Cycle III

GRANDEURS et MESURES

(*Suite et fin* : Cf. Grandeurs et Mesures au cycle II)

Fil rouge : RESOLUTION de PROBLEMES

Patrick WIERUSZEWSKI

Université Orléans

IUFM Centre Val de Loire, site de BLOIS

DDF de MATHEMATIQUES

CHATEAUROUX, *lycée agricole de TOUVENT*, Mars 2012

__PREAMBULE__ : ce diaporama s'inscrit dans le prolongement de celui présenté le mois dernier sur le même thème, mais spécifique du cycle II.

Le plan et le sommaire sont identiques ; les références bibliographiques, en fin de diaporama sont les mêmes ; la « construction théorique » est ici allégée, voire simplifiée ; enfin, des activités de classe, des problèmes et quelques friandises « illustrent » ce document.

Catherine HOUDEMENT. Journées IREM, Lille, 2006

« L'apprentissage des grandeurs joue un rôle important dans les mathématiques que ce soit pour le <u>développement du raisonnement</u>, le <u>renforcement de l'esprit critique</u> ou <u>l'épanouissement de la vie citoyenne</u>.

Cf. diapositive suivante

(Suite). L'apprentissage des grandeurs…

- *Il construit un chemin entre les insuffisances du perceptif, l'intérêt des instruments de mesure (qu'il est nécessaire d'apprendre à utiliser) et la puissance du raisonnement (dont le calcul).*

- *Il prépare un terrain d'expérience pour d'autres concepts mathématiques : nombres non entiers et preuves géométriques.*

- *C'est un domaine prétexte à l'interdisciplinarité, un croisement des sciences, de l'histoire, de la géographie ».*

PLAN et SOMMAIRE

1. <u>Une double activité pour commencer</u> : quelques vrais « découpages » pour commencer ; puis un peu de culture mathématique du quotidien pour aller vers la problématique de « l'animation-conférence » du jour.

2. *<u>PROBLEMATIQUE.</u>* Les grandeurs : *<u>des problèmes d'enseignement aux questions d'apprentissages</u>*. Du côté des programmes, du côté des mathématiques, du côté des pratiques scolaires.

3. Eléments d'analyse « ciblés » sur les GRANDEURS au programme de l'école élémentaire.

4. Quelques pistes de travail, quelques problèmes. Questions et débat.

BIBLIOGRAPHIE <u>sélective</u> *(Cf. fin du diaporama)*

En 2001, Guy BROUSSEAU remarquait que le mot « GRANDEUR » était ignoré de l'index de *l'Encyclopediae Universalis*, mais qu'il apparaissait dans plus de 1000 articles, pour la plupart scientifiques !

In « Enseigner les Mathématiques à l'Ecole Primaire », Noirfalise et Matheron, aux éditions Vuibert.

C'est parti pour les ***activités***

- Une première notion naturelle et naïve de « GRANDEUR » : une ***activité*** pour <u>identifier</u> et <u>isoler</u> les différents concepts en jeu.

<u>Source</u> : « Donner du sens aux mathématiques », Fénichel et Pfaff, aux éditions Bordas.

- Deux ***activités*** du côté « culturel ».

Première activité

Matériel autorisé. Deux feuilles blanches de format A4, une paire de ciseaux, un feutre (ou des crayons divers). *Pas plus et pas moins !*

CONSIGNE.

1. Sans utiliser aucun instrument usuel de géométrie, découper une feuille de format A4 en deux surfaces ayant le même périmètre et pas la même aire. *De plus, il ne doit pas y avoir de chute, de trou ou de surface « perdue ».* Prouver que le découpage produit répond à la consigne.

2. Idem 1., mais cette fois-ci, les deux surfaces doivent avoir la même aire et pas le même périmètre. *De plus, il ne doit pas y avoir de chute, de trou ou de surface « perdue ».* Prouver que le découpage produit répond à la consigne.

3. Les procédures ou techniques mises en œuvre lors des résolutions des deux questions de la diapositive précédente font-elles appel aux mêmes notions, voire aux mêmes concepts ? *Débats*…

4. Pour aller plus loin : un prolongement de la première activité. On joue aux DOMINOS, bonne idée : et les grandeurs dans tout ça ?
   (*Au fait, combien de dominos dans un jeu « double-six » ?*)

D'après Fénichel, Pauvert et Pfaff

On continue à faire émerger des représentations et des conceptions, avec le ***problème*** suivant.

QUESTION : trouver le (ou les) lien(s) entre une Carte Nationale d'Identité, une feuille de format normalisé A4 et « notre » journal quotidien « La Nouvelle République ».

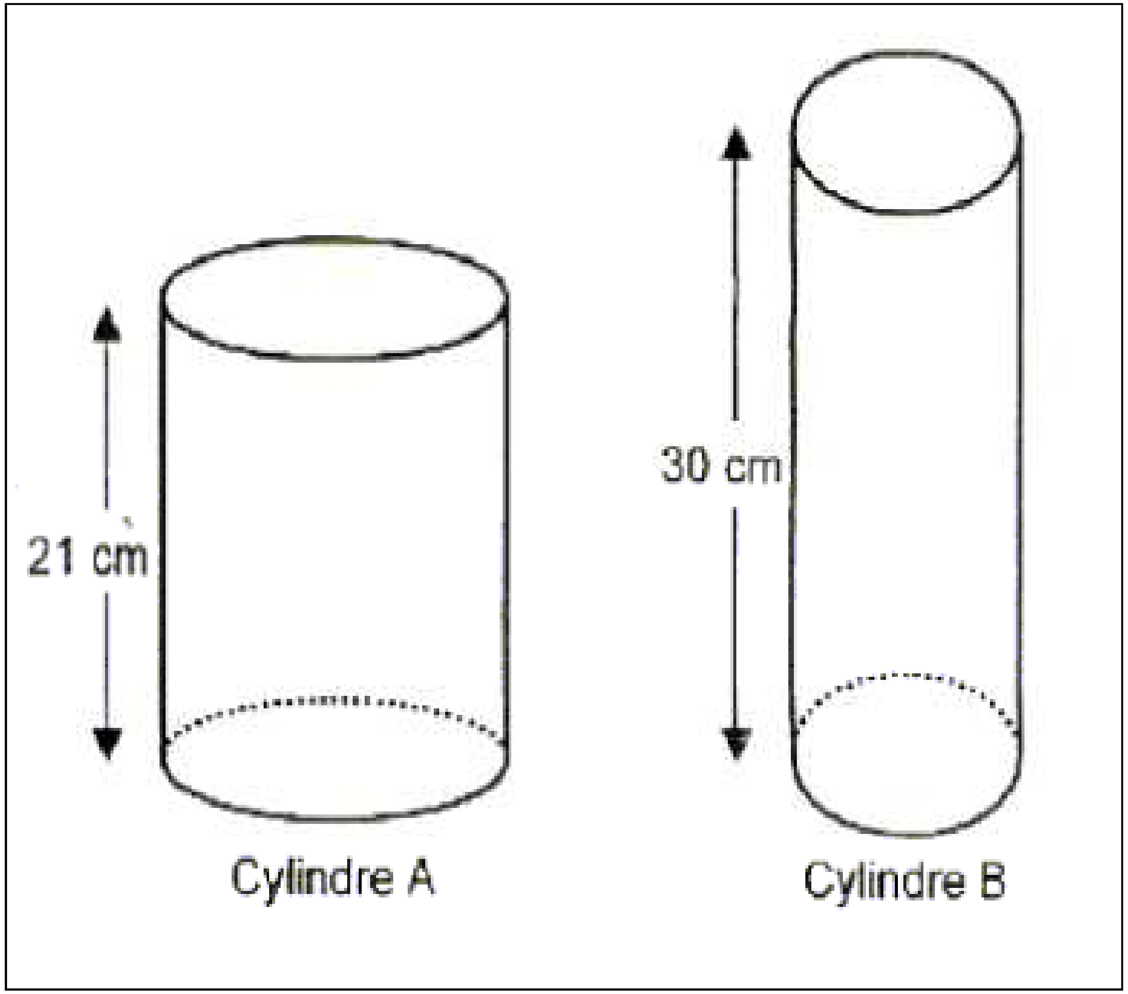
Et pourquoi pas le journal l'EQUIPE ?

