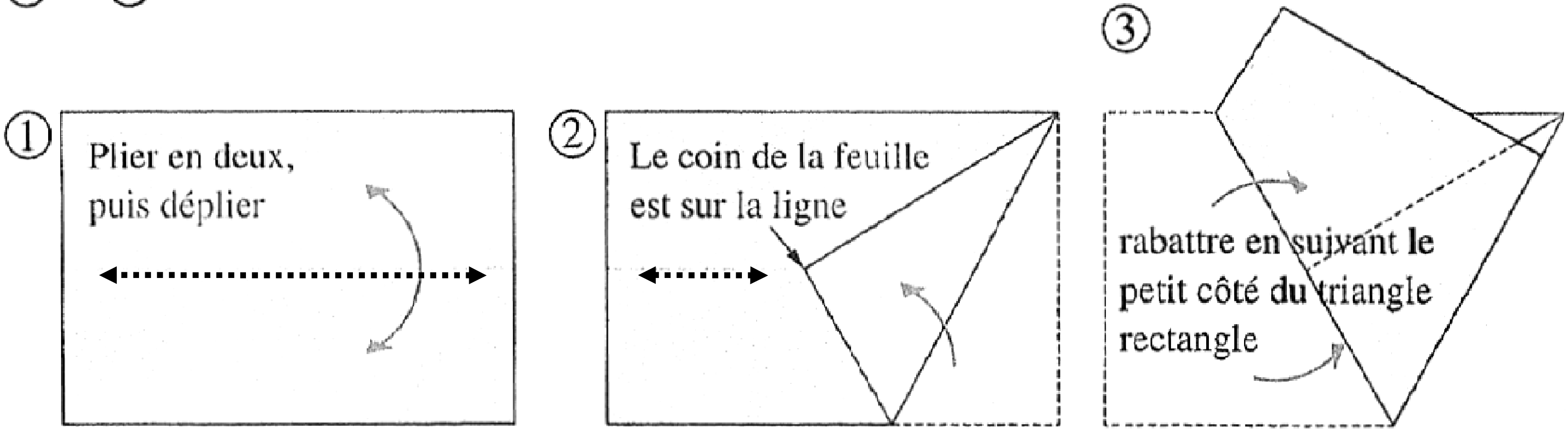
Pas mal pour des « étikettes » mal étiquetées !

Plus fort maintenant.

Construction d'un TRIANGLE EQUILATERAL par pliage (*activité mathématique sérieuse !*) ou d'un gabarit d'angle de 60°.

Manipuler

Prendre une feuille rectangulaire et réaliser les trois pliages comme sur les figures ①, ② et ③.



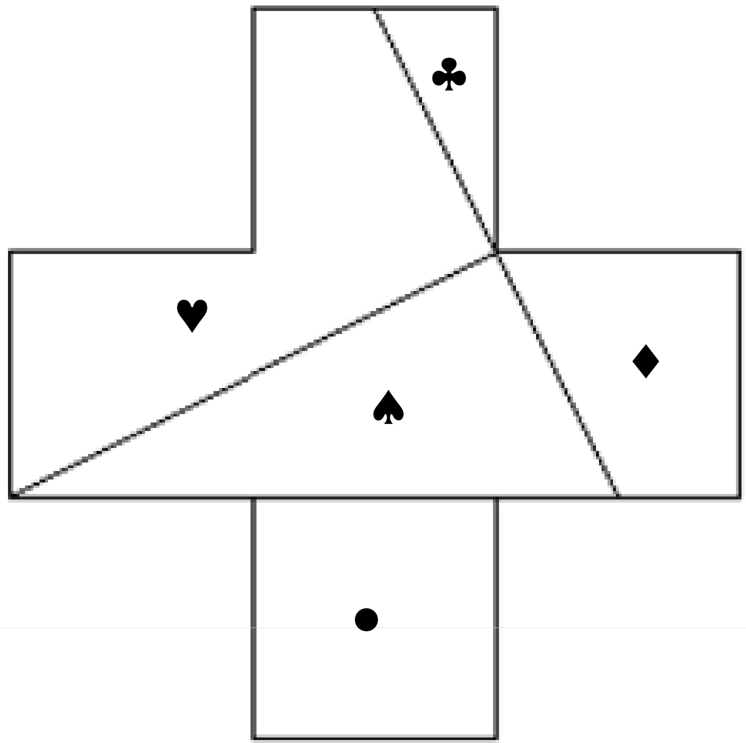
<u>Mathématiques « embarquées »</u> : c'est une autre paire de manches. Il y a des « histoires » de médiatrice, de cercles, d'angles, …

*Pour ceux que ça intéresse, contacter **PW** en fin d'animation.*

Un problème de *Sam Lloyd*, à partir d'une « croix grecque » (*pentamino particulier*).

