GEOMETRIE PLANE : il y en a pour TOUS et pour tous les goûts…

EXERCICE 1

Voici six affirmations. Répondre par ***VRAI*** ou ***FAUX*** en justifiant la réponse.

1) On sait d'un quadrilatère qu'il a trois côtés de même longueur. On peut alors affirmer que, pour que ce quadrilatère soit un losange, il suffit qu'en plus ses diagonales se coupent en leur milieu. (*Délicat : on peut laisser cet item de côté en première lecture !*).
2) Deux cercles ont le même centre, mais des rayons différents. **[AB]** est un diamètre de l'un et **[CD]** est un diamètre de l'autre. Ces deux diamètres sont perpendiculaires. On peut alors affirmer que le quadrilatère **ACBD** est un losange.
3) Si **ABCD** est un trapèze et **M** est le milieu de la diagonale **[BD]**, alors les triangles **ABM** et **DMA** ont même aire.
4) Les points **A**, **B** et **C** sont trois points distincts du plan. Si on a l'égalité : $\mathbf{AB}^2 = \mathbf{CA}^2 + \mathbf{BC}^2$, alors le triangle **ABC** est rectangle en **A**.
5) La somme des angles d'un pentagone convexe vaut 360°.
6) Soit un parallélogramme **ABCD** et **M** un point quelconque « intérieur » au parallélogramme. On peut alors affirmer que la somme des aires des triangles **AMB** et **DMC** est égale à la somme des aires des triangles **AMD** et **BMC**.

EXERCICE 2

1. Construire un triangle **ABC** tel que : **AB** = 4,8cm, **AC** = 6,4cm et **BC** = 8cm.
2. Démontrer que le triangle **ABC** est un triangle rectangle en ?

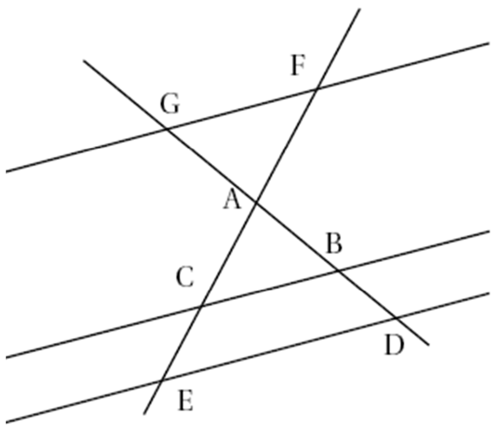
EXERCICE 3

Soit **ABC** un triangle rectangle en **A** tel que **AB** = 8cm et **BC** = 20cm. Calculer la longueur **AC** (*Valeur exacte ou quoi comme valeur ???*).

EXERCICE 4

L'unité de mesure des longueurs est le cm.
Sur la figure ci-contre, *qui n'est pas en vraie grandeur*, les droites **(BC)** et **(GF)** sont //.
On sait que : **AB** = 3 ; **CE** = 2,4 ; **AC** = 4 ; **BD** = 1,8 ; **BC** = 4,5 et **AF** = 3,6.

1. Calculer la longueur **GF**.
2. Les droites **(BC)** et **(ED)** sont-elles // ? Justifier.



EXERCICE 5

Étant donné un segment **[AB]**, construire à la règle non graduée et au compas le point **C** appartenant à la demi-droite **[AB)** tel que **AC** = $\frac{12}{7} \times$ **AB**. Justifier la construction.

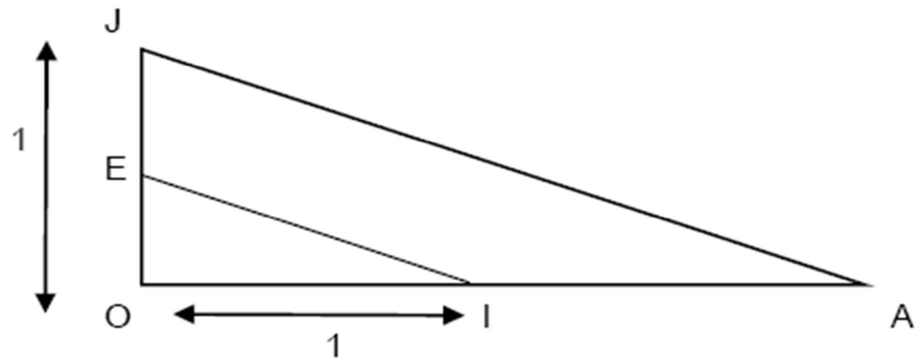
EXERCICE 6 (*exercice délicat, on peut s'en occuper plus tard !*)

Cet exercice est composé de trois parties. Les deux premières sont indépendantes.

L'unité de mesure des longueurs utilisée est le centimètre.

Partie I : Construction de l'inverse d'une longueur

On considère la figure suivante, non réalisée en vraie grandeur :



(EI) // (JA)

1) Calculer **OE** lorsque **OA** = 8.

2) En supposant que **OA** = $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \neq 0$), démontrer que **OE** = $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$.

3) En déduire un programme de construction de l'inverse d'une longueur en n'utilisant que la règle graduée et le compas (et sans calcul).

Partie II : Construction de la racine carrée d'une longueur

On veut construire un segment de longueur $\sqrt{13}$ cm. Soit **[AK]** un segment de 14 cm et **O** le point de **[AK]** tel que **OA** = 13 cm. La perpendiculaire à **(AK)** passant par **O** coupe un des deux demi-cercles de diamètre **[AK]** en **F**.

1) Faire une figure en vraie grandeur.
2) Démontrer que : $\mathbf{OF}^2 = \mathbf{FK}^2 - 1$ et $\mathbf{OF}^2 = \mathbf{FA}^2 - 169$.
3) En déduire l'égalité : $2 \times \mathbf{OF}^2 = \mathbf{FK}^2 + \mathbf{FA}^2 - 170$.
4) Démontrer que le triangle **AFK** est un triangle rectangle en **F**.
5) En déduire que : $\mathbf{OF}^2 = 13$ et donc que **OF** = $\sqrt{13}$cm.

Partie III. Construire, à l'aide des **parties I** et **II**, un segment de longueur $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$cm uniquement à la règle graduée et au compas (et sans calcul) ; vous laisserez les traces de construction et vous justifierez la construction en vous aidant des **parties I** et **II**.

EXERCICE 7

Soient **A** et **E** deux points donnés. On se propose d'étudier la famille $\boldsymbol{f}$ des parallélogrammes admettant **A** comme sommet et **E** comme centre.

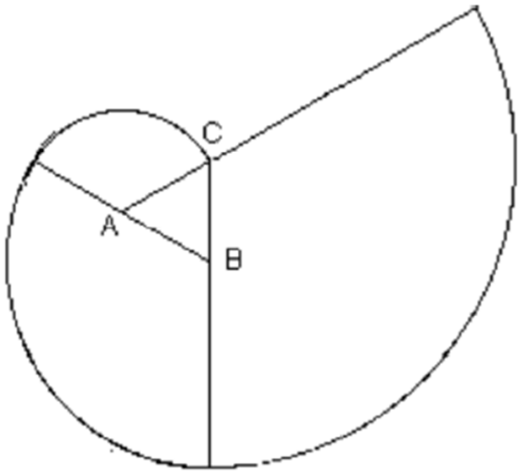
1) Construire un parallélogramme **ABCD** quelconque de cette famille. Rédiger un programme de construction. *Important pour le CRPE.*

2) Construire un rectangle **AB'CD'** de la famille $\boldsymbol{f}$. Montrer que les sommets des rectangles de la famille sont situés sur le cercle de centre **E** et de rayon **EA**.

3) On considère les losanges de la famille $\boldsymbol{f}$ de diagonale **[AC]**. Où sont situés les deux autres sommets de ces losanges ?

4) La famille $\boldsymbol{f}$ contient-elle un ou plusieurs carrés ? Justifier votre réponse.

EXERCICE 8



1) La figure ci-dessus est une spirale formée par trois arcs de cercle centrés sur les sommets du triangle équilatéral **ABC** de côté ***a***. Définir avec précision les arcs de cercle qui permettent de la tracer. Quelle fraction de chaque cercle utilise-t-on ?
2) On veut maintenant construire une spirale autour d'un carré de côté ***a*** en utilisant le même procédé. Écrire un programme de construction permettant d'obtenir cette nouvelle spirale à partir du carré (*Une instruction par ligne et douze instructions au plus*). Exécuter un tracé (*Choisir la mesure du côté du carré*).
3) Calculer les valeurs exactes des longueurs des deux spirales.
4) Quelle mesure doit-on donner au côté du carré pour que sa spirale ait la même longueur que celle construite sur un triangle équilatéral de 10 cm de côté ?
5) Conjecturer à partir des résultats de la question 3) pour déterminer les longueurs des spirales construites sur les cinq côtés d'un pentagone régulier, puis sur les *n* côtés d'un polygone régulier.

EXERCICE 9

Construire un carré **(ABCD)** de côté 12cm. Placer sur le côté **[AB]** le point **W** tel que **DW** = 13cm ; de même, placer sur le côté **[BC]** le point **L** tel que **BL** = 3cm.
Le triangle **(DWL)** est-il rectangle ? Justifier.

EXERCICE 10

Le triangle **(ABC)** est rectangle isocèle en **A**, avec **AB** = 6,5cm.

1) Calculer la valeur exacte de **BC**. Donner alors <u>une</u> approximation décimale au dixième près (<u>préciser</u> : « *par défaut* » *ou* « *par excès* ») de **BC**.

2) On appelle **D** le point du côté **[AB]**, tel que **AD** = 2,5cm. Par **D**, on mène la parallèle au côté **[AC]**. Cette parallèle coupe le côté **[BC]** en **E**. Calculer **CE**. Justifier.

EXERCICE 11

Le triangle **(PSG)** est tel que **PS** = 5cm, **PG** = 12cm et **SG** = 13cm. Construire ce triangle, aux instruments autorisés (*compas et règle graduée*).

1. Où se trouve le centre de son cercle circonscrit ? Pourquoi ? Tracer le cercle.
2. Calculer la longueur de ce cercle et calculer l'aire du disque de frontière ce cercle.
3. Que se passe-t-il avec un triangle de dimensions 6,5cm ; 8,5cm et 10,5cm ?

EXERCICE 12 : d'après « ***Rallye mathématique du Centre*** »

Vu dans le film de L. Malle : « ***Au revoir les enfants*** ».

Soit **(ABCD)** un quadrilatère qui admet un cercle inscrit. Démontrer que la somme des longueurs de deux côtés opposés du quadrilatère est égale à la somme des longueurs des deux autres côtés de ce même quadrilatère. *Subtil !!!*

EXERCICE 13

Construire un triangle **MOC**, connaissant les deux sommets **O** et **M**, et connaissant le centre **I** du cercle inscrit.

EXERCICE 14 (*Incontournable*)

A. Extrait du CRPE (*des académies du Sud*) en 1999 : « l'AMANDIN ».

On appelle « ***amandin*** » un quadrilatère (*convexe*) dont deux angles opposés sont droits. (*Figure au tableau*).

1. Voici cinq affirmations. Répondre par ***VRAI*** ou ***FAUX*** en justifiant la réponse.

i. Un rectangle est un amandin.
ii. Tous les trapèzes rectangles sont des amandins.
iii. Certains amandins sont des losanges.
iv. Un amandin dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
v. Un amandin dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle.

2. On s'intéresse à un amandin **(ABCD)** dont les angles droits ont pour sommets **B** et **D**, et tel que :

- La diagonale **[AC]** a une longueur de 6cm.
- La hauteur du triangle **(ABC)** issue de **B** mesure 2cm.
- Le triangle **(ADC)** est isocèle.

