

ESPE, M2, Master Meefa « transitoire »  
et Master Meef

NUMERATION : du cycle I au cycle III

OPERATIONS

Exercices et COMPLEMENTS DISCIPLINAIRES

EVALUATION(S) ~~et ORAL du CRPE : étude d'un  
exemple, autres choix possibles~~

Quelques QUESTIONS récurrentes, non immédiates !

Une friandise pour démarrer ! ANATOLE et sa vieille guimbarde.

Anatole et sa vieille guimbarde (*âgée de plus de huit ans : plus de prime à la casse !*) « **PIM, PAM, POUM** ».

La voiture d'Anatole possède un (*très*) vieux compteur kilométrique qui marque uniquement des nombres à trois chiffres. Ce compteur fait des bruits bizarres à chaque kilomètre parcouru, c'est à dire, chaque fois qu'un chiffre apparaît sur le compteur.

- Il fait **PIM** à chaque changement du chiffre de droite.
- Il fait **PAM** à chaque changement de chiffre du milieu.
- Il fait **POUM** à chaque changement du chiffre de gauche.

Anatole va faire une promenade en guimbarde et met son compteur à zéro au départ. A son retour, son compteur indique **247km**.

**Question : combien de bruits Anatole a-t-il entendu pendant sa promenade ? Proposer un prolongement. (328, 742)**

Un (*deuxième*) exercice collectif : du côté des difficultés d'apprentissages, d'où des questions sur l'enseignement.

NUMERATION : les difficultés suscitées par son apprentissage.

Extraits d'une recherche menée par deux collègues québécoises, N. BEDNARZ et B. JANVIER (Revue Grand N n°33, novembre 1984 : article toujours d'actualité).

Description de l'item expérimenté auprès d'élèves de 8 à 10 ans (protocole d'interview et d'entretien).

*« Regarde, j'ai deux nombres »*

Sur la feuille présentée au même moment à l'élève est écrit :

**402**

**?**

**513**

*« Je pense dans ma tête à un nombre qui est plus grand que celui-ci (nous montrons 402) et plus petit que celui-là (nous montrons 513), un nombre qui est entre les deux. Tu dois essayer de trouver le nombre que j'ai dans ma tête, mais pour cela tu dois te servir des étiquettes ».*

Les vingt étiquettes suivantes sont étalées sur la table devant l'enfant, toutes mélangées :

➤ 0 UNITÉ 1 UNITÉ 2 UNITÉS 3 UNITÉS 4 UNITÉS 5 UNITÉS

➤ 10 UNITÉS 11 UNITÉS 12 UNITÉS

➤ 3 DIZAINES 4 DIZAINES 5 DIZAINES

40 DIZAINES 41 DIZAINES 42 DIZAINES 43 DIZAINES 45 DIZAINES ET 51 DIZAINES

➤ 3 CENTAINES 5 CENTAINES

*« Pour me demander un nombre, tu dois d'abord le faire avec des étiquettes. Je te dirai alors si le nombre auquel je pense est plus grand ou plus petit que le nombre que tu as fait. Tu recommenceras ainsi, jusqu'à tant que tu le trouves. N'oublie pas : mon nombre est plus grand que celui-ci (nous montrons 402) et plus petit que celui-là (nous montrons 513) ».*

L'interviewer a en tête le nombre **445**.