Quelle boîte choisir pour emballer les petits pois - carottes ?

On dispose comme pour la première activité de deux feuilles normalisées au format A4.

On peut « enrouler » une feuille A4 de deux façons : *voir ci-contre*.

On obtient ainsi deux cylindres droits de révolution (*deux boîtes de conserve !!!*).



Peut-on mettre « ***autant*** » de petits pois – carottes dans chacune des deux boîtes ? ***Plus*** ? ***Moins*** ? !!!

<u>Un premier « bilan » en trois points</u>

- Les OBJETS (« *Ca tient dans la main, ça tient dans la main* », Coluche, *mais pas que !*), les GRANDEURS (« qualités » communes à des familles d'objets, *<u>à expliciter et à définir !</u>*) et les MESURES (les NOMBRES, *enfin, ouf !*) ne doivent pas être confondues.

- Pour un <u>même</u> OBJET, plusieurs GRANDEURS peuvent être mises en évidence et étudiées. *<u>Exemples</u>…*

- Pour « connaître » un OBJET, il est donc nécessaire de l'étudier sous différents aspects, sans *<u>obligatoirement</u>* faire appel tout de suite au NOMBRE ou à la MESURE. *<u>Exemples</u>…*

<u>Ah bon, ça commence bien</u>. Poursuivons ! On va devoir passer par quelques compléments « théoriques ». *OUI.*

Une première définition « générale »

On appelle GRANDEUR liée à un OBJET, un « caractère » de cet objet susceptible de « variations ».

Bon, on a une « définition », mais est-elle opératoire ? C'est-à-dire : est-ce qu'on s'en sert pour résoudre des problèmes et lesquels ? (Premières définitions donnée par d'Alembert)

Quelques exemples : la qualité d'un conférencier, la gentillesse ou la mansuétude d'un professeur, d'un inspecteur, … sont des grandeurs liées aux êtres humains. Oui, mais comment repérer de bons « caractères » ? Le degré de mansuétude varie d'un professeur à un autre ; d'où THE question fondamentale : comment COMPARER ?

D'autres exemples. La température est une grandeur « simplement » REPERABLE : comparaisons directes ou à l'aide d'instruments. *Pas mal ! On progresse*. Oui, mais, en mélangeant un litre d'eau à 20°*C* avec un litre d'eau à 40°*C*, obtient-on deux litres d'eau à une température de 60°*C* (*ou autre température ?*) ? Non, bien évidemment ; donc, il faut affiner ce qu'on veut voir « varier » pour étudier de « bonnes » grandeurs. Ce sont justement les GRANDEURS au programme de l'Ecole Primaire (2008).

On va donc chercher à définir ce qu'on va appeler une GRANDEUR MESURABLE pour certaines GRANDEURS REPERABLES en fabriquant de « bonnes » opérations. *C'est la clef* !

- Une « bonne » ADDITION. La GRANDEUR de deux OBJETS « réunis » est égale à la somme des GRANDEURS de chaque OBJET.

- Une « bonne » MULTIPLICATION dite « externe ». La GRANDEUR d'un nombre ***n*** d'OBJETS identiques est égale à ***n*** fois la GRANDEUR de l'OBJET générique.

Définition. Une GRANDEUR REPERABLE sur laquelle on peut définir une telle ADDITION et une telle MULTIPLICATION « externe » est une GRANDEUR (*dite*) MESURABLE.

Justement, les bonnes GRANDEURS MESURABLES sont celles du programme, bis. Allons-y !

(Suite du cycle II). **Au cycle III.** (…) « *Les longueurs, les masses, les volumes : mesure, estimation, unités légales du système métrique, calcul sur les grandeurs, conversions, périmètre d'un polygone, formule du périmètre du carré et du rectangle, de la longueur du cercle, du volume du pavé droit.*

- *<u>Les aires</u> : comparaison de surfaces selon leurs aires, unités usuelles, conversions ; formule de l'aire d'un rectangle et d'un triangle.*
- *<u>Les angles</u> : comparaison, utilisation d'un gabarit et de l'équerre ; angle droit, aigu, obtus.* Remarque à l'oral.
- *<u>Le repérage du temps</u> : lecture de l'heure et du calendrier.*
- *<u>Les durées</u> : unités de mesure des durées, calcul de la durée écoulée entre deux instants donnés.*

La résolution de problèmes « concrets » contribue à consolider les connaissances et capacités relatives aux grandeurs et à leur mesure, et à leur donner du sens. A cette occasion des estimations de mesure peuvent être fournies puis validées ».

Pour résumer cette première partie, de façon générale, la notion de GRANDEUR prend donc naissance a l'occasion « d'actions » de COMPARAISONS (*directes ou indirectes*) concernant les « caractères » des objets.

- La notion de LONGUEUR est construite à l'occasion de comparaisons de segments (*voire de lignes quelconques*).
- La notion de MASSE est construite à l'occasion de comparaison d'objets variés à l'aide d'une balance.
- La notion de DUREE est construite à l'aide de comparaisons d'événements qui se prolongent dans le temps. *Très difficile, à cause du double aspect (linéaire et cyclique) de la notion de temps.*
- La notion d'AIRE est construite à l'occasion de comparaisons de surfaces : on s'intéresse à l'étendue, indépendamment de la forme.
- La notion de VOLUME est construite à l'occasion de comparaisons de solides creux, idem que pour les AIRES. Bien plus délicat à étudier que les CAPACITES…

Un exemple de progression générique pour l'étude d'une GRANDEUR

0. Avant tout, proposer des activités de COMPARAISONS, *Cf. diapositive précédente.*

1. Aborder ensuite <u>le(s) mesurage(s)</u> en utilisant un « objet-étalon », choisi arbitrairement.

<u>La QUESTION</u> : si une unité ***u*** est choisie, on cherche combien de fois il faut utiliser ***u*** pour mesurer la grandeur étudiée. *Voir le diaporama spécifique du cycle II.*

<u>Important</u> : le « résultat » dépend de l'unité. En particulier, plus l'unité ***u*** est petite, plus le « résultat » est grand. *Un premier pas vers les CONVERSIONS* ?

