

**M2 Master Meefa**  
**UE 44 du semestre 4**  
**Les « nouveaux nombres » au cycle III**

Etude des PROGRAMMES et compléments  
Des questions d'enseignement  
Quelques tâches emblématiques  
Exercices de fin d'hiver et divers

# Les NOMBRES DECIMAUX, à partir du CM1 FRACTIONS et QUOTIENTS, du CM1 à la classe de SIXIEME

## Questions Initiales

- Donner les principales EVOLUTIONS en termes de « ruptures » et de « continuités » avec les NOMBRES ENTIERS quand on s'intéresse aux « nouveaux nombres » au cycle III ? Argumenter.
- Pour aller plus loin, du côté du collège : même question quand on s'intéresse aux « nouveaux nombres » du collège. Argumenter.
- Analyser les programmes 2008 et le SCCC, pilier 3.

## Pistes de réponses aux Questions Initiales (*Charnay*)

1. Des nombres entiers (*naturels*) aux nombres décimaux, à partir du CM1 :
  - renoncer à l'idée de nombres qui se suivent,
  - accepter l'intercalation "sans fin".
2. Passage aux "fractions quotients" :
  - accepter qu'un nombre ne s'exprime pas nécessairement par une suite finie ou déterminée de chiffres.
3. *Au Collège* ; passage aux négatifs :
  - renoncer au fait qu'un nombre exprime une quantité ou la mesure d'une grandeur.

Ecole Maternelle et Cycle II. Aucune connaissance sur les fractions et les nombres décimaux n'est exigée (*ni attendue, note de PW !*) à ces niveaux.

Cycle III. Du CE2 au CM2, dans les quatre domaines du programme, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à résoudre des problèmes. (...)

1. Nombres et Calcul. (...) 3. Le Calcul. (...)

2. Les Fractions et les Nombres décimaux.

- Fractions simples et décimales : écriture, encadrement entre deux entiers consécutifs, écriture comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, somme de deux fractions décimales ou de deux fractions de même dénominateur ;
- Nombres décimaux : désignation orales et écritures chiffrées, valeur des chiffres en fonction de leur position, passage d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire et inversement, comparaison et rangement, repérage sur une droite graduée ; valeur approchée d'un décimal à l'unité près, au dixième près, au centième près.

Autre ENTREE : du côté des COMPETENCES. Pilier 3.

(...) L'élève est capable de :

- écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (*jusqu'au centième*) et quelques fractions simples ;  
(...)
- utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux (*pour la division, le diviseur est un nombre entier*) ; (...)

### ***Quid de la résolution de problèmes ?***

Un petit retour en arrière : les programmes 2007.

Au cycle III, les élèves mettent en place une première maîtrise des fractions et des nombres décimaux : [...] Leur étude sera poursuivie au collège.

Les fractions et les nombres décimaux doivent d'abord apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre de façon satisfaisante : problèmes de partage, de mesure de longueur ou d'aire, de repérage d'un point sur une droite. Les fractions sont essentiellement introduites, au cycle III, pour donner du sens aux nombres décimaux.

La question fondamentale du PE : comment articuler l'étude de ces deux « thèmes » ou ces deux « notions » ?

- Du côté des programmes : quelles progressions ?
- Du côté des manuels.

### Pistes de réponse

Du côté des progressions, on trouve dans les programmes des indications rassemblées dans un tableau comme ci-dessous.

Nombre et Calcul	CE2	CM1	CM2
		<i>Fractions (...)</i>	<i>Fractions (...)</i>
		<i>Nombres Décimaux (...)</i>	<i>Nombres Décimaux (...)</i>
		<i>Effectuer un calcul posé. Problèmes. (...)</i>	<i>Effectuer un calcul posé. Problèmes. (...)</i>

Classiquement, les manuels proposent de s'intéresser aux fractions dites « *simples* », puis aux fractions décimales et enfin aux nombres décimaux, écrits sous la forme « usuelle ».

Question subsidiaire : qu'appelle-t-on fraction « *simple* » ?

Et les MATHÉMATIQUES dans tout ça ? Et oui, on doit y passer aussi. Un tout petit peu quand même !

L'extension des ensembles de nombres obéit à un problème **interne** au domaine numérique.

Exemple générique. Le problème générateur du nombre rationnel **2/3** est lié à la solution de l'équation  **$3 \times x = 2$** .