Construire un tel amandin. Justifier en laissant les traces de constructions et en détaillant les étapes. Déterminer l'aire ***a***(**ABCD**) de ce quadrilatère. Déterminer la longueur **AD**, au mm près.

B. Extrait du CRPE (*académie de Rennes*) en 1993 : la « figure » de Varignon. (*Laquelle ?*)

On considère un quadrilatère quelconque de sommets les points **R**, **S**, **T** et **V**. les milieux respectifs des côtés **[RS]**, **[ST]**, **[TV]** et **[VR]** sont les points **A**, **E**, **I** et **O**.
Construire une telle figure.

1. Démontrer que le quadrilatère (AEIO) est un parallélogramme.
2. Ce quadrilatère peut-il être un losange ? Un rectangle ? Un carré ?

Justifier, c'est à dire chercher quelle(s) « particularité(s) » doit avoir le quadrilatère de « Départ » pour que la figure de Varignon soit un losange, un rectangle ou un carré ?

EXERCICE 15, d'après CRPE, Guyane 2003

Dans cet exercice, les instruments de construction autorisés sont le compas et la règle. Les graduations de celle-ci ne pourront être utilisées pour reporter des longueurs.

Les tracés de construction devront apparaître sur la figure. Toute construction devra être justifiée.

1) **Une construction**

Dans la figure 1 ci-dessous, on considère deux demi-droites sécantes **[Ox)** et **[Oy)**. On note β la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{\mathbf{xoy}}$. On supposera que: $0 < \beta < 45$.

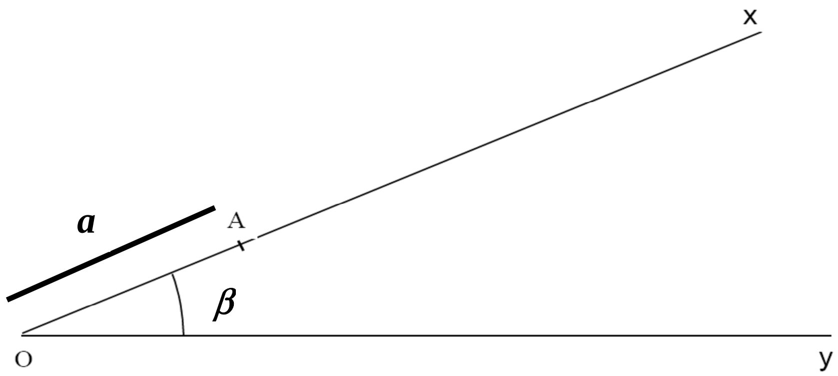


Figure 1

a) On posera et on notera **OA** = $\boldsymbol{a}$. Reproduire la Figure 1, puis :
Construire le point **B** de **[Oy)** tel que **AB** = $\boldsymbol{a}$ et **B** non confondu avec **O**.
Construire le point **C** de **[Ox)** tel que **BC** = $\boldsymbol{a}$ et **C** non confondu avec **A**.
Construire le point **D** de **[Oy)** tel que **CD** = $\boldsymbol{a}$ et **D** non confondu avec **B**.

b) Exprimer les mesures des angles $\widehat{\mathbf{ABO}}$, $\widehat{\mathbf{BAC}}$, $\widehat{\mathbf{ACB}}$, $\widehat{\mathbf{CBD}}$ et $\widehat{\mathbf{ODC}}$ en fonction de β. Justifier chaque réponse.

2) **Une conjecture et une construction :**

À la fin du programme de construction, un élève affirme: « *l'angle $\widehat{\mathbf{OCD}}$ est droit* ».

a) Prouver que cette conjecture est fausse en général. Quelle valeur de l'angle α faut-il choisir pour que la conjecture soit exacte ?

b) Effectuer le programme de construction en reproduisant la Figure 2 ci-dessous et en se plaçant dans ce cas particulier.

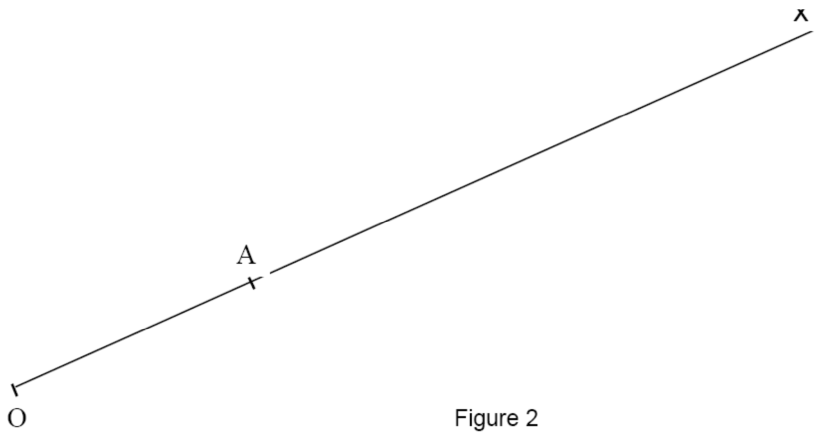


Figure 2

3) **Triangles remarquables de la figure 2.**

On juxtapose les triangles **OAB** et **BCD** par la rotation de centre **B** qui transforme **C** en **A**. Démontrer qu'on obtient un triangle rectangle que l'on appellera **T**.

4) **Calcul d'aires de triangles de la figure 2.**

On considère la Figure 2 ; les résultats sont à exprimer en fonction de $\boldsymbol{a}$ = **OA**.

a) Quelle est l'aire du triangle **ABC** ? **b**) Calculer **OC**.

c) Calculer l'aire du triangle **T** et trouver une relation simple entre cette aire et celle du triangle **ABC**.

d) Démontrer que les triangles **OAB** et **BCD** ont la même aire. Quelle est cette aire ?

EXERCICE 16

Calcul algébrique. Démontrer l'égalité : $2(x - 2{,}625)^2 + 12{,}21875 = 2x^2 - 10{,}5x + 26$.

Figure de base : le quadrilatère **ABCD** est un rectangle tel que **AB** = 6,5cm et **BC** = 4cm. Les points **M**, **N**, **P** et **Q** sont des points appartenant respectivement aux côtés **[AB]**, **[BC]**, **[CD]** et **[DA]**. De plus, on a : **AM** = **BN** = **CP** = **DQ**. On s'intéresse à l'aire du quadrilatère **(MNPQ)**. Pour être convaincu que cette aire varie, calculer l'aire du quadrilatère dans les trois cas suivants : **AM** = 2cm, **AM** = 4cm et **AM** = 1,5cm.

D'où la question ci-dessous :

Question : où faut-il placer le point **M** pour que l'aire du quadrilatère **(MNPQ)** soit la plus petite possible ?

Indication : *en se plaçant dans le domaine algébrique et en posant **AM** = **x**, calculer l'aire du quadrilatère **(MNPQ)** par différence de l'aire du rectangle et la somme des aires des quatre « petits » triangles rectangles extérieurs au quadrilatère. Conclure …*

EXERCICE 17 : d'après CRPE, Académie de LYON (après 2000).

Support du problème. On considère un triangle **ABC**, rectangle en **A**, tel que, en cm, **AB** = 8 et **AC** = 6. Le point **M** est un point de l'hypoténuse **[BC]**. On pose **BM** = x. Par **M**, on mène les perpendiculaires à **(AB)** et à **(AC)** ; elles coupent **[AB]** et **[AC]** respectivement en **P** et **Q**. Faire une figure à l'échelle 1.

Le problème consiste à étudier quelques propriétés du périmètre et de l'aire du rectangle (APMQ).

1. Calculer la longueur **BC**. Justifier. Démontrer que **MP** = $0{,}6x$ et que **MQ** = $8 - 0{,}8x$.

2. Exprimer en fonction de x le périmètre $p(x)$ du rectangle **(APMQ)**. Pour quelle valeur de x, ce périmètre est égal à 13,5 ? Montrer que, quel que soit le point **M**, le périmètre du rectangle **(APMQ)** est supérieur ou égal au demi-périmètre du triangle **(ABC)**.

3. Quelle est l'aire du rectangle **(APMQ)** lorsque **M** est le milieu de **[BC]** ? Exprimer, en fonction de x, l'aire $a(x)$ du rectangle **(APMQ)**. Vérifier que, pour toute valeur de x, on a l'égalité suivante : $a(x) - 12 = -0{,}48(x - 5)^2$. En déduire que l'aire du rectangle **(APMQ)** est la plus grande lorsque **M** est le milieu de **[BC]**.

EXERCICE 18

Soit **ABCD** un trapèze rectangle de hauteur **AD** = 4cm, de bases **AB** = 4cm et **CD** = 7cm, et soit **M** un point du segment **[AD]**. On pose **DM** = x cm.

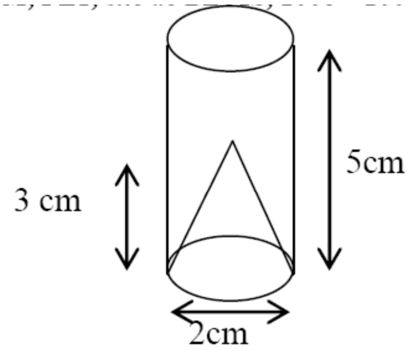
1. Évaluer, en fonction de x, les mesures **A1** et **A2** des aires du triangle (**CDM**) et du quadrilatère (**ABCM**) (mesures exprimées en cm²).

2. Représenter sur papier millimétré les variations de ces deux aires quand **M** varie sur le segment **[AD]**. Choix des unités : 4cm sur l'axe des abscisses (longueurs en cm) et 1cm sur l'axe des ordonnées (aires associées en cm²).

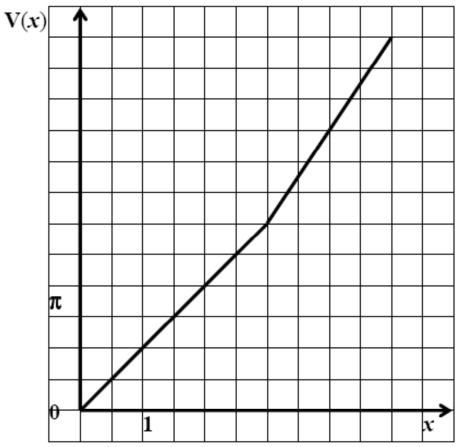
3. Graphiquement, puis par le calcul, déterminer **M** pour que **A1** = **A2**.

EXERCICE 19

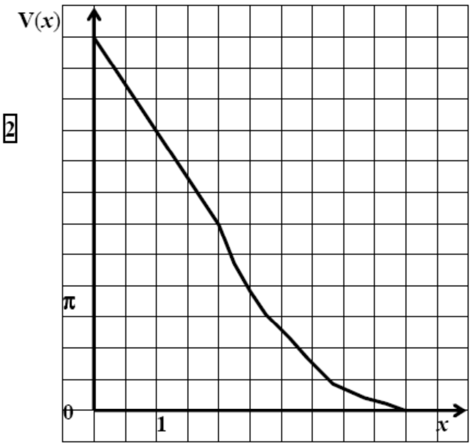
On considère un récipient cylindrique à base circulaire dont le fond est de forme conique et dont les dimensions sont indiquées sur la figure ci-dessous. On note $\boldsymbol{x}$ la hauteur (en cm) du liquide dans le récipient, et $\mathbf{V}(\boldsymbol{x})$ le volume (en cm3) de ce liquide, pour $\boldsymbol{x}$ compris entre 0cm et 5cm.
Parmi les six graphiques ci-dessous, quel est celui qui représente la fonction **V** ?
Pourquoi les cinq autres ne sont-ils pas corrects ?