2. Parmi tous les « objets-étalons », mettre en évidence une unité commune : la future unité « légale ».
3. Bâtir alors tout un système d'unités cohérentes avec l'unité « légale ».
4. Investir d'autres territoires mathématiques : celui des « formules »…

Pourquoi une unité commune pour unité « légale » ?

Quelques exemples datant de la fin du XVIIIème siècle, avec des égalités décrivant des conversions. *Pas simples, mais alors pas simples du tout.*

- 13 toises de Paris = 8 trabucs de Nice
- 29 mètres = 9 trabucs de Nice
- 17 pieds de Paris = 22 pans de Marseille
- 5 mètres = 19 pans de Nice
- 4 toises = 33 cannes de Marseille
- 14 pans de Nice = 33 décimètres.
- 1 arpent d'ordonnance = 22 pieds de Paris
- 1 arpent de Paris = 18 pieds de Paris
- 1 arpent commun = 20 pieds de Paris

J'ai mieux avec des unités de capacités !

Quel réel défi pédagogique pour le ***PE*** ?

La MESURE d'une GRANDEUR a pour but de remplacer les manipulations sur les objets par des opérations sur des NOMBRES (comparaisons, additions, multiplications « externes », rapport(s), ...), elle reste donc un objectif majeur de l'enseignement.

Mais lorsqu'elle est abordée trop tôt ou trop rapidement, elle s'érige en obstacle à la perception de la GRANDEUR qu'elle est censée représenter, les enfants centrant souvent leur attention sur les NOMBRES au détriment de l'unité qui leur est associée.

Au cycle II, par exemple, de nombreux élèves déclarent les affirmations suivantes :

« 36 cm c'est plus que 3 m parce que 36 c'est plus que 3 ».

Et au cycle III ?

De la même manière, on a découvert (*recherches en DdM*) que l'introduction des décimaux à partir des conversions décimales du système métrique avait provoqué des confusions profondes dans la conception d'un nombre décimal.

Par exemple, de l'égalité 1254m = 1,254km, des élèves peuvent déduire que : 1254 = 1,254

Ne retenant ainsi de l'égalité que sa <u>dimension purement numérique</u>.

Les notations abrégées évoquant les unités qui donnent leur signification aux différentes mesures, ne peuvent être prises en compte que par les élèves qui ont compris la signification concrète de ces unités.

On y reviendra.

C’est parti pour une étude des GRANDEURS
Du côté des poids et des masses pour commencer

A l’école élémentaire, on acceptera de confondre la masse et le poids.

➢ Par contre, il faut « aider » les élèves à ne pas confondre masse et volume.

➢ La première expérience de comparaison des objets selon leur masse va s’appuyer sur l’action de SOUPESER les objets. On introduit ensuite la balance de Roberval pour lever les doutes sans omettre d’établir le lien entre le fonctionnement de la balance et les sensations kinesthésiques perçues lors de la comparaison de deux objets de masses très différentes.

*La diapositive suivante propose un exemple de balance de Roberval à construire en classe (IREM-SCEREN de Lille, brochure : « **GRANDEURS et MESURES au cycle III** », la balance « porte-manteau »).*

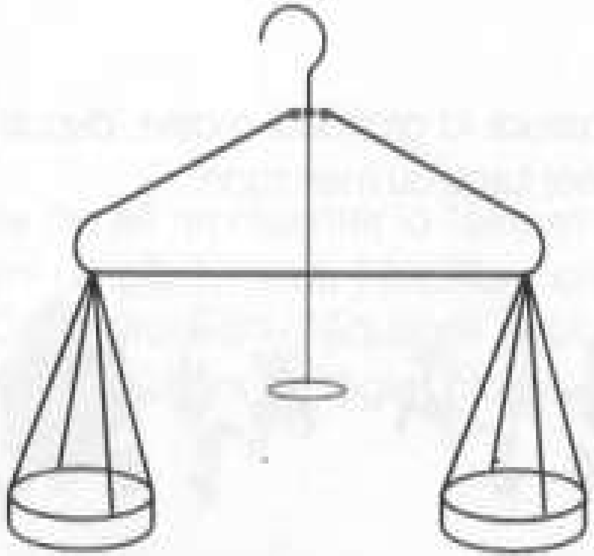
Matériel nécessaire

- Un portemanteau ayant si possible un petit crochet de chaque côté.

  Deux bacs en plastique identiques (bacs ayant servi à conditionner des aliments, par exemple boîtes de glace ou autres).

  Ficelle.

  Par la suite, fil à plomb constitué par un morceau de ficelle à l'extrémité duquel est fixé un objet (boulon, rouleau de papier adhésif, boule de pâte à modeler, etc.). Ce fil à plomb, accroché en haut du portemanteau, permet de repérer la position d'équilibre au
- moyen d'une marque sur la barre latérale.