Question (pour plus tard) : construire géométriquement la fraction **2/3** à partir d'un segment donné.

Deuxième exemple générique. Le problème générateur du nombre décimal **3/10** est lié à la solution de l'équation  **$10 \times x = 3$** .

Enfin, du côté de l'HISTOIRE, survol (!), là aussi.

L'usage des Fractions remonte à l'Antiquité.

En ce qui concerne les Nombres Décimaux, ils ont émergé plutôt au Moyen Age et ont été imposé par la Révolution Française. Ils ont permis d'approcher la mesure des quantités irrationnelles ou rationnelles apparaissant dans des constructions géométriques.

Indispensable : analyse d'un manuel.  
Coup de chance, **PM** et **PW** l'ont fait, yes !

Manuel de la classe de CM1, collection EURO MATH, publié  
aux éditions Hatier, 2006.

PERIODES 4 et 5 du manuel (paru donc en 2006).

1. Fractions au quotidien. Partage d'une tablette de chocolat, exercices avec un cadran d'horloge, apparition des tartes (ou des pizzas, *aie* !), détermination de la moitié de ..., du quart de ..., des trois quarts de ...
2. Fractions et partages de longueurs (*Oui, des longueurs : apparition d'une bande unité **u***).
3. Fractions : la machine à partager les segments (*The **KEY** : le partageur universel ou le « fractionneur universel »*).
4. Fractions et graduations.
5. Fractions et partage d'aires.

6. Encadrer des fractions par des entiers.
7. Fractions décimales (« *l'effet-loupe* »).
8. Fractions décimales et addition.
9. Fractions décimales et nombres décimaux.
10. Comparer des nombres décimaux.
11. Nombres décimaux et mesure des longueurs.
12. Addition et soustraction des nombres décimaux : vers la technique.
13. Nombres décimaux au quotidien.

L'idée de **FRACTION** vient de la nécessité de couper, de partager, de « fractionner » une ou des entités, des « unités », en parts égales.

(...) Pour les égyptiens, les fractions sont des nombres « **rompus** », mais pas n'importe comment : on coupe l'unité en deux, puis en deux, puis en deux, *and so on* ... (On définit ainsi la **dichotomie** : qui est en quelque sorte « l'opération » contraire à la **duplication**). On travaille donc (*et surtout*) avec les fractions de la forme  $1/2^n$ .

Apparaissent ensuite d'autres fractions comme  $2/3$  ou  $5/7$  ou quelques (*rare*s) autres fractions... Le **dénominateur** indique ainsi en combien de parts on partage l'entité ou l'unité et le **numérateur** indique le nombre de fois que l'on prend cette **fraction de l'unité** : on peut ainsi écrire les égalités suivantes :

$$5/7 = 1/7 + 1/7 + 1/7 + 1/7 + 1/7 = 5 \times 1/7.$$

«  $5/7$  » est ainsi lu comme « cinq septièmes », entendu comme « cinq fois un septième ».

*D'après Nicolas Rouche, « sur un chemin d'abstraction croissante, on peut **couper** en parts égales des objets quotidiens, des objets standards (bâtonnets, boules de plasticine, figures cartonnées, ...), des représentations symbolisant les objets (segments, rectangles) et enfin des mesures (qui sont des nombres) ».*

Un principe pédagogique. **Aucune de ces étapes ne doit être précipitée, ni abandonnée complètement, sous prétexte qu'on passe à la suivante.**

Enfin, les partages des objets en 2, 3 ou 4 parts « égales » (selon une de leur grandeur : longueur, aire, angle, durée, capacité, ...) sont des tâches plus ou moins faciles suivant la forme des objets. (*Voir diapositives précédentes*).

The idoine instrument : le « guide-âne » ou le partageur universel (= *réseau de parallèles équidistantes*).