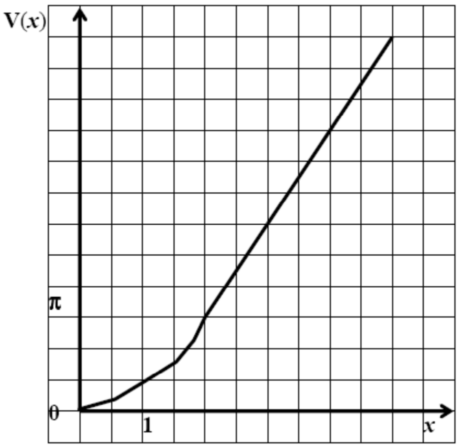
1



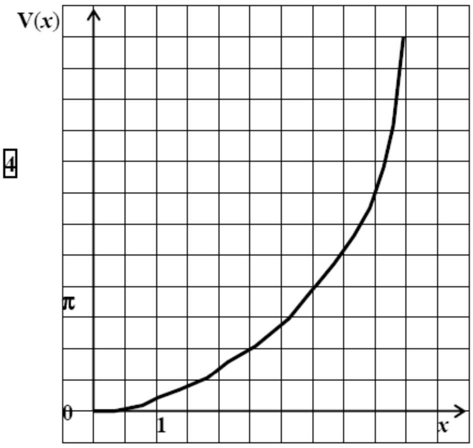
2



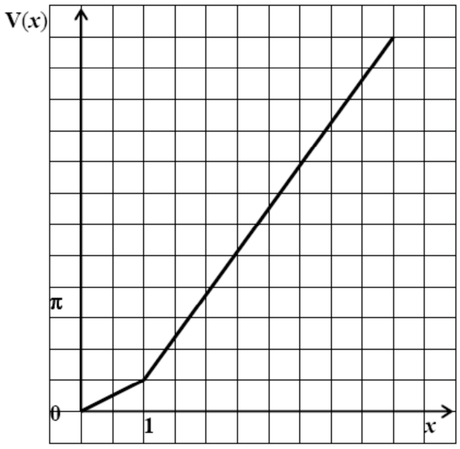
3



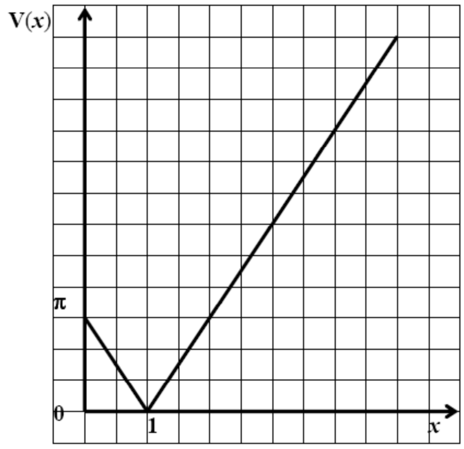
4



5



6



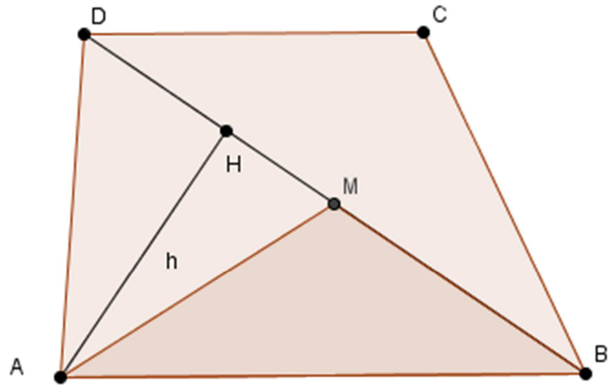
Pistes de CORRECTION. *PM, PW et COPIRELEM*

EXERCICE 1

1. Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme. Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur (et c'est le cas pour le quadrilatère qui a trois côtés de même longueur) est un losange. **VRAI.**

2. Les diamètres **[AB]** et **[CD]** sont les diagonales du quadrilatère **ACBD**. Ces diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu (*le centre commun des deux cercles*). Ainsi, **ACBD** est un quadrilatère dont les diagonales se coupent eu leur milieu et sont perpendiculaires, c'est donc un losange. **VRAI**

3. **M** est le milieu de **[BD]** donc **MB** = **MD** et les points **M**, **B** et **D** sont alignés.



Aire(**ABM**) = $\frac{\mathbf{MB\times AH}}{\mathbf{2}}$ et Aire (**ADM**) = $\frac{\mathbf{MD\times AH}}{\mathbf{2}}$ or **MD** = **MB**

Donc Aire(**ABM**) = Aire(**ADM**). **VRAI.**

4. Si $\mathbf{AB}^2 = \mathbf{CA}^2 + \mathbf{BC}^2$ alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle **ABC** est rectangle en **C**. **FAUX**. (*Oh, petit piège, comme on dit !!!*)

5. Soit **ABCDE** un pentagone convexe. On « découpe » ce pentagone en trois triangles **ABC**, **ACD** et **ADE**. La somme des angles de chacun de ces triangles vaut 180°. La somme des angles du pentagone **ABCDE** est égale à la somme des angles des trois triangles **ABC**, **ACD** et **ADE**, soit 540°. **FAUX.**

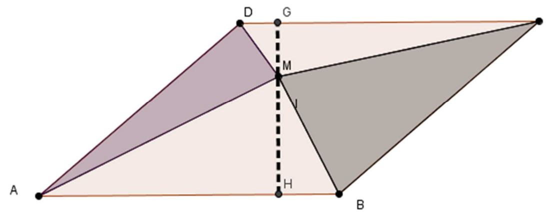
6. Aire(**ADM**) + Aire(**BCM**) = $\frac{\mathbf{AD\times GM}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{BC\times MH}}{\mathbf{2}}$

or **AD** = **BC**

$$= \frac{\mathbf{AD\times(GM + MH)}}{\mathbf{2}}$$

$$= \frac{\mathbf{AD\times GH}}{\mathbf{2}}$$

$$= \frac{\mathbf{Aire(ABCD)}}{\mathbf{2}}$$



Et Aire(**ABM**) + Aire(**CDM**) = Aire (**ABCD**) – $\frac{\mathbf{Aire(ABCD)}}{\mathbf{2}}$

$$= \frac{\mathbf{Aire(ABCD)}}{\mathbf{2}}$$

<u>*Conclusion*</u> : Aire(**ADM**) + Aire(**BCM**) = Aire(**ABM**) + Aire(**CDM**). **VRAI.**

EXERCICE 2

1. Au lecteur de s'y coller.
2. On a : $\mathbf{BC}^2 = 64$ et $\mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 = 23{,}04 + 40{,}96 = 64$ donc : $\mathbf{BC}^2 = \mathbf{AB}^2 + \mathbf{AC}^2 = 64$

Conclusion : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle **ABC** est rectangle en **A**.

EXERCICE 3

Comme **ABC** est un triangle rectangle en **A**, d'après le théorème de Pythagore, on a : $\mathbf{AC}^2 + \mathbf{AB}^2 = \mathbf{BC}^2$ d'où $\mathbf{AC}^2 = 400 - 64 = 336$, d'où $\mathbf{AC} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21} \approx \ldots$ (Approximation décimale, à chercher avec la « caltosss » !)

EXERCICE 4

1. On sait que : les droites **(BG)** et **(CF)** sont sécantes en **A** ; les droites **(BC)** et **(GF)** sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, appliqué à quel triangle ?, on a : $\dfrac{\mathbf{AF}}{\mathbf{AC}} = \dfrac{\mathbf{AG}}{\mathbf{AB}} = \dfrac{\mathbf{GF}}{\mathbf{BC}}$

   On obtient l'égalité : $\dfrac{\mathrm{GF}}{4{,}5} = \dfrac{3{,}6}{4}$, donc on trouve : **GF** = 4,05

2. On sait que les droites **(AB)** et **(AC)** sont sécantes en **A** et que les points **A**, **C**, **E** et **A**, **B** ,**D** sont alignés dans le même ordre.

   On a : $\dfrac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AE}} = \dfrac{4}{6{,}4} = 0{,}625$ et $\dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AD}} = \dfrac{3}{4{,}8} = 0{,}625$ donc : $\dfrac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AE}} = \dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AD}}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites **(BC)** et **(ED)** sont parallèles.

EXERCICE 5

Construction à la règle non graduée et au compas du point C

On peut utiliser une demi-droite auxiliaire d'origine **A**, distincte de la demi-droite **[AB)**, et après avoir choisi une longueur unité, on la gradue régulièrement : le point **A** a alors pour abscisse 0. On appelle **B'** le point d'abscisse 7et **C'** le point d'abscisse 12.

Le point **C** est l' intersection de la droite **(AB)** et de la parallèle à la droite **(B'B)** passant par **C'**.

<u>Construction de la parallèle</u> :

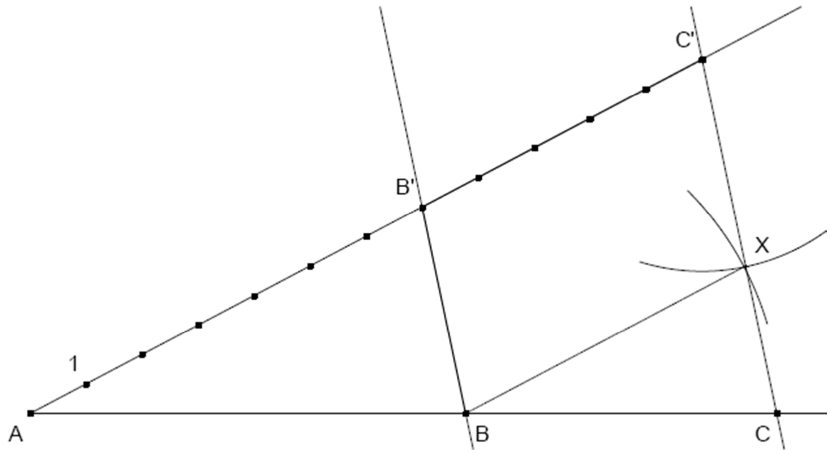
Avec compas et règle, on construit par exemple le quatrième sommet **X** du parallélogramme **(C'B'BX)** ; le point **X** est obtenu par intersection d'un arc de cercle de centre **B** et de rayon **B'C'** et d'un deuxième arc de centre **C'** et de rayon **B'B**.

Montrons que le point C convient

On peut appliquer le théorème de Thalès aux triangles **AB'B** et **AC'C** (puisque les deux droites **(B'B)** et **(C'C)** sont parallèles) et on obtient :

$\dfrac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AB}} = \dfrac{\mathbf{AC'}}{\mathbf{AB'}} = \dfrac{12}{7}$. D'où : $\mathbf{AC} = \dfrac{\mathbf{12}}{\mathbf{7}}\,\mathbf{AB}$.

<u>Figure</u> : voir page suivante.



EXERCICE 6

Partie I : construction de l'inverse d'une longueur.

1) Calcul de OE pour OA = 8

Les points **O**, **E**, **J** et **O**, **I**, **A** sont alignés dans cet ordre. Comme **(EI)** est parallèle à **(JA)**, en appliquant le théorème de Thalès aux triangles **OEI** et OJA, on obtient : $\frac{\mathbf{OE}}{\mathbf{OJ}} = \frac{\mathbf{OI}}{\mathbf{OA}}$ donc **OE** = $\frac{1}{8}$.
lorsque **OA** = 8, alors **OE** = 0,125.

2) Calcul de OE pour OA = *x*

Un raisonnement similaire à celui de la question précédente, cette fois avec **OA** = ***x*** (***x*** non nul), avec **OJ** = 1, **OI** = 1 et **OA** = *x* on obtient : **OE** = $\boldsymbol{\frac{1}{x}}$. **Lorsque OA = *x*, OE =** $\boldsymbol{\frac{1}{x}}$

3) Programme de construction

Dans cette question, il s'agit de proposer un programme de construction de la figure qui a servi de support à la démonstration précédente à partir d'un segment dont la longueur est le nombre dont on veut trouver l'inverse.