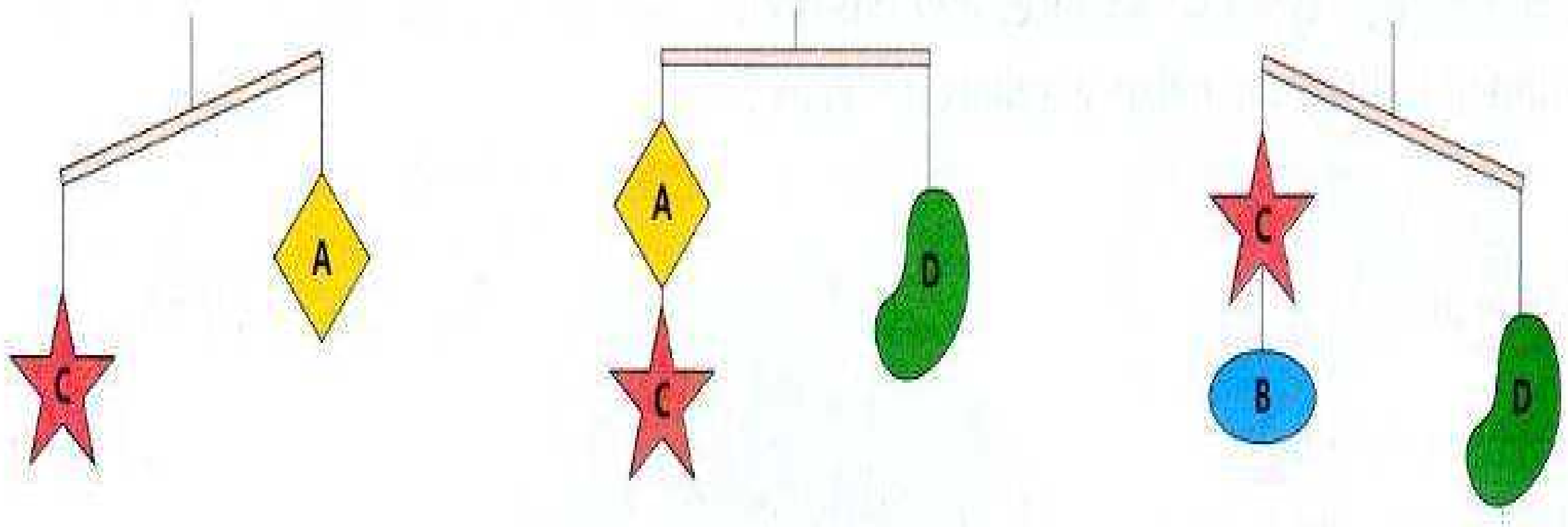


- La pesée à l'aide de masses marquées doit précéder les pesées avec une balance graduée ou à affichage digital, même si le rapport entre ces deux types de mesures doit être établi.
- La définition du kilogramme comme masse-unité de référence sera mise en rapport avec la masse d'une bouteille contenant un litre d'eau. Le rapport entre le gramme et le kilogramme ne devra pas se limiter à l'égalité : 1 kg = 1000 g ; il faut aussi que les élèves soient capables de prévoir quels sont les objets dont la masse se mesure plutôt en grammes et ceux dont la masse se mesure plutôt en kilogrammes. *COMMENTAIRES.*
- En règle générale, les conversions de masses devraient être reliées à des situations de PROPORTIONNALITE. (*Idem pour les longueurs, ben oui !*).

Un problème pour « chercher ». *Cf. diapositives annexes.*

CONSIGNE. En observant les trois balances ci-dessous, ranger les quatre objets A, B, C et D du plus lourd au plus léger. (*Niveau de classe : à partir du CE2*).

Sandra accroche des objets aux extrémités d'une barre suspendue en son milieu. Elle observe si la barre est en équilibre ou pas.



Un autre petit défi concernant les masses.
Quelle est la fausse pièce d'or ?

Un vol de pièces d'or a été commis dans une banque (*grecque ?*). En effet, neuf pièces d'or identiques (*forme, masse, valeur, …*) ont été volées, mais parmi ces neuf pièces, il y en a quand même une qui est « fausse » : elle est moins lourde que les huit autres (*oui, mais pas beaucoup moins lourde, donc zut : indiscernable au « soupesage »*).

On dispose simplement d'une balance « porte-manteau » (*voir diapositive précédente*) et d'aucune masse marquée.

Montrer qu'en trois pesées, *au plus !*, on est certain de trouver la mauvaise pièce, avec laquelle, on va pouvoir payer les dettes ! *(…)*

Problème bis : « ***Dix sacs de pièces d'or, sauf un !*** »

Du côté de la **contenance** ou de la **capacité**

L'activité expérimentale de comparaison des contenances de deux récipients repose sur l'idée de <u>transvasement</u>.

- Le travail expérimental de rangement de plusieurs récipients selon leur contenance est une bonne occasion de faire intervenir la transitivité, comme pour les masses.
- Les « verres-doseurs » utilisés dans les recettes font apparaître un risque de confusion entre masse et volume (ou contenance), il n'est donc pas inutile de faire remarquer qu'un même récipient n'a pas la même masse selon qu'il est rempli de farine, de sucre ou d'eau.
- La contenance ne se distingue du volume intérieur d'un récipient que par le choix des unités : pour la contenance, le litre et ses multiples et sous-multiples sont construits sur la base dix ; pour le volume les unités déduites des unités de longueur vont de mille en mille : $1m^3 = (10\ dm)^3 = 1000\ dm^3$

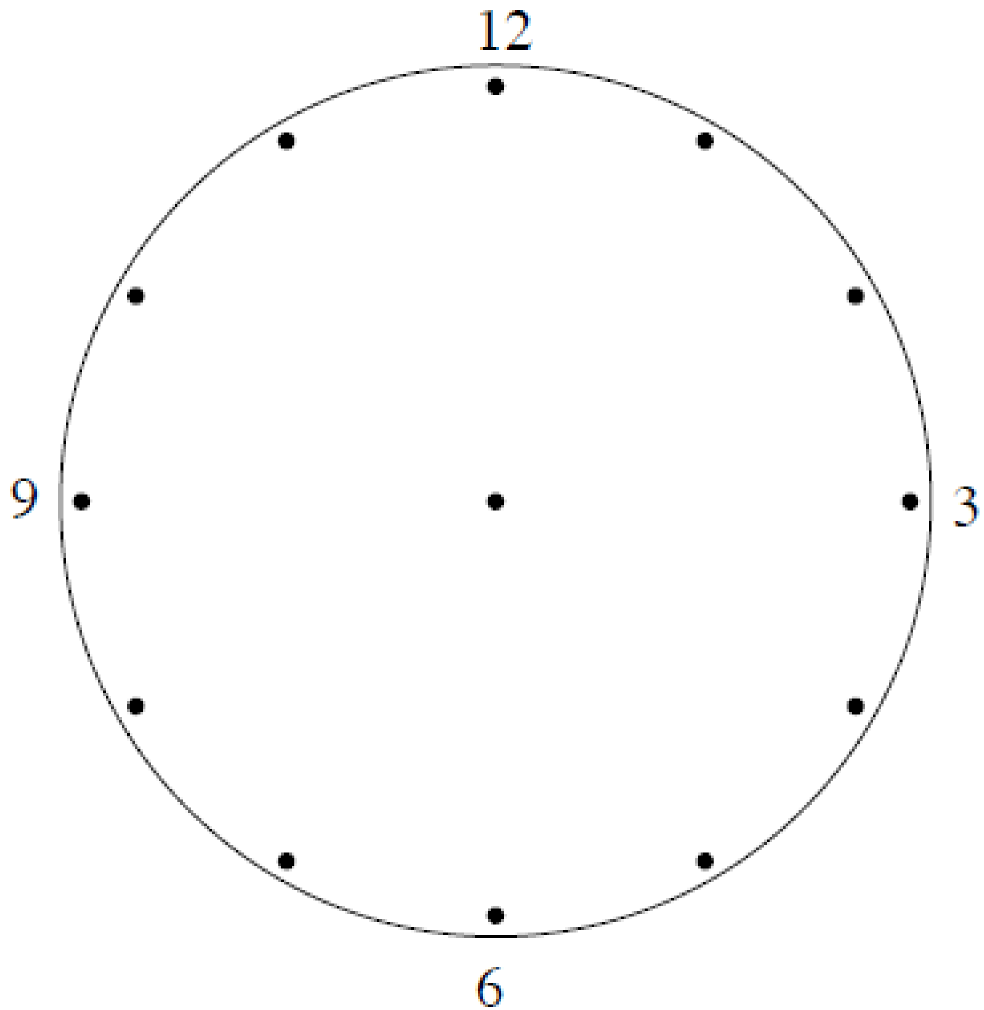
(*Un problème, d'après CRPE*). Avant que n'entre en vigueur le système métrique, les capacités étaient mesurées avec des unités qui variaient selon les régions et aussi selon les matériaux considérés. Ainsi pour les liquides, le MUID de Paris correspondait à 268,2 litres, tandis que le MUID de Lunel utilisé dans le Languedoc correspondait à 700 litres.