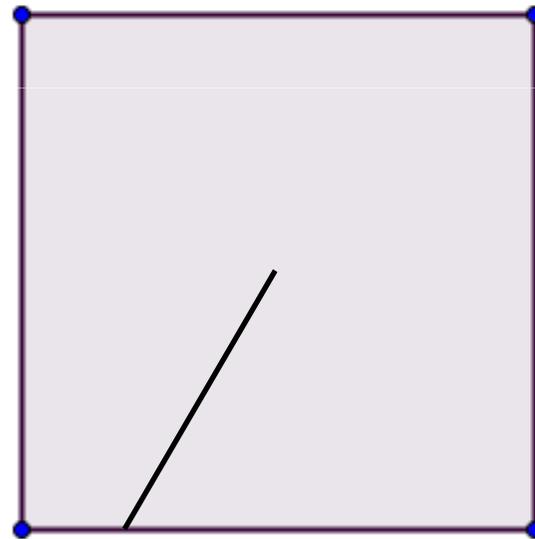
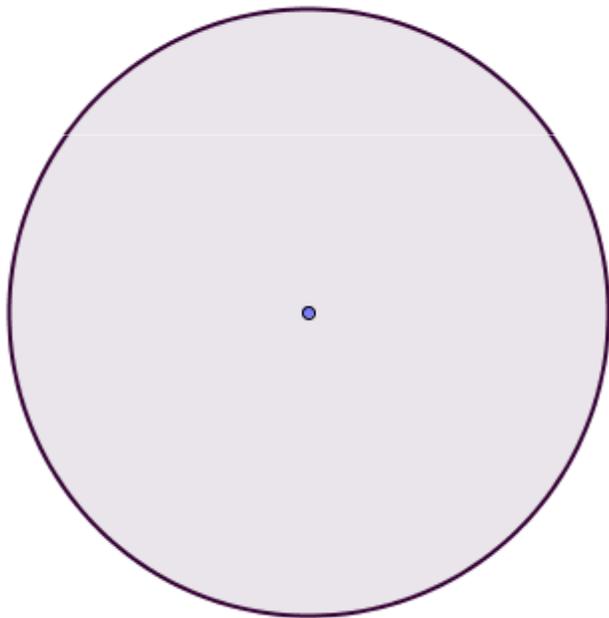
Nicolas ROUCHE : « **Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?** » chez Ellipses.

*A se procurer , sans attendre !*

C'est parti pour des exercices : voir diapositives suivantes

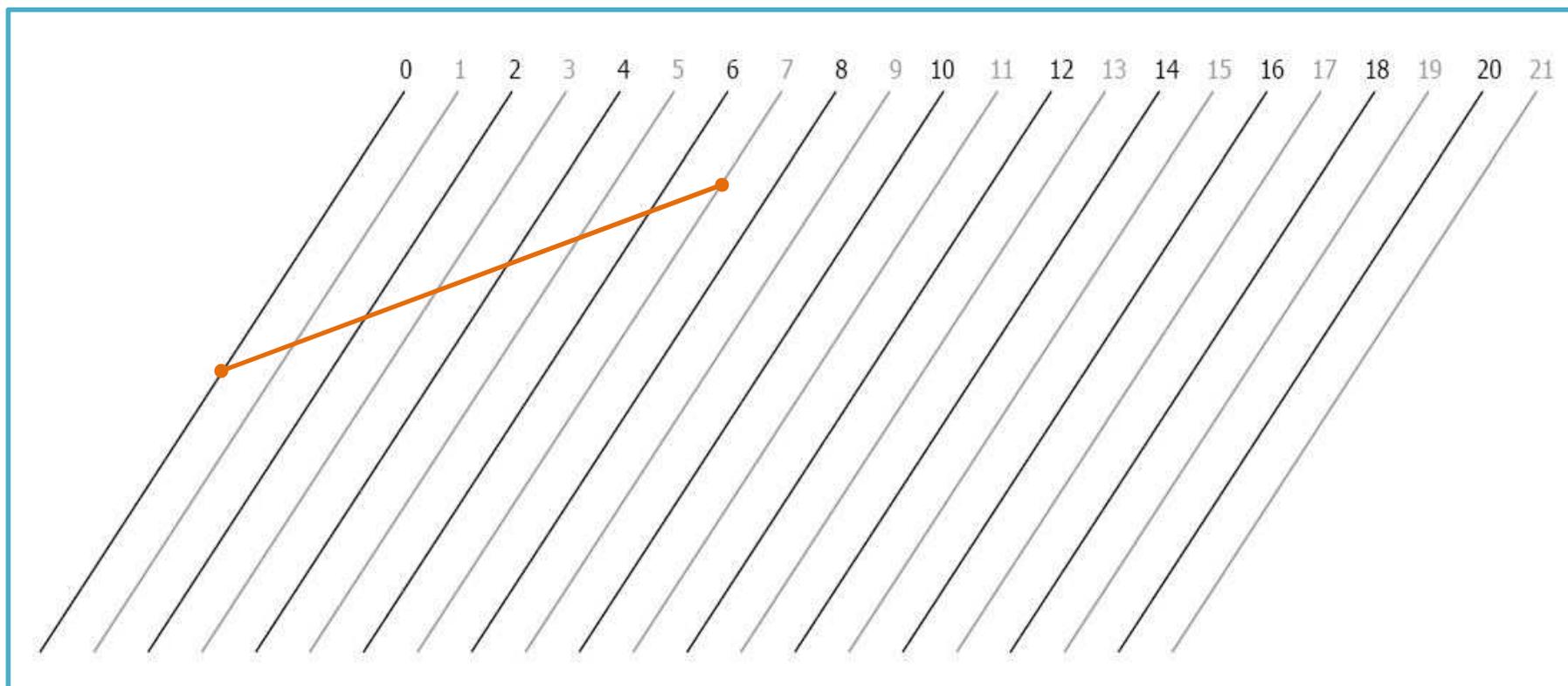
On s'amuse pour commencer : partager ces deux tartes ou pizzas en trois parts égales.