1- Construire, un segment **[OA]** dont la mesure de la longueur exprimée en cm est ***x***, le nombre dont on veut déterminer l'inverse.

2- Construire le symétrique de **A** par rapport à **O**, le point **A'** (c'est à dire :tel que le point **O** soit le milieu de **[AA']**).

3- Construire le point **H** intersection de deux cercles de centres respectifs **A** et **A'** et de même rayon. Le point **H** est équidistant de **A** et de **A'**. La droite **(OH)** est la médiatrice du segment **[AA']** donc **(OH)** est perpendiculaire à **(OA)**.

4- Placer sur la demi-droite **[OH)** le point **J** à 1 cm de **O** et sur la demi-droite **[OA)**, le point **I** à 1 cm de **O**.

5- Par report des longueurs des côtés opposés, construire le point **K** tel que **JAIK** soit un parallélogramme.

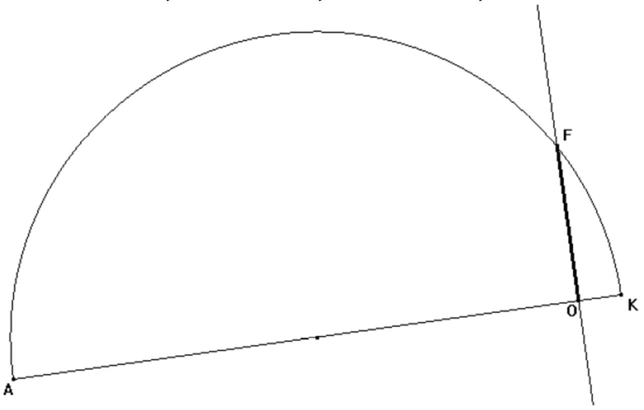
6- La droite **(IK)** coupe la demi-droite **[OJ)** au point **E** tel que **(EI)** est parallèle à **(JA)** (*Côtés opposés du parallélogramme*).

Comme cela a été démontré ci-dessus, la longueur OE est l'inverse de *x*.

Partie II : construction de la racine carrée d'une longueur.

1) Construction de la figure

Cf. page suivante



2) Montrons que $OF^2 = FK^2 – 1$

Dans le triangle **FOK** rectangle en **O**, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient :
$FK^2 = FO^2 + OK^2$ .Le point **O** appartient au segment **[AK]** donc : **AO** + **OK** = **AK**.
Par hypothèse, **AO** = 13. On déduit : **OK** = **AK – AO** = 14 – 13 = 1.
On a donc : $FK^2 = OF^2 + 1^2$ d'où $\mathbf{OF^2 = FK^2 – 1}$ **(1)**

Montrons que $OF^2 = FA^2 – 169$

Dans le triangle **FOA** rectangle en **O**, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient :
$FA^2 = FO^2 + AO^2$. D'où : $OF^2 = FA^2 – AO^2$ Soit : $OF^2 = FA^2 – 13^2$
Ou encore $\mathbf{OF^2 = FA^2 – 169}$ **(2)**

3) $2\ OF^2 = FK^2 + FA^2 – 170$

Par addition des égalités (1) et (2) membre à membre, il vient :
$2 \times OF^2 = FK^2 – 1 + FA^2 – 169$, ce qui donne : $\mathbf{2 \times OF^2 = FK^2 + FA^2 – 170}$

4) AFK est rectangle en F

Le triangle **AFK** est inscrit dans le demi-cercle de diamètre **[AK]** ; or tout triangle inscrit dans un demi-cercle et ayant pour côté son diamètre est rectangle avec comme hypoténuse ce diamètre. **Le triangle AFK est donc rectangle en F**.

5) OF = 13 cm

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle **AFK** rectangle en **F**, on a : $AK^2 = AF^2 + FK^2$. Par hypothèse : **AK** = 14. Ainsi $196 = AF^2 + FK^2$.
Or, on a établi à la question 3) que : $2 \times OF^2 = FK^2 + FA^2 – 170$, donc $2 \times OF^2 = 196 – 170$,
d'où $2 \times OF^2 = 26$. On en déduit $OF^2 = 13$.
D'où **OF = 13 cm** (car **OF** est un nombre positif).

<u>Partie III : construction d'un segment de longueur $\frac{1}{\sqrt{11}}$ cm.</u>

On refait la construction de la ***partie II*** en partant d'un segment **[AK]** de longueur 12 cm et avec **O** point de **[AK]** tel que **OA** = 11 cm.
On obtient le point **F**, intersection de la perpendiculaire à (AK) passant par **O** avec un des demi-cercles de diamètre **[AK]** qui vérifie : **OF** = 11 cm
On place alors sur la demi-droite **[OF)** le point **I** tel que **OI** = 1 cm et la construction de la ***partie I*** (tracé de la droite parallèle à **(FK)** et passant par **I**), nous fournit le point **E** de la demi droite **[OK)** qui vérifie l'égalité suivante (car **OK** = 1) : **OE** = $\frac{1}{\sqrt{11}}$cm.

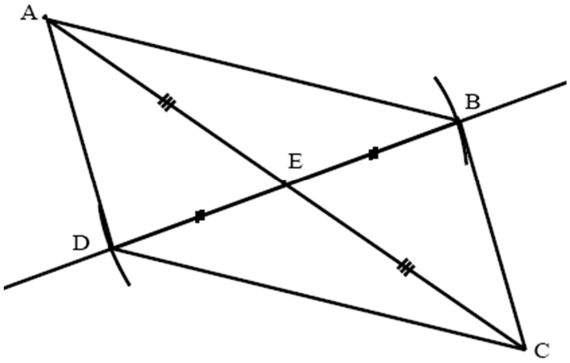
EXERCICE 7

1) Programme de construction d'un parallélogramme de la famille f

1- Construire le point **C**, symétrique du point **A** par rapport au point **E** (ce qui revient à tracer la droite **(AE)** et placer sur cette droite le point **C** tel que **E** soit le milieu du segment **[AC]**).

2- Tracer une droite quelconque passant par **E**, et distincte de la droite **(AC)**, puis placer les points **B** et **D** sur cette droite, de part et d'autre du point **E**, et tels que **E** soit le milieu de **[BD]** (c'est-à-dire **EB** = **ED**).

3- Tracer enfin le quadrilatère **ABCD**. Par construction, le quadrilatère **ABCD** a ses diagonales qui se coupent en leur milieu : il s'agit donc d'un parallélogramme. **ABCD** vérifie les contraintes de l'énoncé donc **ABCD est un parallélogramme de la famille *f*.**



2) Construction d'un rectangle AB'CD' de la famille *f*

Pour qu'un parallélogramme soit un rectangle, il faut et il suffit que ses diagonales soient de même longueur. Il suffit d'adapter le programme de construction de la question précédente :

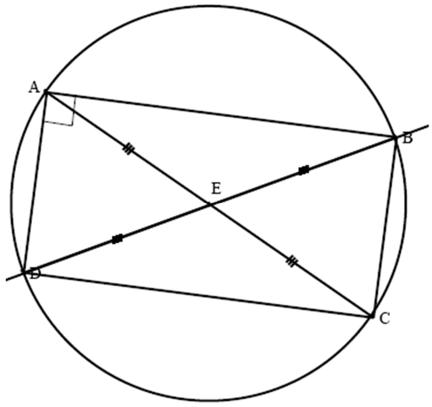
1- Construire le point **C**, symétrique du point **A** par rapport au point **E**.

2- Tracer une droite quelconque passant par **E**, distincte de la droite **(AC)**, puis placer les points **B'** et **D'** sur cette droite, de part et d'autre du point **E**, tels que **B'E** = **D'E** = **AE**.

3- Tracer enfin le quadrilatère **AB'CD'**.

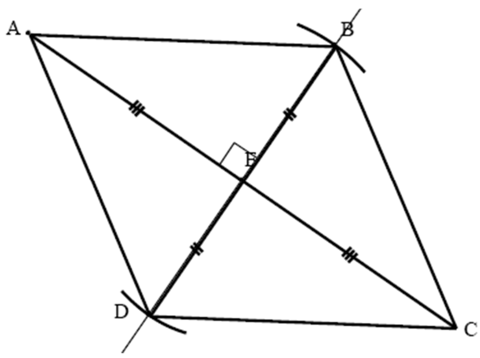
Le parallélogramme **AB'CD'** ainsi obtenu vérifie **AC** = **BD** (ses diagonales ont même longueur) donc **AB'CD' est un rectangle de la famille *f***.

De plus **EA** = **EB'** = **EC** = **ED'** . les points **A**, **B**, **C** et **D** sont donc situés sur le cercle de centre **E** et de rayon **EA**.



3) Sommets des losanges de la famille *f*

Pour qu'un parallélogramme soit un losange, il faut et il suffit que ses diagonales soient perpendiculaires. Dans la construction du parallélogramme (Figure 1), au lieu de choisir une droite quelconque passant par **E**, il faut et il suffit alors de tracer une droite perpendiculaire à la droite **(AC)**. Les deux autres sommets des losanges de la famille sont donc sur la droite perpendiculaire à **(AE)** et passant par **E**.

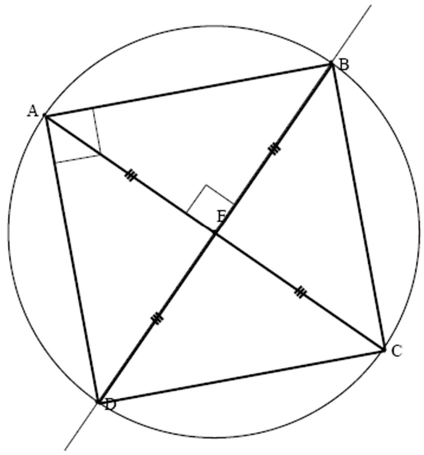


4) La famille *f* contient-elle un ou plusieurs carrés ?

Pour qu'un parallélogramme soit un carré, il faut et il suffit qu'il soit à la fois un rectangle et un losange. D'après les questions 2) et 3), il faut et il suffit que les points **B** et **D** se trouvent à la fois sur le cercle de centre **E** et de rayon **EA**, et sur la perpendiculaire à **(AE)** passant par **E**.

Or, ce cercle et cette droite se coupent en deux points, qui définissent ainsi un seul carré.

La famille *f* contient donc un carré et un seul.



EXERCICE 8

1) Arcs de cercle permettant de tracer la figure

On trace successivement les arcs de cercles **CD**, **DE** et **EF** définis par :

- le premier arc a pour centre **A**, pour rayon ***a***; il « va » du point **C** au point **D**, situé sur le « prolongement » du segment **[AB]** du côté de **A**, et il est dans le demi-plan défini par **(AC)** ne contenant pas **B**.

- le deuxième arc a pour centre **B**, pour rayon 2***a*** (on a : **BD** = **BA** + **AD** et **AD** = **AC** = ***a***) ; il « va » du point **D** au point **E** situé sur le « prolongement » du segment **[BC]**, du côté de **B** et il est dans le demi-plan défini par **(AB)** et ne contenant pas **C**.

- le troisième arc a pour centre **C**, pour rayon 3***a*** (on a : **CE** = **CB** + **BE** et **BE** = **BD** = 2***a***) ; il « va » du point **E** au point **F** situé sur le « prolongement » du segment **[AC]** du côté de **C** et il est dans le demi-plan défini par **(BC)** et ne contenant pas **A**.

Fraction de chaque cercle utilisée

Le triangle **ABC** est équilatéral donc $\widehat{\mathbf{BAC}} = 60°$.

Alors : $\widehat{\mathbf{DAC}} = 180° - 60° = 120°$.