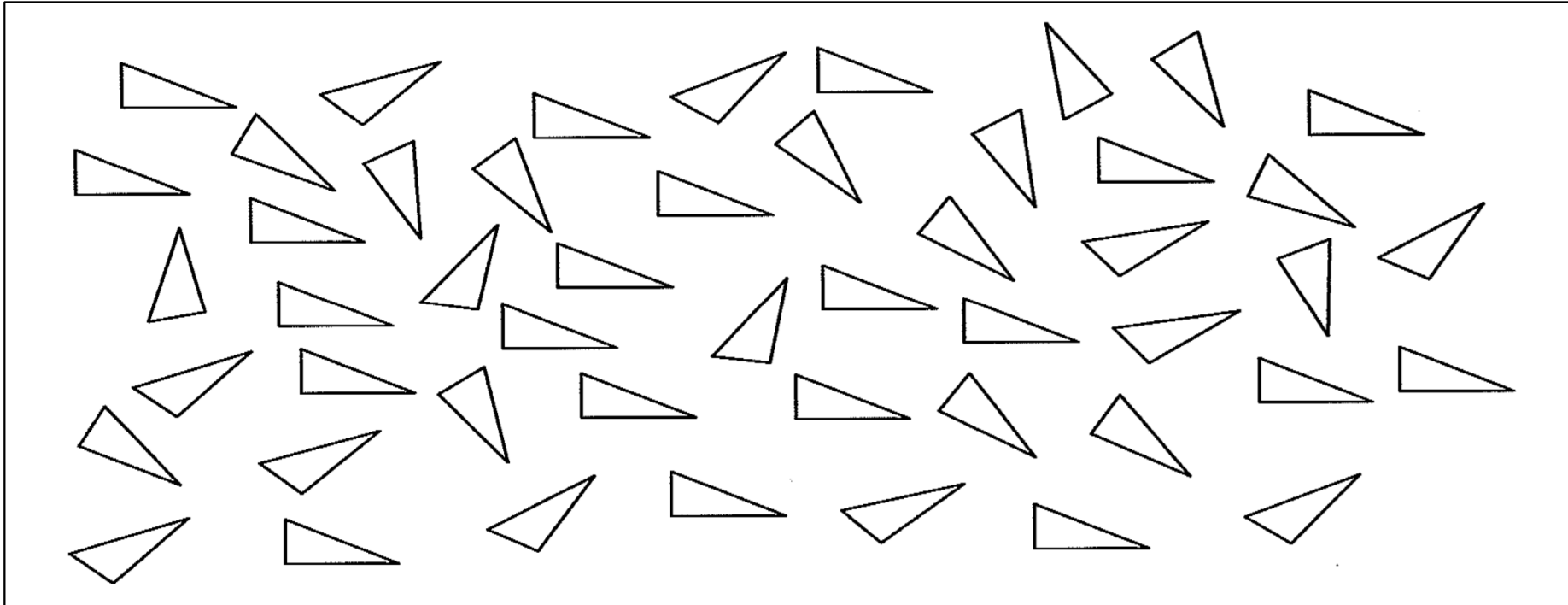
Bilan : un peu plus de 42% des élèves qui ont été soumis à ce test échouent. On peut faire l'hypothèse que cette information est stable même aujourd'hui.

### Les questions

- Donner cinq bonnes réponses à l'exercice. Débat.
- Citer une erreur significative. Hypothèses ?
- Quelle compétence est « travaillée » (*mal dit*) par cet exercice ?
- Avec les mêmes étiquettes, inventer une question (*autre qu'un nombre à deviner*) qui « travaille » (*mal dit, bis*) sur la même compétence et qui permette de faire « émerger » des erreurs.

Un petit tour du côté des évaluations institutionnelles :  
EVALUATION en CE1.

Evaluation CE1, (2007 et 2008), Exercice 6, item 69  
Consigne : « Trouve le nombre total de triangles »



Taux national de réussite, sur un échantillon  $\approx 63$  %. Avec une remarque non anodine : le recours systématique aux « paquets » de 10 n'est pas naturel, ni « automatique ». Hypothèses ?

Il y a ? triangles

A partir de la diapositive précédente : « *Il y a 49 triangles* ». On s'intéresse donc au NOMBRE 49.

QUESTION : que doit savoir un élève sur ce nombre ?

- + RECITER la file des nombres au moins jusqu'à 49, à partir de n'importe quel nombre inférieur ou égal à 48.
- + SITUER 49 par rapport aux autres nombres déjà connus.
- + PASSER de l'écriture chiffrée « 49 » à l'écriture littérale et inversement.
- + DENOMBRER des collections de 49 objets manipulés ou dessinés, ces objets pouvant être pré-regroupés ou pas par dix.
- + CONSTRUIRE ou REALISER une collection de cardinal 49.
- + REPRESENTER le nombre 49 à l'aide de toute sorte de matériels de numération (*bûchettes – élastiques, cubes emboîtables, bouliers, boîtes à dix, jetons, compteurs, abaqués, ...*). (...)