Un vigneron languedocien qui voulait vendre 5 MUIDS (de Lunel) de vin à Paris devait exprimer cette quantité en MUIDS de Paris. Donner alors la valeur décimale arrondie au centième de la mesure en MUIDS de Paris des 5 MUIDS de Lunel.

Le MUID avait des multiples et des sous-multiples : le SETIER et la PINTE. Un SETIER valait 8 PINTES et un MUID valait 36 SETIERS. Calculer en MUIDS, SETIERS et PINTES de Paris la capacité d'un réservoir de forme parallélépipédique (*rectangle*) dont les dimensions, en centimètres d'aujourd'hui, sont 50 pour la hauteur, 350 pour la largeur et 391,87 pour la longueur.

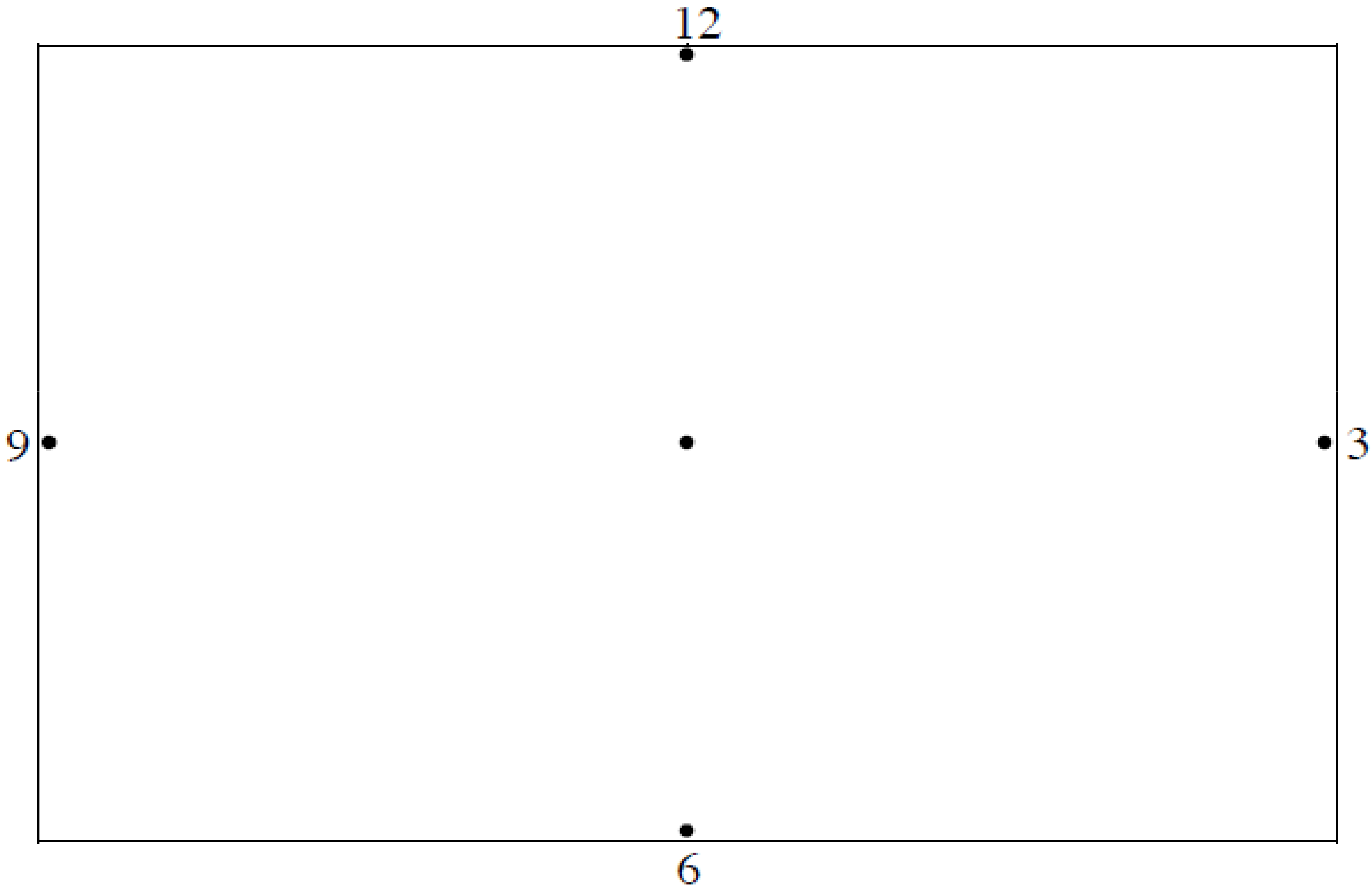
<u>*Question bonus pour l'amphi*</u>. Au bout de combien de PINTES d'un breuvage lunellois (*le muscat ?*) ou parisien, un « honnête homme » peut-il être déclaré en état d'ivresse par la maréchaussée ? Justifier.

Etude d'une nouvelle GRANDEUR à partir d'une situation « emblématique ».
Voici, ci-dessous, le cadran d'une horloge « ronde », avec le repérage des heures pleines.
<u>CONSIGNE</u> : marquer les repères qui manquent sur la seconde horloge (*Cf. diapositive suivante*).



<u>Matériel autorisé</u> : une règle graduée, un crayon à papier, une gomme, un morceau rectangulaire de papier calque dont les dimensions n'excèdent pas 5cm par 3cm. (*D'après Cap Math*).

(Un problème pour construire une connaissance)
De quelle GRANDEUR s'agit-il ? Spécial cycle III.



Des gabarits avec les angles des équerres pour approcher la notion de mesure : une proposition d'activité, en relation avec les tâches du programme.

- Reproduire un angle aux instruments.
- Comparer deux angles.

Idée ou piste.