Zut, pour la tarte carrée, Paul a mis un malencontreux coup de couteau à partir du « centre ». Tant pis, il faut quand même réaliser le partage demandé.  
*Matériel : règle graduée et compas, stop !*



On va plus loin : vive le guide-âne !

Manipulation du guide-âne. On dispose du segment **[AB]** qu'on veut partager en sept segments de même longueur et d'un « guide-âne ». Algorithme. Poser la droite **(0)** sur une extrémité, « rotationner » le guide-âne jusqu'à ce que l'autre extrémité soit portée par la droite **(7)**. MARQUER les points d'intersection, puis COMPTER.



Travaux annexes : les exercices du Groupe de Production IREM  
Orléans-Tours – IUFM Centre Val de Loire. (Coordonateur : **PW**)  
Photocopies distribuées en **TD**.

### Un premier BILAN sur cette partie

*Pour que les élèves aient une bonne représentation des **fractions** (et aussi des **nombre décimaux**, voir partie suivante) on doit, à l'école puis au collège, dans le cadre des programmes (2008, tout autant que les « précédents » !)*

- S'appuyer sur les grandeurs et leurs mesures.
- Varier le registre de travail, et, en particulier, favoriser le « repérage » d'une fraction ou d'un nombre décimal par rapport à d'autres nombres.
- Ne pas focaliser tout l'enseignement sur les fractions inférieures à l'unité.
- Donner un moyen d'établir et de consolider les procédures ou les techniques de calcul. Chercher aussi à justifier et à légitimer ces techniques. (*Commentaires*).

On s'intéresse maintenant aux **NOMBRES DECIMAUX**  
*Pour ceux qui suivent encore, on avait déjà commencé !*

Quelques questions d'enseignement qui se posent à tout **PE**.

1. DEFINITION ? On en donne UNE, oui ? Non ? Laquelle ?
2. Multiplication par 10, 100, 1000, ...
3. Opérations, dont la multiplication. Sens et techniques.
4. Du côté de l'ordre : comparer, ranger, intercaler, générer, ...
5. Nombres décimaux et « moyens » de calcul : Calcul Mental, Calcul Posé, Calcul Instrumenté...
6. Du côté des problèmes... Divers : ouverture vers le collège.

Comme pour le paragraphe précédent, recensement d'un manuel, effectué par **PM** et **PW**. Sympa !

Celui de la classe de CM2, collection EURO MATH, chez Hatier.  
*PERIODES 1 à 5 du manuel (paru en 2009).*

<b>P1</b>	<p>(Un retour sur les FRACTIONS : fraction au quotidien, partages de longueurs, partages et grandeurs).</p> <p>Encadrer une fraction par des entiers, fractions décimales.</p> <p>Fractions et nombres décimaux.</p>
<b>P2</b>	<p>Addition et Soustraction de nombres entiers et décimaux.</p> <p>Soustraction de nombres décimaux : technique. <i>Utiliser une calculatrice (1).</i></p> <p>Comparer des nombres décimaux. <i>Utiliser une calculatrice (2).</i></p>
<b>P3</b>	<p>Multiplication d'un nombre décimal par 10 ou par 100 ou par 1000. Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. (<i>Proportionnalité (1)</i>). Nombres décimaux et mesure de longueurs.</p> <p>Décimaux et Fractions.</p>
<b>P4</b>	<p>Division avec quotient décimal. Multiplication d'un décimal par un entier. (<i>Proportionnalité (2)</i>). <i>Calcul Automatisé, Calcul Réfléchi : les quatre opérations</i>).</p> <p>Nombres décimaux et mesure d'aires, idem avec mesure de contenances. <i>Utiliser la calculatrice (3)</i>. Décimaux et Fractions.</p>
<b>P5</b>	<p>(<i>Les différents quotients : entier ou décimal, exact ou approché</i>).</p> <p>Produit de dixièmes par des dixièmes.</p> <p>Produit de deux nombres décimaux. (...)</p>