- ✚ (suite, ...)
- ✚ REPRESENTER 49 euros ou 49 centimes avec de la monnaie (*fausse quand même !*).
- ✚ ASSOCIER 49 à sa décomposition canonique. ASSOCIER 49 à d'autres décompositions.
- ✚ « OPERER » avec 49 : investir le territoire du CALCUL avec ce nombre et d'autres.
- ✚ S'INTERESSER à 49 comme porteur de propriétés intrinsèques : est-ce un DOUBLE, de quel(s) autre(s) NOMBRE(S) « sympathique(s) » est-il proche, (est-il dans une table de multiplication « sympathique »), comment le retrouver à l'aide d'autres nombres toujours aussi « sympathiques », (...).

Que voilà un beau et très long programme d'enseignement !  
En effet, il y en a vraiment pour longtemps.



COMPLEMENTS THEORIQUES sur la NUMERATION :  
l'essentiel et l'incontournable !

DONNER du SENS au CONCEPT de NOMBRE : les dimensions ordinales et cardinales.

- L'aspect cardinal permet de répondre à la question : COMBIEN ? On cherche à quantifier une collection par un nombre.
- L'aspect ordinal permet de répondre à la question : quel RANG ? On cherche à repérer un « objet » dans une file.
- Doit-on « séparer » ou non ces deux aspects ? Question cruciale pour le PE ! Ce n'est pas facile !

Une situation dite de référence permettant aux élèves de construire le NOMBRE en tant que mémoire d'un RANG (*dimension ordinale*).

Exercice : situation à chercher dans les manuels ou fichiers.

Un premier bilan. Que doit-on enseigner ?

1. Aspect dit « algorithmique ».
2. Aspect lié aux « groupements » ou aux « paquets ».
3. Aspect lié aux « échanges ».
4. (Aspect purement « opératoire »).

## **Aspect dit « algorithmique »**

Quelques principes ou axiomes, d'après les programmes 2002.

« *Rien ne justifie une étude des nombres un par un* ».

« *Les premières situations doivent d'emblée se situer dans un domaine relativement étendu* ».

« *On acceptera donc de travailler avec des nombres que l'enfant ne sait pas encore lire* ».

Type de tâches à explorer et compétences à construire :

1. Produire et faire produire des suites orales ou écrites.
2. Comparer des nombres, ranger des nombres.
3. Ecrire des encadrements.
4. Situer des nombres sur un axe gradué (*précisément ou approximativement*).

Travail du PE : produire quelques activités emblématiques dans le cadre d'un stage spécifique ou ...

Un exemple. Des propriétés liées à la NUMERATION au service des OPERATIONS : le cas de la division.

Il ne s'agit pas de livrer ici une activité « clef en mains », mais de regarder en quoi certaines connaissances des nombres peuvent permettre de rentrer dans la problématique de la division (euclidienne).

(A partir du **CE2**). Tâches listées par un « programme » :

1. Construire un axe gradué de 7 en 7 (*en partant d'où on veut*).
2. Choisir un nombre entier (exemple : 59).
3. Placer alors ce nombre « *comme il faut* » sur l'axe gradué .
4. Ecrire des encadrements qui expriment le fait que ce nombre est compris entre deux multiples consécutifs de 7 (exemple :  $56 \leq 59 < 63$  ou  $7 \times 8 \leq 53 < 7 \times 9$ ).
5. Déterminer la valeur des écarts entre ces deux multiples successifs, « en plus » et « en moins » et produire deux égalités (exemple :  $59 = (7 \times 8) + 3$  et  $59 = (7 \times 9) - 4$ ).