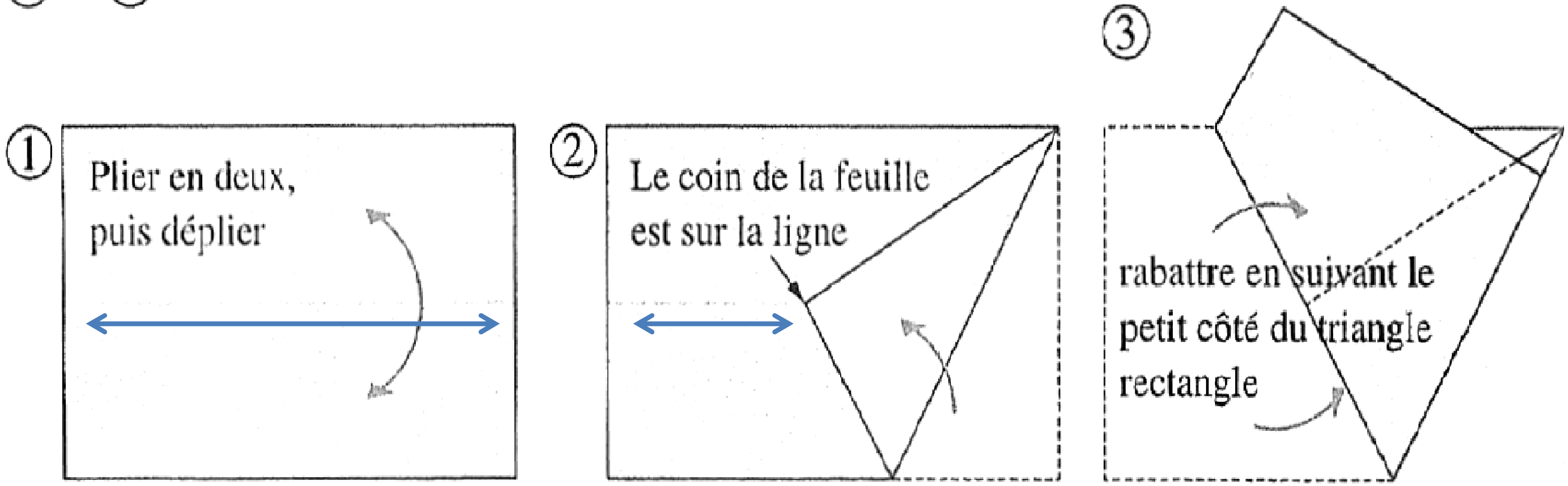
On part d'un angle droit (*double pliage*) : on peut ensuite construire un demi-angle droit, par pliage ; puis un quart d'angle droit, toujours par pliage. On essaie alors d'identifier ces angles avec ceux des deux équerres usuelles en plastique du commerce.

On a ainsi le gabarit de l'angle non-droit de l'équerre isocèle. Et l'autre équerre ? On va aussi en faire « quelque chose ». *Illustration pendant l'animation.*

Une construction « astucieuse », par pliage d'un angle particulier : celui de l'angle d'un triangle équilatéral

Manipuler

Prendre une feuille rectangulaire et réaliser les trois pliages comme sur les figures ①, ② et ③.



Pas mal du tout !!! On a maintenant notre jeu de gabarits d'angles, qu'on peut doubler en quantité, uniquement par pliages. D'où un « appel » à des codages de ces angles : les mesures chiffrées ; au Collège, à préparer ainsi au Primaire.

L'objet support de la GRANDEUR angle est le secteur angulaire. On parle alors de sommet, de côtés, …

- La mesure des angles n'est pas au programme du cycle III : pas de rapporteur, et oui ! Donc on peut et on doit s'approprier la GRANDEUR « angle » avant d'apprendre à la mesurer au collège. (*Voir diapositives précédentes*).
- En comparant différents angles à un angle droit on aboutit à la distinction entre angles aigus et angles obtus.
- Toutefois, il est souhaitable d'aborder la construction de la somme de deux angles en faisant coïncider leur sommet, un de leur côté et en plaçant les autres côtés de part et d'autre de leur côté commun.
- Il n'est pas interdit alors de constater que les trois angles d'un triangle ont pour somme un angle plat quelle que soit la forme du triangle. *Activité* : découpage d'un triangle dans une feuille A4, puis expérimentation pour prouver que, quel que soit le triangle, on a la propriété caractéristique des angles d'un triangle.

Une autre GRANDEUR au programme : le concept de temps et la notion de durée

<u>Quelques points de repères théoriques</u> (Brochure « *Prends ton Temps* », IREM de Besançon).

Les contextes et les supports de travail possibles à proposer aux élèves, à partir du cycle II :

- Lecture de l'heure sur des pendules à aiguilles.
- Liens entre les différents affichages les plus usuels : digital et aiguilles.
- Calculs sur les durées.
- Outils de représentation du temps linéaire et cyclique.
- Liens et passages entre ces diverses représentations.

Le temps est à la fois une notion banale, mais difficilement saisissable : <u>le passé n'est plus</u>, <u>le futur est à venir</u> et <u>le présent ?</u> On ne peut le percevoir de façon isolée : c'est ce qu'on appelle un « objet » instable.

Enfin, le TEMPS est une notion bien plus abstraite que le NOMBRE.

- Les « dates » ne sont pas des grandeurs mesurables.
- Le temps peut être perçu comme ***cyclique*** (alternance jour/nuit, semaine, mois, …) ou ***linéaire***. Ce dont il faut avoir conscience, c'est que les élèves le vivent essentiellement comme un phénomène linéaire.
- Les élèves doivent parvenir à bien se repérer dans le déroulement d'une journée de classe en fin de maternelle.
- Il est raisonnable de penser qu'ils parviennent à se repérer correctement dans une semaine en fin de cycle II.

Supports pour le cycle III

Du 1er juin au 1er juillet, il s'est écoulé :	Du 10 février au 10 mai, il s'est écoulé :
a- 1 mois b- 1 an c- 1 semaine	a- 3 semaines b- 3 mois c- 3 jours

Quelques exercices ou problèmes concernant les durées.
Commentaires…

Du 8 novembre au 8 avril, il s'est écoulé :	Du 2 avril au 10 avril, il s'est écoulé :
a- 5 mois b- 4 mois c- 1 an	a- 10 jours b- 8 heures c- 8 jours

A méditer…

Dix ou quinze minutes passées à attendre quelqu'un qui n'arrive pas (à un rendez-vous galant ?) (…).

Entre 14h11 et 15h17, il s'écoule :	Entre 10h37 et 11h, il s'écoule :
a- 28 minutes b- 6 minutes c- 1 h 6 minutes	a- 23 minutes b- 1 h 37 minutes c- 37 minutes

Quelques exercices ou problèmes concernant les durées, suite. *Commentaires…*

Entre 11h30 et 16h, il s'écoule :	Entre 16h30 et 17h05, il s'écoule :
a- 5 heures b- 5 h 30 minutes c- 4 h 30 minutes	a- 35 minutes b- 1 h 25 minutes c- 25 minutes

(…) sont perçues comme beaucoup plus longue que quinze minutes de récréation (qui, elle, est toujours trop courte !).