En utilisant et en agençant chaque fois les cinq morceaux du puzzle de la croix grecque ci-contre, réaliser les figures suivantes :

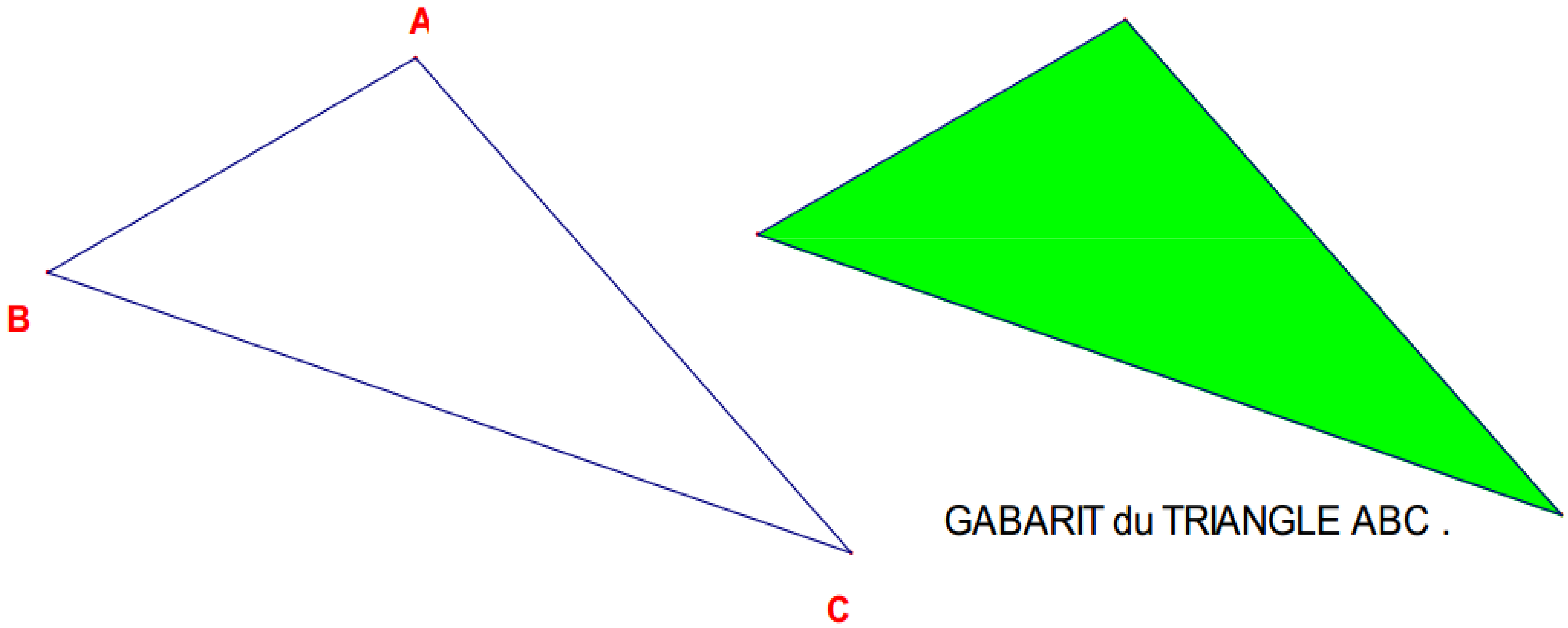
- Un triangle rectangle,
- Un carré,
- Un rectangle (*non carré*),
- Un parallélogramme,
- Un trapèze isocèle,
- Un quadrilatère (*convexe*) quelconque.



Proposer une exploitation pédagogique des différents assemblages obtenus.

« La Moisson des Formes », B. Bettinelli, Aleas Editeurs et IREM Besançon.

(d) <u>A partir du triangle et de son gabarit : droites remarquables dans le triangle.</u>



__CONSIGNE :__

En utilisant la règle (*non graduée*) et le gabarit cartonné du triangle **(ABC)**, construire :

(1) La **hauteur (AH)** issue de **A** relative au côté **[BC]**.

(2) La **médiane (AM)** issue de **A** relative au côté **[BC]**.

(3) La **médiatrice** du côté **[BC]**.

(4) La **bissectrice** de l'angle de sommet **A**, càd de l'angle $\widehat{\mathbf{BAC}}$.

Ne pas oublier de *JUSTIFIER* chacune des quatre constructions !

Merci et à l'année prochaine !
Du côté des grandeurs, ça pourrait le faire !
Adresse : patrick.wieruszewski@univ-orleans.fr