On a ainsi mis en évidence une écriture d'une division euclidienne :

$$59 = (7 \times 8) + 3$$

## **Aspect « groupements » ou « paquets »**

Type de tâches et compétences à développer :

1. Structurer des collections où l'idée de « *mettre en paquets* », où regrouper est nécessaire, voire essentielle pour dénombrer.
2. Donner du sens aux notions de « *chiffre des* » et « *nombre de* ». DIFFICILE !
3. Faciliter l'accès aux décompositions variées par rapport à la base 10.
4. Donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000.
5. Retrouver rapidement l'écriture chiffrée d'un nombre à partir de sa décomposition canonique, mais aussi à partir de toute autre décomposition (*indépendamment du « mode » ou des « formats » d'écriture*).

Une activité emblématique : « les Fourmillions » d'ERMEL

## Aspect « échanges »

Type de tâches et compétences à développer.

1. (*Redoutable !*) Etablir, voire « démontrer », qu'une unité de rang  $n$  vaut dix unités de rang  $(n - 1)$ .
2. Donner du sens au rôle de chaque chiffre dans le nombre (*écrit*).
3. Dissocier « valeur » et « quantité ».
4. Réinvestir la règle de l'échange du « dix contre un » et du « un contre dix » dans les techniques opératoires et dans la conceptualisation de nouveaux nombres. (*Nombres décimaux, en particulier*).

Une activité emblématique : « (tout) Jeu de la Marchande »  
ou « (tout) Jeu du Banquier ».

## Aspect « opératoire »

Indispensable, mais aurons-nous le temps ??? Oui, un petit peu,  
Cf. quelques diapositives suivantes...

Avertissement : le « sujet » ci-dessous n'est pas à proprement parler un sujet d'oral, mais les compétences à développer chez les élèves concernant la « connaissance » des nombres jusqu'à 100 est assez peu étudiée. *Voilà une belle occasion !*

DOMAINE : ~~nombres et calcul.~~

CONNAISSANCE ou COMPÉTENCE VISEE : ~~connaître les nombres jusqu'à 100. (Et plus, si affinités, note de PW).~~

NIVEAU : ~~fin de CP, cycle II.~~

DOCUMENTATION AUTORISEE : ~~bibliothèque du concours. (Note de PW : à ce propos, quelle bibliographie ?).~~

TRAVAIL DEMANDE : ~~présenter une séquence d'enseignement visant la compétence ci-dessus. Le candidat situera cette séquence dans une progression générale sur l'étude des nombres au cycle II. Il présentera de manière argumentée les éléments suivants : ♥ les « liens » avec toutes les formes de calcul, ♥ les prérequis considérés comme nécessaires et les difficultés prévisibles, ♥ les supports pédagogiques retenus, ♥ les éléments de synthèse et les traces écrites attendues ...~~

Une piste : la classification ERMEL sur les nombres.

**Les nombres « VISUALISABLES »** : jusqu'à 4 ou 5 et même jusqu'à 10. Pour répondre à des tâches mobilisant ces nombres, les procédures viables sont liées à ce qu'on appelle le « comptage mental » : surcomptage, recomptage et décomptage.

**Les nombre « FAMILIERS »** : supérieurs à 10, jusqu'à 20 ou 30. C'est avec ces nombres qu'on rentre véritablement dans le **calcul**, sous toutes ses formes.

**Les nombres « FREQUENTES »** : supérieurs à 30, jusqu'à 100, environ. Avec ces nombres, on peut insister sur les régularités du système décimal, mais toutes les compétences ne peuvent être travaillées. Pourquoi ?

**Les « GRANDS NOMBRES »** : à partir de 100 (...) L'écrit trouve toute son importance, en plus du travail sur les règles d'échanges et sur les techniques de groupement. On peut ajouter que ce qualificatif de « grands nombres » évolue au cours du primaire et joue des tours aux élèves dès qu'on aborde de nouveaux nombres : les « fractions » et les décimaux. En effet, plus un nombre entier possède de chiffres, plus il est « grand ». Patatras avec les nouveaux nombres !



DOMAINE : nombres et calcul. L'addition. (*Un sujet « zéro » du MEN*).

CONNAISSANCE ou COMPETENCE VISEE : connaître et utiliser une technique opératoire de l'addition.