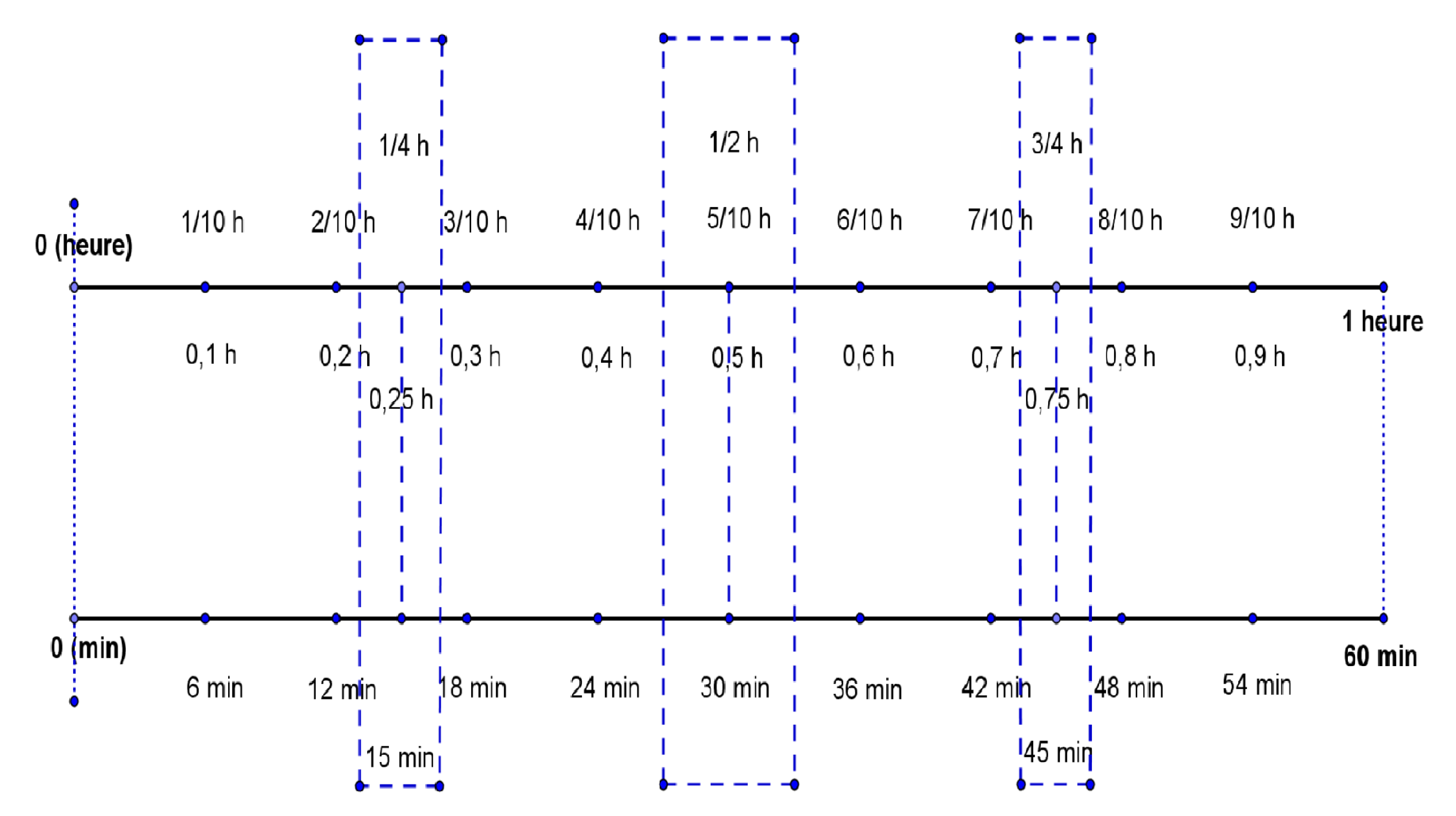
3 quarts d'heure après 20h, il est :	10 mn après 10h12mn32s, il est :
a- 20h 34mn b- 20h 3mn c- 20h 45mn	a- 10h 22mn 32s b- 20h 12mn 32s c- 10h 12mn 42s

Quelques exercices ou problèmes concernant les durées, suite. *Commentaires…*

1 demi-heure après 22h50mn, il est :	20 minutes après 2h55, il est :
a- 23 h b- 22h 52mn c- 23h 20mn	a- 3h 15mn b- 2h 35mn c- 4h 55mn

Cette dimension doit donc être explicitement abordée avec les élèves.

Grille de conversion « automatique » entre les deux « systèmes » de lecture d'heure



__On s’amuse, chiche__ : des conversions, yes !!!

10h 35min 18s = ? 10,…h et 8,27h = ? 8h …min …s

__Une autre ACTIVITE pour le cycle III__.

Calculs de durées avec des horloges.

Il y a *essentiellement* trois types de questionnement possibles. Des problèmes pour appliquer une connaissance.

- On connaît les instants de départ et d’arrivée, on cherche la durée du temps écoulé.
- On connaît l’instant de départ et la durée du temps écoulé, on cherche l’instant d’arrivée.
- On connaît la durée du temps écoulé, l’instant d’arrivée, on cherche l’instant de départ.

__Remarque__ : on retrouve un parallèle avec la classification des problèmes additifs de Vergnaud.

On finit avec les GRANDEURS les plus connues : LONGUEURS et AIRES

Pour construire la GRANDEUR « LONGUEUR », je renvoie au précédent diaporama.

Lecture souhaitée !!! Commentaires…

Au cycle III, ces deux GRANDEURS sont voisines. Il faut donc s'intéresser aux relations de voisinage.

Un principe pédagogique pour toute programmation :

- Des travaux sur la grandeur LONGUEUR, dans le sens décrit dans ce diaporama.
- Idem, avec la grandeur AIRE.
- *Important* : des travaux communs sur les deux grandeurs.

Cf. diapositives suivantes pour le troisième point.

L'aire est une GRANDEUR mesurable associée à l'objet surface.

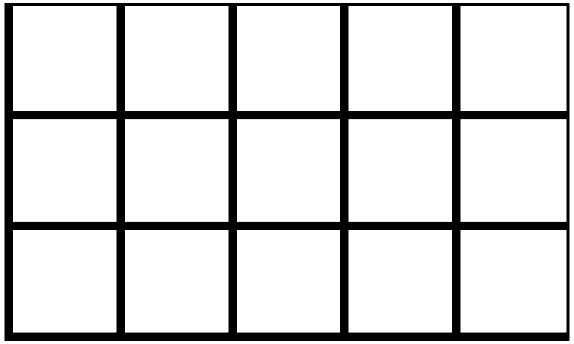
- Elle ne possède guère de synonymes fidèles, on la compare souvent à l'étendue d'une surface ou à la « place » occupée par une surface. Cependant, si une aire est associée à un « encombrement », par exemple, un rectangle de 11cm de long sur 4cm de large sera souvent considéré comme plus « étendu », car plus « allongé », qu'un carré de 7cm de côté alors que son aire est inférieure à celle du carré, pose des difficultés « d'appréhension » de la GRANDEUR, indépendamment de la mesure.
- C'est par des <u>comparaisons de surfaces</u> qu'on va mieux permettre aux élèves de comprendre ce qu'est l'aire d'une surface. *Importantissime* !