(1) La ou une définition ? DEBAT.  
Quatre entrées : lesquelles ? *Commentaires.*

(2) Multiplication par 10, 100, 1000, ... Division par 10, 100, 1000. Quelle(s) technique(s) ?  
Eléments de justification. (*Cap Math*)

Calculer « à la main » le produit  $\mathbf{P} = 17,805 \times 10$

- 17,805 c'est : « 1 dizaine 7 unités 8 dixièmes et 5 millièmes ». (*Décomposition canonique*)
- Si on prend « 10 fois ce nombre », on obtient « 10 fois plus », c'est à dire :  $\mathbf{P} = 17,805 \times 10 =$  « 10 dizaines 70 unités 80 dixièmes et 50 millièmes ». (« 10 fois plus » = *Proportionnalité en acte*)
- Par « la règle d'échange du 10 contre 1 », on en déduit que :  $\mathbf{P} = 17,805 \times 10 =$  « 1 centaine 7 dizaines 8 unités et 5 centièmes ». On retranscrit dans la forme usuelle.
- Soit :  $\mathbf{P} = 17,805 \times 10 = 178,05$ . Conclusion : rédiger une règle d'action de la multiplication (*sans déplacement de virgule !*)  
Extension pour la division. Fait à la main pendant l'animation.

On peut aussi mobiliser l'addition réitérée ou répétée, pour contrôler le calcul : cette technique a ainsi un autre statut.

Pour aller plus loin. Calculer le produit  $\mathbf{W} = 21,38 \times 1000$ .

Une piste : passer par la définition du nombre décimal liée à la notion de quotient.

On peut ainsi développer le calcul.

On a :  $\mathbf{W} = 21,38 \times 1000 = 21,38 \times (100 \times 10) = (21,38 \times 100) \times 10 = 2138$  (*passage par le nombre entier lié à la définition d'un décimal*)  $\times 10$  (*reprise de la technique des années précédentes, avec des nombres entiers*) = 21 380.

Du côté des **opérations** : point sensible !

Une piste, plutôt du côté des « remédiations ». Dans beaucoup (*tous ?*) les cas, on peut se ramener à des opérations avec des FRACTIONS DECIMALES, en prenant en compte les aspects liés à la NUMERATION.

Un exemple. Calculer la différence  $\mathbf{D} = 31,42 - 19,07$ .

- Technique usuelle : Calcul Posé en colonnes, oui, mais, c'est pas facile ! En plus, il y a tout ce qu'il faut : un « zéro » mal placé (*il est toujours mal placé !*) et des retenues. Donc, bonjour !
- Passer par les fractions décimales et la numération :  
 $31,42 = 3142/100$  et  $19,07 = 1907/100$ , d'où  $\mathbf{D} = 3142/100 - 1907/100 = (\text{deux directions}) = (3142 - 1907)/100$  ou  $3142 \times 1/100 - 1907 \times 1/100 = (3142 - 1907) \times 1/100 = \dots (\text{terminer le calcul}) = 12,35$ .
- PW prend des risques : utiliser la calculatrice ! Après avoir fait tout un travail lié aux ordres de grandeur. *Par exemple* :  $\mathbf{D} \approx 31,4 - 19,1 \approx 31 - 19 \approx 32 - 20$  (Technique dite du *décalage* (F. Boule)  $\approx 12$ ).

Multiplication des Nombres Décimaux : **Continuités** et **Ruptures** avec la multiplication des Nombres Entiers.

La question qui « tue ». Depuis plusieurs programmes : avant 1985, 1996, 2002, 2007 et maintenant 2008, la multiplication de deux nombres décimaux fait visiblement une sorte de « yoyo » entre le Primaire et le Collège.