L'arc de cercle intercepte un angle de 120°. Or l'angle correspondant à un cercle complet est de 360°, soit le triple de 120°. On peut donc dire que le premier arc de cercle est « le tiers » du cercle de centre **A** et de rayon **[AC]**.

Il en est de même pour les deux autres arcs de cercle, puisque les angles au centre correspondants ont toujours pour mesure 120° (supplément d'un angle du triangle équilatéral).

Pour les trois arcs, on utilise donc « un tiers » de chaque cercle.

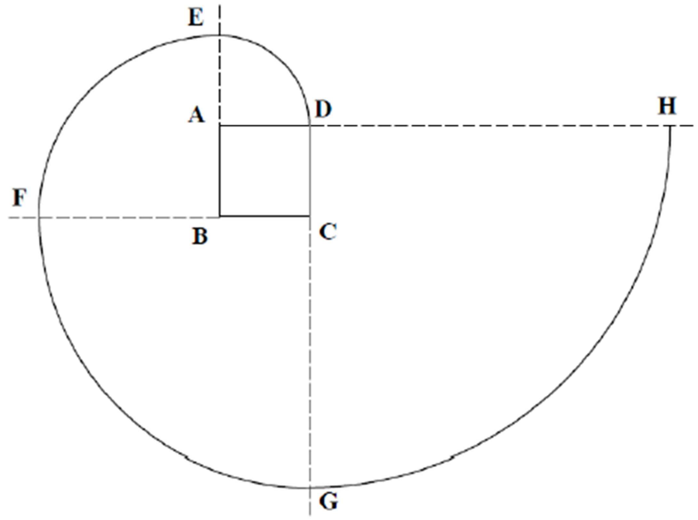
2) Programme de construction permettant d'obtenir une spirale à partir d'un carré

On considère un carré **ABCD** dont les côtés ont pour longueur ***a***.

- « Prolonger » le segment **[AB]** du côté de **A** pour former une demi-droite **[BA)**. (*Mal dit !!!*)
- Construire le quart de cercle de centre **A**, de rayon **AD** = ***a***, « limité » par **D** et la demi-droite **[BA)**. On note **E** l'extrémité du quart de cercle situé sur la demi-droite **[BA)**.
- « Prolonger » le segment **[BC]** du côté de **B** pour former une demi-droite **[CB)**. (*Mal dit, bis !!!*)
- Construire le quart de cercle de centre **B**, de rayon **BE** = 2***a***, « limité » par **E** et la demi-droite **[CB)**. On note **F** l'extrémité du quart de cercle situé sur **[CB)**.
- « Prolonger » **[CD]** du côté de **C** pour former une demi-droite **[DC)**. (*Mal dit, ter !!!*)

- Construire le quart de cercle de centre **C**, de rayon **CF** = 3***a***, « limité » par **F** et la demi-droite **[DC)**. On note **G** l'extrémité du quart de cercle situé sur **[DC)**.
- Prolonger **[AD]** du côté de **D** pour former une demi-droite **[AD)**. (*Mal dit, encore !!!*)
- Construire le quart de cercle de centre **D**, de rayon **DG** = 4***a***, « limité » par **G** et la demi-droite **[AD)**. On note **H** l'extrémité du quart de cercle situé sur **[AD)**.

Note de ***PW*** : pas terrible du tout le programme de construction ! Beau « contre-exemple » de ce qu'il ne faut pas faire. On ne doit pas mélanger, mixer, … des instructions indiquant des tâches précises à exécuter et des résultats ou commentaires liés à ces tâches. Bon, tant pis… Programme à réécrire, why not ?



3) Longueur de la première spirale

La première spirale est formée de 3 « tiers » de cercles, dont les rayons respectifs ont pour mesure a, $2a$ et $3a$. La longueur est égale à : $\frac{1}{3}(2\pi a) + \frac{1}{3}(2\pi \times 2a) + \frac{1}{3}(2\pi \times 3a) = \frac{1}{3}(2\pi)\times(a + 2a + 3a) = 4\pi a$

La longueur de la première spirale est $4\pi a$.

Longueur de la deuxième spirale

La deuxième spirale est formée de quatre quarts de cercle de rayons respectifs a, $2a$ $3a$, et $4a$.

La longueur est égale à :

$$\frac{1}{4}(2\pi a) + \frac{1}{4}(2\,\pi \times 2a) + \frac{1}{4}(2\pi \times 3a) + \frac{1}{4}(2\pi \times 4a) = \frac{1}{4}\times 2\pi \times (a + 2a + 3a + 4a) = 5\pi a$$

La longueur de la deuxième spirale est $5\pi\, a$, avec a la mesure du côté.

4) Mesure à donner au côté du carré pour que les deux spirales aient la même longueur

Si a = 10 cm, la question 3) conduit à la longueur : $4\pi \times 10$ cm, soit 40π cm.

On note a la longueur du côté du carré. Pour que la spirale construite sur le carré ait la même longueur que la spirale construite sur le triangle, il faut que: $5\pi a = 40\pi$ cm. D'où : $a = 8$ cm.

Le côté du carré doit avoir pour longueur de côté 8 cm.

5) Conjecture sur les longueurs de spirales construites sur un pentagone régulier et sur un polygone régulier à *n* côtés

La question 3) a permis d'établir que :

- pour $n = 3$, la longueur de la spirale est : $4\pi a$, - pour $n = 4$, la longueur de la spirale est : $5\pi a$.

L'observation des deux résultats précédents permet de faire les deux conjectures suivantes :

- pour $n = 5$, la longueur de la spirale est **: $6\pi a$,**

- pour un polygone régulier à *n* côtés, la longueur de la spirale est **: $(n + 1)\pi\, a$.**

*Note de **PW** : « La conjecture est au théorème, ce que les fiançailles sont au mariage : elles promettent beaucoup, mais, mais, est-ce que ça va toujours « marcher » ? ». Maxime quelque peu désuète, mais à méditer quand même !*

EXERCICE 9

Le triangle **DLC** est rectangle en **C**, donc d'après le théorème de Pythagore appliqué à ce triangle, on a : $\mathbf{DL}^2 = \mathbf{DC}^2 + \mathbf{LC}^2$ on a : $\mathbf{DL}^2 = 12^2 + 9^2 = 225$, c'est à dire donc **DL** = 15 cm. (*Longueur…*)

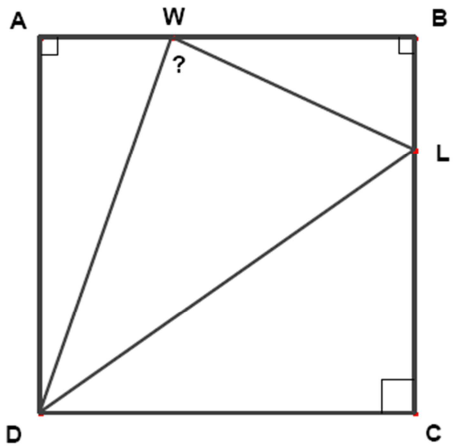
De même, le triangle **ADW** est rectangle en **A**, donc d'après le théorème de Pythagore…, on a : $\mathbf{DW}^2 = \mathbf{AD}^2 + \mathbf{AW}^2$, c'est à dire : $\mathbf{AW}^2 = 13^2 - 12^2 = 25$ donc **AW** = 5 cm. (*Longueur…*)

De même, le triangle **BLW** est rectangle en **B** d''après le théorème de Pythagore… :
$\mathbf{WL}^2 = \mathbf{WB}^2 + \mathbf{BL}^2$ on a alors : $\mathbf{WL}^2 = 7^2 + 3^2 = 58$ donc $\mathbf{WL} = \sqrt{58}$ cm. (*Longueur et valeur exacte*)

D'où la nouvelle question : le triangle **DWL** est-il rectangle en **W** ? Attention à la « rédaction » !

On a : $\mathbf{DL}^2 = 225$

On a : $\mathbf{DW}^2 + \mathbf{LW}^2 = 169 + 58 = 227$, $225 \neq 227$ il n'y a pas égalité, on ne peut pas appliquer l'énoncé réciproque du théorème de Pythagore. Le triangle **DWL** n'est pas rectangle en **W**.

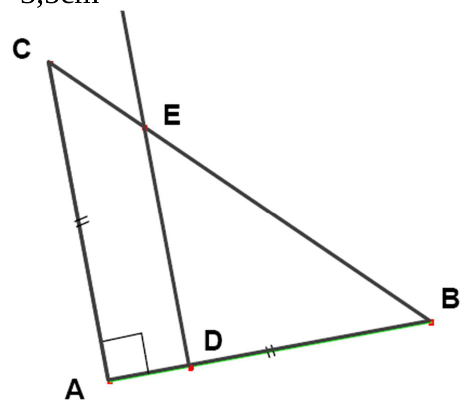


EXERCICE 10

1. *Attention* : préciser obligatoirement les conditions d'application du théorème ! On trouve $\mathbf{BC}^2 = 6{,}5^2 + 6{,}5^2 = 84{,}5$ d'où $\mathbf{BC} = \sqrt{84{,}5}\text{cm} \approx 9{,}2\text{cm}$.
2. Dans le triangle **ABC**, on a **D** ∈ **[AB]** et **E** ∈ **[BC]** avec **(AC)** parallèle à **(DE)**
   Donc, d'après le théorème de Thalès appliqué à ce triangle,

on a : $\dfrac{\mathbf{BE}}{\mathbf{BC}} = \dfrac{\mathbf{BD}}{\mathbf{BA}}$ d'où $\mathbf{BE} = \dfrac{4\sqrt{84{,}5}}{6{,}5} \approx 5{,}7\text{cm}$

Et $\mathbf{CE} \approx (9{,}2 - 5{,}7)\text{cm} \approx 3{,}5\text{cm}$



EXERCICE 11

1. La construction est laissée au lecteur.

On a : $\mathbf{PS}^2 + \mathbf{PG}^2 = 25 + 144 = 169$ et $\mathbf{SG}^2 = 169$ d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle **PSG** est rectangle en **P**.

Le centre **O** du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse **[SG]**. Son rayon mesure 6,5 cm.

2. $\mathbf{L} = 2\,\pi \boldsymbol{R} = 1 \times \pi$ cm $\approx$ 40,84 cm et aire(disque) = $\pi \boldsymbol{R}^2 = 42{,}25 \times \pi \text{cm}^2 \approx 132{,}73 \text{cm}^2$

3. Ce triangle n'est pas rectangle (***à prouver***). Pour tracer son cercle circonscrit, on doit tracer deux médiatrices. En ce qui concerne les calculs de longueur et d'aire, c'est un peu plus compliqué ! Il faut utiliser des outils qui dépassent le programme du Master.