NIVEAU : CP, cycle II.

DOCUMENTATION AUTORISEE : bibliothèque du concours.

TRAVAIL DEMANDE : présenter une séquence d'enseignement visant la compétence ci-dessus. Le candidat situera cette séquence dans une progression générale sur l'étude de l'addition. Il présentera de manière argumentée les éléments suivants : ♥ la technique opératoire choisie, ♥ les prérequis considérés comme nécessaires, ♥ les supports pédagogiques retenus, ♥ les éléments de synthèse et les traces écrites attendues, ♥ une évaluation pistant la compétence étudiée.

Lors de l'ENTRETIEN, à l'issue de l'exposé, les questions du jury porteront sur l'exposé du candidat et sur la progression de l'enseignement des Mathématiques à l'école primaire.

Elles pourront aussi concerner :

les difficultés et obstacles prévisibles dans l'apprentissage, les modalités possibles de différenciation et les compétences du SCCC principalement concernées au palier 1.

Pistes de correction, à retravailler en se « forçant » à mettre en forme et à rédiger correctement les réponses !

QUESTIONS posées « en vrac » pendant le **TD**

➤ Doit-on simultanément aborder les additions posées avec retenues en même temps que celles sans retenues ?

*Excellente question, dicit **PW** !*

On élève le niveau de la question : « PEDAGOGIE vs DIDACTIQUE ».

Un principe : *pour poser une opération, il faut que celle-ci vaille la peine d'être posée.* Voilà. En effet, il est tout aussi inutile de poser  $25 + 8$  ou  $55 + 18$  que de poser  $7625 + 8$  ou  $485 + 18$ . Pourquoi ?

On doit s'interroger sur les différents « moyens » d'aborder un CALCUL, à mettre en rapport avec les deux modes de fonctionnement cognitifs permettant de répondre à la tâche : effectuer une ADDITION. (Se reporter au **TD** consacré au CALCUL).

D'où une réponse plutôt positive à la question : les opérations mobilisant les retenues sont plus « complexes », à la fois techniquement et intellectuellement à traiter : à « traiter » le plus tôt possible et simultanément avec les additions sans retenue .

Deux questions relativement à la technique opératoire.

➤ « Technique Opératoire » renvoie-t-il automatiquement à « CALCUL POSE » ?

En consultant quelques ouvrages traitant de ces questions pour la préparation de l'oral, les réponses sont différentes. En fait, le problème est plus complexe que cette question de synonymie d'expressions.

**PW** penche pour la synonymie. *Pourquoi ?* Expressions à étudier : « Techniques Opératoires » et « Calcul Posé » vs autres moyens de calcul : « Calcul Mental », « Calcul Instrumenté », ... Réponses explicitées et illustrées à l'oral.

Un principe pédagogique (**GLP** et **PW**) : on enseigne une technique et on s'y tient ! D'où une question corollaire (*ci-dessous*). Une technique, certes ; et donc par définition, elle doit obligatoirement être **contrôlée**.

➤ Question corollaire. Quelle(s) contrôle(s) de la technique opératoire ? On doit « automatiquement » basculer dans le calcul réfléchi ou le calcul raisonné. *Exemple pendant le **TD***.

Autre question, puisqu'on y est !

➤ *Doit-on ou plutôt comment se « débarrasser » du « surcomptage » ? Excellente question, bis, dixit **PW** !*

Une hypothèse forte : « le COMPTAGE « tue » le CALCUL ».  
Zut, moi qui pensais le contraire !

Plus on compte ; *corollaire*, plus on surcompte, ou plus on décompte, moins le CALCUL, automatisé ou réfléchi, devient un OUTIL « intelligent ».

*Voir la classification d'ERMEL, diapositive n°?*

~~Une fois ces questions étudiées, on peut rentrer dans un « corrigé type ».~~

~~L'essentiel des pistes proposées ci-dessous converge(nt) avec le corrigé du Hachette.~~

## ~~Éléments d'analyse du sujet, suite aux questions~~

Une hypothèse : le CALCUL REFLECHI doit occuper la place « centrale » dans l'enseignement.