Why et Hypothèses ?

Quel est le problème du **PE** ? Débat.

- Propositions de réponses liées à la technique,
- Domaines des Mathématiques sur lesquels on peut « légitimer » cette multiplication ?
- Prolongement : et la division ? Il y a du pain sur la planche !

*Dernier point.*

Quelques erreurs habituelles relevées dans l'usage des nombres décimaux par les élèves, quel traitement ?

*(Brochure n°61 de l'APMEP, 1986 !)*

**E1.** On rencontre des égalités du type :  $2,3 \times 4,9 = 8,27$  ou  $17,3 + 21,8 = 38,11$ .

**E2.** Le nombre 3,2 est inférieur au nombre 3,135.

**E3.** Intercaler un nombre entre 12,34 et 12,35. Il n'y en a pas.

**E4.** Les écritures 41,45 et 41,450 désignent des nombres différents.

**E5.** A la question : « *Lorsqu'on multiplie un nombre par un autre, le résultat est toujours plus grand ?* », beaucoup d'élèves répondent par l'affirmative. Du coup, la division « *rapetisse* » !

**TRAITEMENT** : on n'a pas donné des pistes tout au long de ce diaporama ? Au travail !

Il manque notre petit sujet d'oral. Pour les fractions et les nombres décimaux, on a le choix !!!

## Deux propositions

➤ S1. Domaine : Numération ; les nombres décimaux et les fractions. Connaissance ou compétence visée : Utiliser des fractions simples dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs. Niveau : CM1 du cycle III. Travail demandé : idem les sujets déjà traités.

Note de **PM** et de **PW** : *on peut laisser momentanément ce sujet de côté, il aura une pertinence plus grande lorsqu'on aura traité du thème des Grandeurs et des Mesures.*

➤ S2. Domaine : Numération ; les nombres décimaux et les fractions. Connaissance ou compétence visée : Savoir comparer et ranger des nombres décimaux. Niveau : CM1 du cycle III. Travail demandé : idem les sujets déjà traités.

## Quelques pistes à explorer

### 1. Des ANALYSES

Le sujet S2 se réfère à deux types de tâches : **COMPARER** (*deux nombres décimaux*) et **RANGER** (*par ordre choisi, une liste de nombres décimaux*). Voir les sujets corrigés précédents pour « l'étude » de ces deux verbes. Ne pas oublier de « regarder » les programmes, évidemment !

On est au CM1 : quel format d'écriture peut-on exploiter ?

Quelle « taille » de nombres choisir (*Combien de chiffres pour la partie entière et combien pour la partie décimale ?*).

Quels pré-requis : liens avec la comparaison et le rangement des nombres entiers ; connaître les différents formats d'écriture des décimaux ; savoir marquer ou placer un nombre décimal en tant qu'abscisse sur une droite graduée ; ...

Quelles difficultés pour le **PE** ? Quelles difficultés et obstacles pour l'élève ? Quel dispositif de travail dans la classe, pour quels objectifs, donc à définir (!) ?

## 2. Des ACTIVITES

Se reporter aux manuels. Spécifier la tâche et les objectifs associés. *Un exemple ci-dessous, extrait du Hatier Concours.*

CONSIGNES (résumées) :

- (i) Entourer le plus grand des deux nombres
- (ii) S'ils sont égaux, souligner les deux
- (iii) « Expliquer » dans la colonne de droite

3,12	5,2	
2,4	2,8	
12,4	12,40	
5,37	4,37	
12,3	12,6	
13,01	12,99	
5,3	5,25	

### 3. Tâches du PE

Quelles variables de situation, ou variables didactiques : observer comment les deux nombres ont été choisis et argumenter sur ces choix, c'est-à-dire, commencer à expliciter les techniques de comparaison ? S'interroger sur le matériel mis à disposition ?

D'où : un inventaire des procédures de comparaison, les justifications correctes et les explications « fausses ».

Prévoir une correction suivie d'une institutionnalisation : quelles techniques privilégier et pourquoi ?

Prévoir une phase dite de « consolidation », des prolongements et une évaluation (*don't forget !*).

Préparer l'entretien, en particulier, faire en sorte que le jury pose des questions sur un ou des points volontairement laissés de côté pendant la présentation.

IDEM pour le RANGEMENT, sans être obligé de présenter l'activité, mais avoir quand même « quelque chose » sous le coude !