La trigonométrie par exemple. *A chercher, pour les volontaires.*

EXERCICE 12

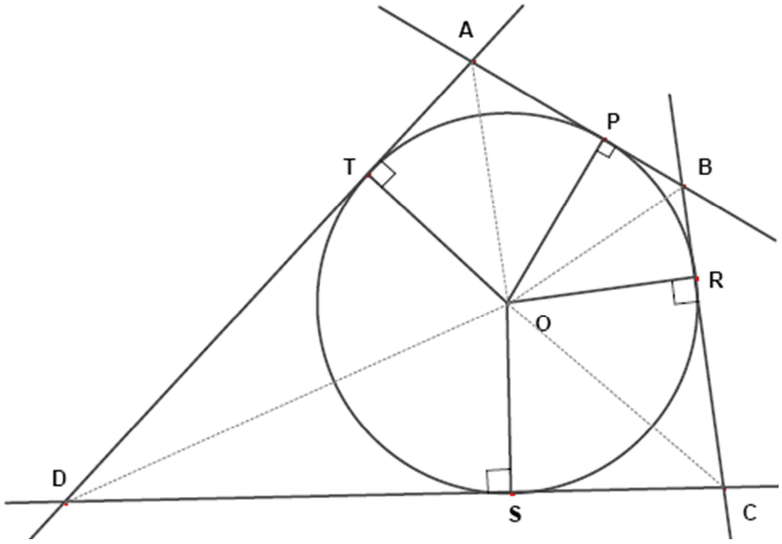
Démontrons que **AB** + **DC** = **BC** + **AD**

- Démontrons d'abord que : **AT** = **AP**

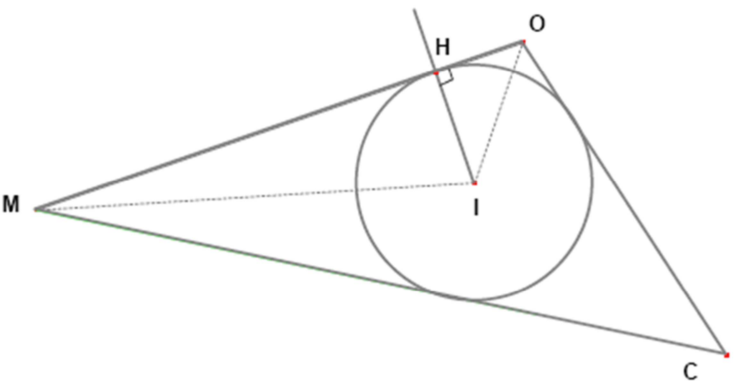
Comme la droite **(AB)** est tangente au cercle, **(AB)** $\perp$ **(OP)**. De même **(AD)** $\perp$ **(OT)**, le triangle **ATO** est rectangle en **T**, donc d'après le théorème de Pythagore, on a : $\mathbf{AT}^2 = \mathbf{AO}^2 - \mathbf{OT}^2$
Le triangle **APO** est rectangle en **P**, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $\mathbf{AP}^2 = \mathbf{AO}^2 - \mathbf{OP}^2$
Comme **OP** = **OT**, on a donc **AT** = **AP**.

- De même, on démontre que : **PB** = **BR** , **RC** = **SC** et **SD** = **DT**

D'où : **AB** + **DC** = **AP** + **PB** + **DS** + **SC** = **AT** + **BR** + TD + **RC** = **AT** + **TD** + **BR** + **RC** = **AD** + **BC**.



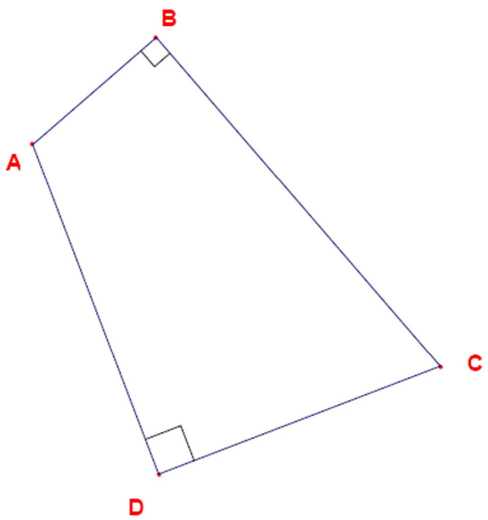
EXERCICE 13



Comme le point **I** est le centre du cercle circonscrit, la droite **(OI)** est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathbf{MOC}}$ d'où la construction de cet angle par symétrie.

Idem pour l'angle $\widehat{\mathbf{OMC}}$. D'où la construction demandée. Il y a des cas « limites » en fonction de la position des trois points **M**, **O** et **I** la figure ci-dessus réalise un cas « favorable » pour que le triangle soit facilement constructible.

EXERCICE 14



Partie A : L'AMANDIN

Question 1

i) **Un rectange est un amandin**. $\boxed{\text{VRAI}}$. Un rectangle est un quadrilatère convexe possédant quatre angles droits, donc il possède, en particulier deux angles droits opposés.

ii) **Tous les trapèzes rectangles sont des amandins.** $\boxed{\text{FAUX}}$. Les trapèzes rectangles (qui ne sont pas aussi des rectangles) ne possèdent pas deux angles droits opposés. Les deux angles droits sont consécutifs.

iii) **Certains amandins sont des losanges**. $\boxed{\text{VRAI}}$. Les carrés sont des rectangles, donc des amandins ; mais les carrés sont aussi des losanges !

iv) **Un amandin dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange**. $\boxed{\text{FAUX}}$

Un contre-exemple : une figure parfois appelée le « *cerf-volant* ». Figure à dessiner pour s'en convaincre !

v) **Un amandin dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle.** $\boxed{\text{VRAI}}$.

L'amandin **(ABCD)** d'angles droits en **B** et **D** est inscriptible dans un cercle de diamètre **[AC]** puisque **(ABC)** et **(ADC)** sont des triangles rectangles. **[BD]** est donc une corde de ce cercle et, comme les diagonales **[BD]** et **[AC]** ont même longueur, **[BD]** est aussi un diamètre. Par suite, les angles en **A** et en **C** sont droits. Le quadrilatère **(ABCD)** ayant quatre angles droits est un rectangle.

Question 2

- L'amandin est inscrit dans un cercle de diamètre **[AC]**. Donc de rayon 3cm.

La hauteur, issue de **B**, du triangle **(ABC)** mesure 2cm, donc le sommet se trouve suer une parallèle à la droite **(AC)** située à 2cm (*Il y a deux possibilités ; en choisir une !*). Le triangle **(ADC)** etant isocèle, le point **D** est un point d'intersection de la médiatrice de **(AC]** avec le cercle. Comme le quadrilatère est convexe, les points **B** et **D** sont de « part et d'autre » de **(AC)**. Il ne reste plus qu'à réaliser la figure. Au travail !

- (Un) Programme de construction :

• Tracer [**AC**] avec **AC** = 6 cm. Soit **O** le milieu de [**AC**].
• Tracer le cercle $\mathcal{C}$(**O**, 3 cm) : il passe par les points **A** et **C**.
• Tracer le segment [**AH**] perpendiculaire à [**AC**] tel que **AH** = 2 cm.
• Par **H**, mener la parallèle (**d**) à (**AC**) : elle coupe le cercle en deux points. Soit **B** l'un de ces points.
• Tracer la médiatrice de [**AC**] qui coupe le cercle en deux points. Soit **D** celui de ces deux points tels que les points **B** et **D** soient de « part et d'autre » de (**AC**).
• Joindre (*comme il faut !*) les points **A**, **B**, **C** et **D** pour obtenir l'amandin (**ABCD**).

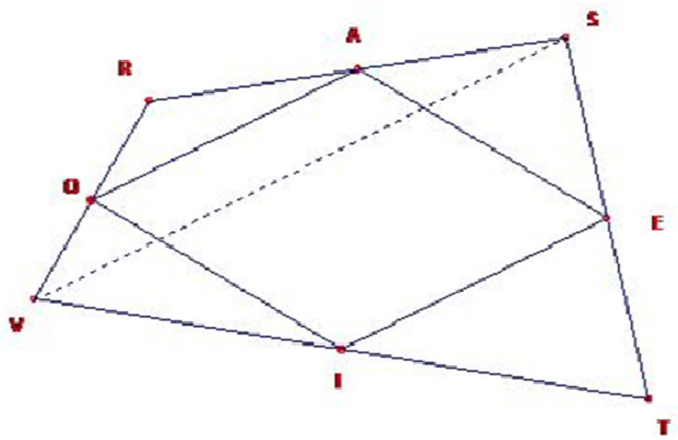
- Aire (**ABCD**) = Aire(**ABC**) – Aire(**ADC**) = $\frac{1}{2}\times$ (**BH** × **AC** – **OD** × **AC**)

$$= \frac{1}{2} \times \mathbf{AC} \times (\mathbf{AH} - \mathbf{OD}) = 3 \times 5 = 15 \text{ (cm}^2\text{)}$$

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle **(ADC)** rectangle en **D** on a :
$\mathbf{AD}^2 + \mathbf{DC}^2 = \mathbf{AC}^2$. Comme le triangle **(ADC)** est aussi isocèle en **D**, **AD** = **DC** d'où $\mathbf{AD}^2 = \mathbf{DC}^2$ et $2 \times \mathbf{AD}^2 = \mathbf{AC}^2 = 36$ donc $\mathbf{AD}^2 = 18$ et $\mathbf{AD} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}2$ (cm)

Partie B : LA FIGURE DE VARIGNON

Question 1



On se place dans le triangle **(RSV)**. On sait que le point **A** est le milieu de **[RS]** et que le point **O** est le milieu de **[VR]**. On est donc dans la situation ou on peut appliquer le théorème dit de la « droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle » (appelé parfois « la droite des milieux ») et qui permet de conclure que les droites **(AO)** et **(VS)** sont parallèles.

On démontre de même que les droites **(IE)** et **(VS)** sont parallèles dans le triangle **(STV)**.
On en déduit alors que les droites **(AO)** et **(IE)** sont parallèles.
On continue. On peut tracer l'autre diagonale **[RT]** et par un raisonnement analogue dans les triangles **(RST)** et **(RTV)**, on prouve que les droites **(AE)** et **(OI)** sont parallèles.

Conclusion : le quadrilatère **(AEIO)** possède ses côtés opposés parallèles, c'est donc un parallélogramme.

Question 2
Une piste : faire plusieurs figures pour conjecturer des idées de réponses. Il y a deux cas à étudier :

- Les diagonales du quadrilatère **(RSTV)** sont perpendiculaires. **(RT)** ⊥ **(VS)**, **(OA)** // **(VS)**, **(OI)** // **(RT)**. Le parallélogramme **(OAEI)** ayant un angle droit est donc un rectangle.
- Les diagonales du quadrilatère **(RSTV)** ont la même longueur. **RT** = **VS**, **VS** = 2 × **OA**, **RT** = 2 × **OI** d'où **OA** = **OI**. Le parallélogramme **(OAEI)** ayant deux côtés consécutifs de même longueur est donc un losange.

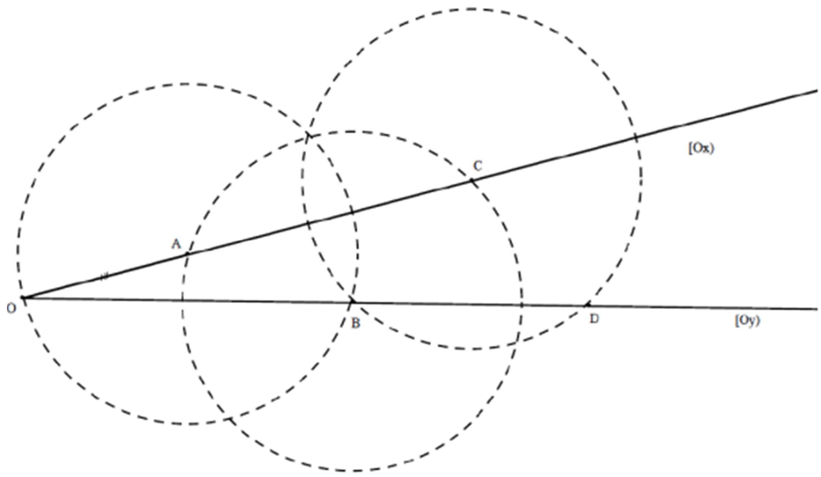
<u>*Conséquence*</u> : si les diagonales du quadrilatère **(RSTV)** sont perpendiculaires et ont la même longueur, le quadrilatère, (*et même mieux, le parallélogramme*) **(OAEI)** est à la fois un rectangle et un losange : c'est donc un carré.