Le CALCUL REFLECHI est associé, dans un rapport dialectique, au CALCUL AUTOMATISE, dont les techniques opératoires (TO) sont les « emblèmes ».

Un principe pédagogique : il y a une nécessité didactique de maîtriser des éléments de CALCUL REFLECHI avant de se lancer dans l'enseignement-apprentissage d'une **TO**.

Dans quel but ? Développer les capacités liées à faire des choix : adapter en fonction des connaissances une réponse « ciblée » face à une tâche de CALCUL.

CONCLUSION 1 : le CALCUL POSE en ligne précède le CALCUL POSE en colonnes.

CONCLUSION 2 : pas de CALCUL POSE sans CALCUL MENTAL !

Quelques exemples

- $36 + 29 = 26 + 20 + 9 = ?$  Ajouter les dizaines, puis les unités du deuxième nombre (*par décompositions*). Apport du traitement mental. Question : propriété mathématique utilisée ?
- $36 + 29 = 35 + 30 = ?$  Remplacer une somme par une somme égale plus « simple » à calculer qui s'appuie sur les dizaines ou « demi-dizaines » ou ... Question : propriété mathématique utilisée ?
- $36 + 29 = 36 + 30 - 1 = ?$  Décomposer un « ajout » par la suite d'un « ajout » *simple* et d'un « retrait » *simple*. Question : propriété mathématique utilisée ?
- Autres techniques de CALCUL REFLECHI, à étudier...

On passe maintenant à la **TO** : en France, on enseigne essentiellement celle liées aux « retenues ».

PROGRAMME : on ajoute les « unités » entre elles, on décompose ensuite ce résultat partiel en « dizaines + unités », on « pose » le chiffre des unités et on « retient », okazou, le chiffre des dizaines, on effectue alors la « somme des chiffres » des dizaines, and so on, modulo les rangs des unités.

Sauf malencontreuse boulette de calcul intermédiaire, on est certain d'avoir la bonne réponse.

Il existe bien d'autres **TO** enseignées dans d'autres pays : exemple et illustration pendant le **TD** par **PW**.

On renverse alors la marmite : on dispose d'une **TO** « à la main », qu'on peut maintenant contrôler avec toute bonne technique de CALCUL REFLECHI.

DEROULEMENT possible d'une séquence type oral du CRPE.

Se reporter au corrigé Hachette : c'est le mieux structuré. **PW** n'en répète que les grandes lignes.

- ~~OBJECTIF pour la séquence : connaître et utiliser la **TO** posée en colonnes.~~
- ~~PLACE dans la progression annuelle au CP : plutôt fin d'année. Why ?~~
- ~~SEANCE 1 (classique pour tous les sujets d'oral) : réactivation des connaissances antérieures ou tests d'entrée dans l'étude ou évaluation diagnostique ou ... Ici, proposer des sommes à calculer, afin de mobiliser le CALCUL REFLECHI pour préparer l'apprentissage de la **TO**. Variables de situation : opérations avec ou sans retenue, opérations favorisant une des procédures de la diapositive 26, somme de plus de deux termes, ...~~
- ~~SEANCES 2 et 3 : phase de recherche, puis de mise en place de la **TO**, institutionnalisation (rôle du **PE**) et phase d'entraînement.~~
- ~~SEANCE 4 : évaluation (ici aussi, c'est un incontournable en pédagogie ! En plus, c'est institutionnellement à la mode !).~~



C'est aussi demandé : prévoir un argumentaire pour l'entretien !

- ~~*DIFFICULTES a priori* : connaissances et disponibilités des sommes « élémentaires » (tables d'addition mémorisées et résultats à reconstruire rapidement).~~
- ~~*DIFFERENCIATION(S) possible(s)* : se reporter aux variables de situation énoncées à la diapositive précédente.~~

~~*Tâche réservée aux M2* : mettre en forme et effectivement rédiger un document pouvant servir de support à l'épreuve d'oral. Chercher et choisir les opérations à effectuer. (...)~~

*Bon courage et bon travail*