EXERCICE 15

1) a) Constructions

Il s'agit de tracer dans l'ordre :

- le cercle de centre **A** passant par **O** (donc de rayon ***a***) : on obtient le point **B** sur **[Oy)** ;
- le cercle de centre **B** passant par A (donc de rayon ***a***) : on obtient le point **C** sur **[Ox)** ;
- le cercle de centre **C** passant par **B** (donc de rayon ***a***) : on obtient le point **D** sur **[Oy)**.



b) Mesures des angles $\widehat{ABO}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{CBD}$ et $\widehat{ODC}$ en fonction de α

Les mesures des angles sont toutes exprimées en degrés.

Par construction, **OA** = **AB** = **BC** = **CD** = ***a***.

Les triangles **OAB**, **ABC** et **BCD** sont donc isocèles respectivement en **A**, en B et en **C**.

On en déduit que :

- $\widehat{OBA} = \widehat{AOB}$, **l'angle $\widehat{OBA}$ mesure donc** α et l'angle $\widehat{OAB}$ mesure $180 - 2\alpha$.
- $\widehat{ACB} = \widehat{CAB}$; or l'angle $\widehat{CAB}$ est le supplémentaire de l'angle $\widehat{OAB}$, donc $\widehat{CAB} = 2\alpha$;

D'où : les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAB}$ mesurent donc 2α et l'angle $\widehat{CBA}$ mesure $180 - 4\alpha$.

- $\widehat{CBD} = \widehat{BDC}$; or les points **B**, **D** et **O** sont alignés, de sorte que : $\widehat{BDC} = \widehat{ODC}$ et $\widehat{CBD} + \widehat{CBA} + \widehat{ABO} = 180$. Or : $\widehat{ABO} = \alpha$.On en déduit : $\widehat{CBD} = 180 - \widehat{CAB} - \widehat{ABO} = 180 - \alpha - (180 - 4\alpha) = 3\alpha$. Les angles $\widehat{CBD}$ **et** $\widehat{ODC}$ mesurent donc 3α **.**

2) a) La conjecture « l'angle $\widehat{OCD}$ est droit » est FAUSSE en général

$\widehat{OCD} = \widehat{OCB} + \widehat{BCD}$. Or, d'après la question 1)b) : $\widehat{OCB} = \widehat{ACB} = 2\alpha$ et $\widehat{BCD} = 180 - 2 \times \widehat{CBD} = 180 - 6\alpha$. On en déduit : $\widehat{OCD} = 180 - 4\alpha$.

On considère alors l'affirmation « l'angle $\widehat{OCD}$ est droit ». Compte tenu de la mesure des angles, elle est vraie, si et seulement si : $180 - 4\alpha = 90$, donc si et seulement si : $\alpha = 22{,}5$.

Cette affirmation est donc **FAUSSE** en général et **VRAIE** pour une seule valeur de α = **22,5°.**

b) Programme de construction dans le cas où α = 22,5°

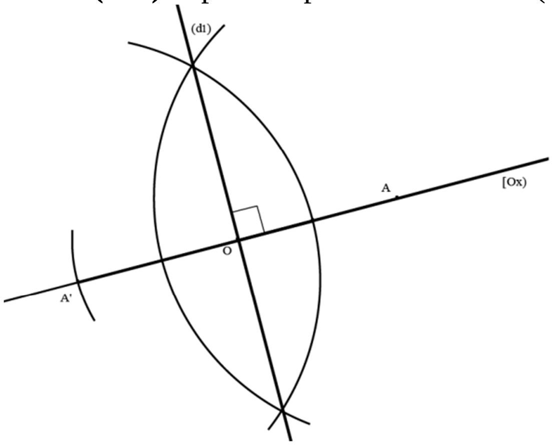
Pour construire la figure demandée, il faut reprendre le procédé de construction de la question 1 à partir d'un angle de 22,5°.

Nous décrivons ci-dessous comment construire à la règle et au compas un angle de 22,5°.

Cet angle se construit à la règle et au compas par exemple en traçant la bissectrice d'un angle de 90°, puis celle d'un angle de 45°. Justifier…

Étape 1 : construction de la droite (***d1***) perpendiculaire à la droite **(OA)** en **O**.

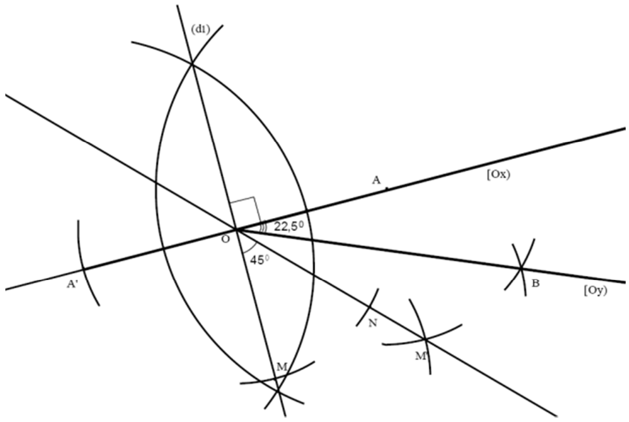
On considère **A’** le point d’intersection du cercle de centre **O** et passant par **A**, avec la droite **(OA)**. La droite qui passe par les deux points d’intersection de deux cercles de centres respectifs **A** et **A’** et de même rayon (qui doit être strictement supérieur à **OA**) est la médiatrice du segment **[AA’]**. C’est également la droite perpendiculaire à **(OA)** et passant par **O**. On la note (***d1***).



Étape 2 : construction de l’angle de 22,5°

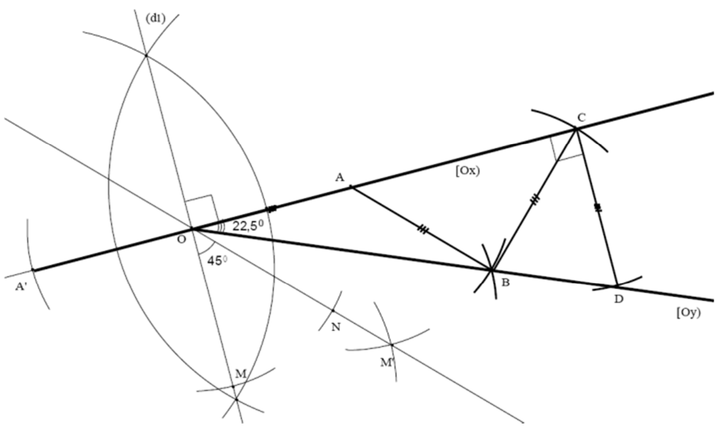
On considère le point **M** , point d’intersection du cercle de centre **O** et de rayon **OA** avec la droite (***d1***). L’angle $\widehat{\mathbf{MOA}}$ est égal à 90°. On trace la bissectrice de l’angle $\widehat{\mathbf{MOA}}$ en construisant le quatrième sommet **M’** du losange **MOAM’** (Le point **M’** est le point d’intersection des deux cercles de rayon **OA** et de centres respectifs **A** et **M**). L’angle $\widehat{\mathbf{M'OA}}$ est alors égal à 45°.

On trace ensuite la bissectrice de l’angle $\widehat{\mathbf{M'OA}}$. On note **N** le point du segment **[OM’]** situé à la distance **OA** de **O** ; on construit le quatrième sommet **B** du losange **NOAB** de la même manière que précédemment. L’angle $\widehat{\mathbf{BOA}}$ mesure 22,5°. La demi-droite **[OB)** est la demi-droite **[Oy)**. On pourra se référer à la figure ci-dessous.



Étape 3 : construction des points **C** et **D**

Voir question 1) : on obtient alors la figure ci-dessous :



3) La figure obtenue par « juxtaposition » du triangle **OAB** et de l'image du triangle **BCD**, par la rotation transformant **C** en **A** est un triangle rectangle.

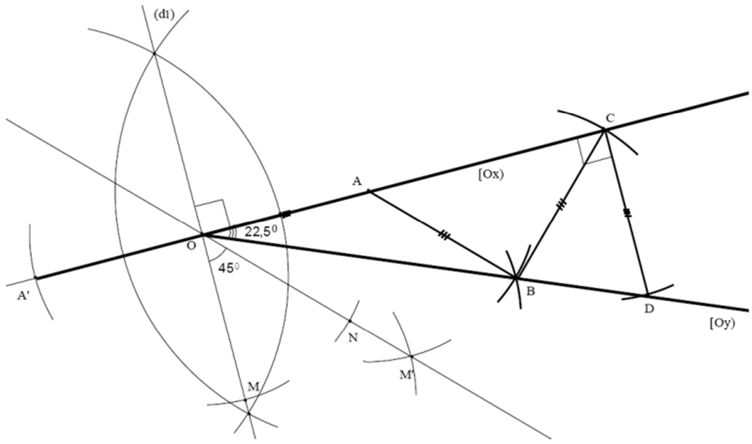
Par la rotation de centre **B** qui mène **C** en **A** :

$\mathbf{C} \longmapsto \mathbf{A}$

$\mathbf{B} \longmapsto \mathbf{B}$ (**B** est le centre de la rotation, c'est donc l'unique point invariant)

$\mathbf{D} \longmapsto \mathbf{D'}$

Le transformé du triangle **BCD** dans la rotation de centre **B** qui transforme **C** en **A** est donc le triangle **BAD'**. La figure obtenue en « juxtaposant » les deux triangles **OAB** et **ABD'** par leur côté commun est représentée ci-dessous « à (presque) main levée » et codée avec les informations certaines du problème.



La figure obtenue est un triangle T : pour montrer cette proposition, il suffit de montrer que les points **O**, **A** et **D'** sont alignés. Le triangle **ABC** est isocèle en **B** et possède deux angles de 2 × 22,5° = 45° (d'après la question 1)b)), de sorte que : $\widehat{\mathbf{ABC}}$ = 180° – 45° – 45° = 90°.

Le triangle **ABC** est donc rectangle et isocèle en **B**. Il en résulte que l'angle de la rotation est de 90°, d'où : $\widehat{\mathbf{DBD'}}$ **= 90°.** De plus : $\widehat{\mathbf{BAD'}}$ = $\widehat{\mathbf{BCD}}$ = 180 – 6 × 22,5 = 45 (question 1)b)).

<u>*Méthode 1*</u> :

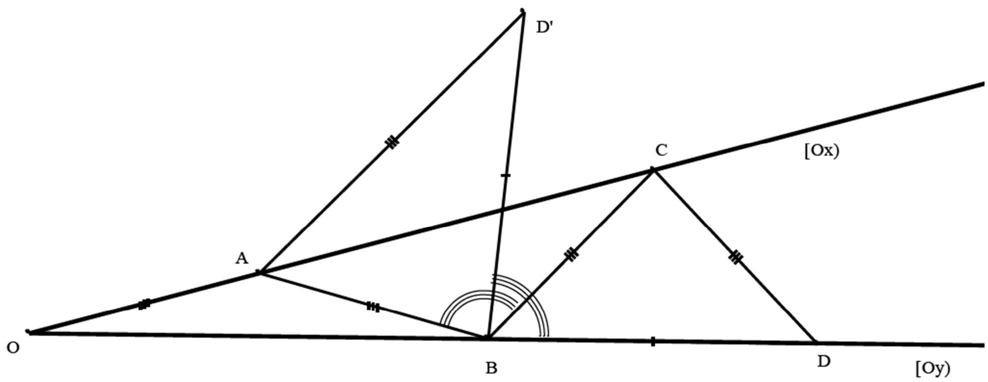
L'égalité entre les deux angles $\widehat{\mathbf{BAD'}}$ et $\widehat{\mathbf{BAC}}$ (tous deux mesurant 45°) conduit à l'alignement des points **A**, **D'** et **C**, et par suite à l'alignement des points **O**, **A** et **D'**.

<u>*Méthode 2*</u> :

Par la question 1) b) : $\widehat{\mathbf{BAO}}$ = 180° – 2 22,5° = 135°. On en déduit : $\widehat{\mathbf{OAD'}}$ = $\widehat{\mathbf{OAB}}$ + $\widehat{\mathbf{BAD'}}$ = 135° + 45° = 180°. Ainsi, les points **O**, **A** et **D'** sont alignés. On en conclut que **OBD'** est un triangle <u>*comment*</u> ?. Puisque $\widehat{\mathbf{DBD'}}$ = 90° et que les points **O**, **B** et **D** sont alignés, on a : $\widehat{\mathbf{OBD'}}$ = 90°.

On en conclut que OBD' est un triangle rectangle en B.

La juxtaposition des triangles **OAB** et **BCD** par la rotation de centre **B** qui transforme **C** en **A** permet donc d'obtenir un triangle **OBD'** rectangle en **B** que l'on appellera T dans toute la suite**.**



4) a) Aire du triangle **ABC**

Le triangle **ABC** de la figure ci-dessus est rectangle et isocèle en **B**.

Comme **AB** = **BC** = a, **son aire est :** $\frac{1}{2}a^2$

b) Calcul de **OC**

OC = OA + **AC** = $a + a\sqrt{2} = a\,(1+\sqrt{2})$.

En effet [**AC]** est la diagonale d'un carré de côté a (ou l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté a).

c) Calcul de l'**aire de T**

Aire (**T**) $= \frac{1}{2}$ **OD'**× hauteur issue de **B** du triangle **OBD'** $= \frac{1}{2}$**OD'**× hauteur issue de **B** du triangle **ABC**. Or : **OD' = OA + AD' = OA + CD** = $2a$

La hauteur issue de **B** du triangle rectangle isocèle **ABC** correspond à la moitié de la diagonale d'un carré de côté a, soit : $\frac{1}{2}$**AC** $= a\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : Aire (**T**) $= \frac{1}{2} \times 2a \times a\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$

Relation entre l'aire de **T et celle du triangle ABC.**

ABC étant un triangle rectangle isocèle, Aire (**ABC**) $= \frac{1}{2}$ **AB** × **BC** $= \frac{a^2}{2}$

On a donc **Aire (T) = Aire (ABC) ×** $\sqrt{2}$ **.**

d) Les triangles **OAB** et **BCD** ont la même aire

Aire (**OAB**) $= \frac{1}{2}$**OA** × hauteur issue de **B** du triangle **OAB**

$= \frac{1}{2}a$ × hauteur issue de **B** du triangle **ABC** $= \frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2\frac{\sqrt{2}}{4}$

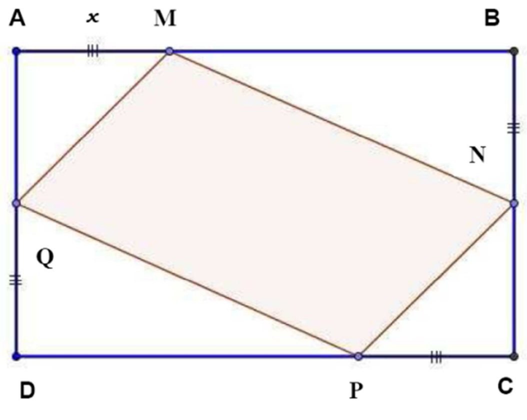
Aire (**BCD**) = Aire (**ABD'**)

$= \frac{1}{2}$**AD'** × hauteur issue de **B** du triangle **ABD''**

$= \frac{1}{2}$**AD'** × hauteur issue de **B** du triangle **ABC** $= \frac{1}{2}a^2\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2\frac{\sqrt{2}}{4}$

Par suite les aires des triangles **OAB** et **BCD** sont égales à **:** $a^2\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(**C'est la moitié de l'aire de **T).**

EXERCICE 16



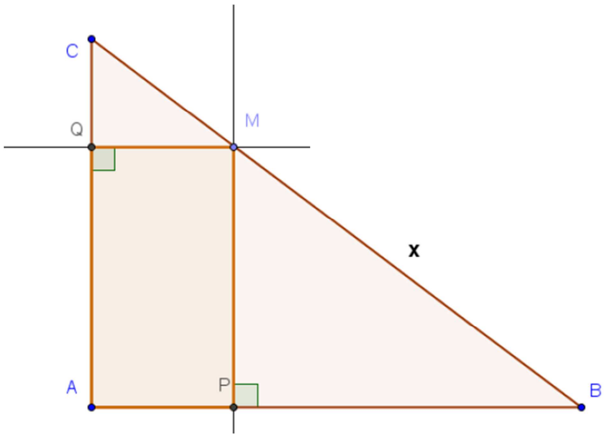
On a : Aire (**ABCD**) = 6,5 × 4 = 26(unité(s) d'aire),

Aire (**AMQ**) = aire (**CPN**) = $\frac{\mathbf{x(4-x)}}{2}$ et Aire (**MBN**) = aire (**DQP**) = $\frac{x\,(6-x)}{2}$.

On peut alors exprimer l'aire de (**MNPQ**) : Aire (**MNPQ**) = $2x^2 - 10{,}5x + 26$.
Un « petit » traitement algébrique permet d'écrire aire (**MNPQ**) = $2(x - 2{,}625)^2 + 12{,}21875$. Cette somme est la plus petite possible lorsque $x = 2{,}625$.
Conclusion... *(On peut aussi construire à l'échelle 1 la figure dans ce cas*).

Exercice un peu difficile, mais on n'a rien sans rien !

EXERCICE 17



1. Calcul de **BC** : pas de difficulté particulière, à condition de préciser les conditions d'application du théorème de Pythagore et de conduire correctement les calculs. On trouve **BC = 10**(cm).
Pour le calcul de **MP**, il faut extraire une sous-figure avec des parallèles pour pouvoir appliquer le théorème de Thalès. On a : **(MP)** et **(AC)** toutes deux perpendiculaires à **(AB)**, DONC elles sont parallèles. Dans le triangle **(ABC)**, on a **(MP)** // **(AC)**, donc … (Thalès…), on a : $\frac{\mathbf{BM}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{BP}}{\mathbf{BA}} = \frac{\mathbf{MP}}{\mathbf{AC}}$,

c'est à dire : $\frac{x}{10} = \frac{\mathbf{MP}}{6}$ d'où **MP = 0,6*x***.

Même type de raisonnement pour calculer **MQ**. On se place dans le triangle **(ABC)**, avec **(QM)** // **(AB)**, car toutes deux perpendiculaires à **(AC)**. … (Thalès…) (*A bien rédiger !*),

on a : $\frac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{CA}} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathbf{CB}} = \frac{\mathbf{QM}}{\mathbf{AB}}$, c'est à dire : $\frac{(10-x)}{10} = \frac{\mathbf{QM}}{8}$ d'où **QM = 8 – 0,8x**.

2. On note **p**(x) le périmètre du quadrilatère **(APMQ)**. On a :
p(*x*) = (**MP** + **QM**) × 2 = (0,6x + 8 – 0,8x) × 2 = **16 – 0,4x**. Pour l'item suivant, on doit chercher à résoudre l'équation : **p**(x) = 13,5. On trouve **x = 6,25**(cm). Le demi-périmètre du triangle **(ABC)** est égal à 12 cm ((6 + 8 + 10) ×0,5 = 24 × 0,5 = 12). On sait que le point **M** appartient au côté **[BC]**, donc on a : $x \leq 10$, ce qu'on peut écrire : – 0,4$x \geq$ – 4, soit : 12 ≥ 16 – 0,4x, ce qui établit que **12 ≥ p(x)**. (*Il y a d'autres techniques, à chercher*).

3. M milieu de **[BC]** signifie que $x = 5$, dans ce cas, on a : aire (rectangle **(APMQ)**) = **MP** × **QM** = 0,6 × 5 × (8 – 0,8 × 5) = … = 12(cm²). En fonction de x, l'aire du rectangle **(APMQ)** est égale à : 0,6x × (8 – 0,8x) = **4,8x – 0,48x²**. On calcule ensuite **a**(x) – 12, on a :
a(x) – 12 = $4{,}8x - 0{,}48x^2 - 12 = -0{,}48 \times (x^2 - 10 + 25) = -0{,}48 \times (x-5)^2$. Ouf ! ! !
On termine en beauté. $-0{,}48 \times (x-5)^2 \leq 0$, c'est-à-dire **a**($x$) – 12 ≤ 0 donc **a(x) ≤ 12**.
L'aire du rectangle est donc inférieure ou égale à 12, on peut même donner la valeur minimale qui est atteinte lorsque le point **M** est le milieu du côté **[BC]**
(Voir début de la question **3.**).

EXERCICE 18

Le triangle **CDM** est rectangle en **D** donc son aire est, en cm², $A_1 = \frac{\mathbf{DM \times DC}}{\mathbf{2}}$ donc $A_1 = 3{,}5x$

L'aire A_2 du quadrilatère **ABCM** est égale à l'aire du trapèze **ABCD** moins l'aire du triangle **CDM**.

L'aire du trapèze **ABCD** est, en cm², $\frac{\mathbf{(AB + DC) \times AD}}{\mathbf{2}} = 22$ d'où $A_2 = 22 - 3{,}5x$ (en cm²).

Chacune de ces aires est une fonction affine restreinte à l'intervalle [0 , 4] :

Les représentations sont donc des segments de droite, notées ($\mathbf{D_1}$)et ($\mathbf{D_2}$).
La droite ($\mathbf{D_1}$) passe par les points de coordonnées (0 ; 0) et (4 ; 14), tandis que la droite ($\mathbf{D_2}$) passe par les points de coordonnées (0 ; 22) et (4 ; 8).
(*Graphique non fait dans ce corrigé : respecter les unités demandées !*).

Graphiquement, on « voit » que les droites se coupent en un point de coordonnées : (x_0 , 11) avec x_0 = 3,2. Donc $\mathbf{A_1} = \mathbf{A_2}$ lorsque **M** est placé à x_0 cm du point **D**.
Par le calcul, on sait que les deux aires seront égales lorsque chacune vaudra la moitié de celle du trapèze, donc quand on aura $A_1 = 11$, ce qui donne $x_0 = \frac{22}{7}$.

EXERCICE 19

• Si la hauteur du liquide augmente dans le récipient, c'est que le volume de ce liquide augmente également, donc la fonction **V** est croissante sur tout l'intervalle [0 ; 5]. Les graphiques $\boxed{\mathbf{2}}$ et $\boxed{\mathbf{6}}$ ne peuvent pas convenir.

• Lorsque x est supérieur à 3, le récipient est un cylindre : son volume croît comme celui d'un cylindre, proportionnellement à sa hauteur. La fonction **V** est donc affine sur l'intervalle [3; 5]. Le graphique $\boxed{\mathbf{4}}$ n'est pas valable.

• Lorsque x vaut 3, le volume de liquide est égal au volume d'un cylindre de hauteur 3 et de base de diamètre 2, moins le volume du cône de même hauteur et de même base :

$\mathbf{V}(3) = \pi \times 1^2 \times 3 - \pi \times 1^2 \times \frac{3}{3} = 2\pi$. Le graphique $\boxed{\mathbf{5}}$ ne convient pas.

• Lorsque x est compris entre 0 et 3, le volume du récipient ne peut être proportionnel à sa hauteur car le volume d'un tronc de cône ne l'est pas (*proportionnel à la hauteur !*) alors que celui d'un cylindre l'est. La fonction **V** n'est donc pas linéaire sur [0 ; 3], sa représentation graphique n'est pas un segment de droite. On élimine aussi le graphique $\boxed{\mathbf{1}}$.

Le seul graphique qui peut représenter la fonction V est donc le graphique $\boxed{\mathbf{3}}$***. (****Avec une petite erreur d'échelle, et oui, si on « fait » des graphiques avec un traitement de textes pas fait pour ça, il est difficile de tout refaire !****)***