Pour les comparaisons, deux techniques suivant les surfaces en jeu.

- Une surface est incluse dans l'autre, *étude des cas*.
- Les deux surfaces se « chevauchent », *étude des cas*.

(*Principe fondamental de décomposition-recollement et superposition*). (*Voir l'activité de début de conférence*)

- L'aire est une GRANDEUR mesurable, mais, dommage, il n'existe aucun instrument pour la mesurer, il faut la calculer, ce qui n'est pas toujours facile : soit par somme d'aires, soit par des formules. *Débat.*
- La première « formule de calcul d'aire » est celle du rectangle. Dans cette formule les élèves découvrent qu'on peut multiplier des longueurs par des longueurs pour obtenir une aire. *C'est un aspect de la multiplication qui entre en rupture avec la multiplication conçue comme addition réitérée. Exemples …*

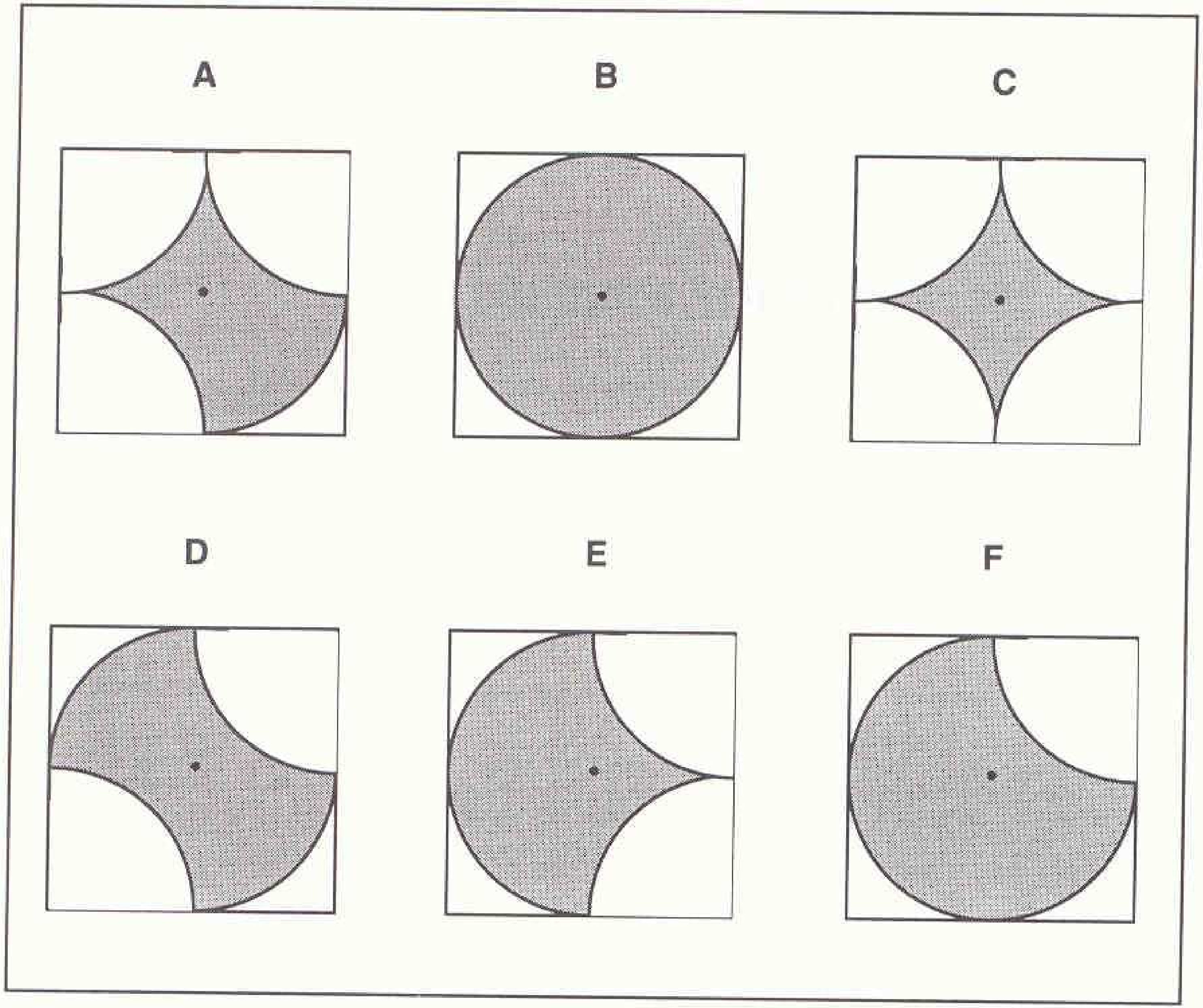


Un rectangle qui a pour longueur 5 côtés d'un carreau et pour largeur 3 côtés d'un carreau, a une aire égale à l'aire de 15 carreaux. (*15 carreaux = 15 × 1 carreau*).

Dans cette étape, il ne faut pas confondre le côté du carreau qui est une unité de longueur avec le carreau dont l'aire devient l'unité d'aire, c'est ce qui permettra aux élèves de comprendre que : 5 m × 3 m = 15 m² et non pas 15 m.

Risque de confusions fortes chez les élèves qui auront un « poids » plus tard. Pas facile pour le ***PE*** !

Depuis les programmes de 2008, on étudie aussi au cycle III l'aire du triangle que l'on déduit de celle du rectangle. Pourquoi ?


A
B
C
D
E
F

Un enseignant de CM2 décide de conduire des activités de mathématiques autour du matériel **M** de la diapositive précédente : il s'agit de surfaces planes limitées par des arcs de cercle et inscrites dans des carrés de même dimension. Il est sous-entendu que les centres et les rayons des arcs de cercle pourront être déterminés sur le matériel **M** par les élèves.

Le matériel dit « usuel » de géométrie est mis à leur libre disposition.

Consigne : utiliser le matériel **M** pour en faire une activité « d'enseignement-apprentissage » au cycle III.

Aides : quels rangements, pour quelles GRANDEURS ? Objectifs didactiques et pédagogiques ? Institutionnalisations à définir et à proposer ? …

Une bonne « *fiche de prep* » à élaborer !

Dernier point, pas le moindre : les mesures, les calculs, les conversions et tout ce qui va avec.

Un principe pédagogique.

Pour résoudre un problème lié aux MESURES, il faut chercher à donner un « sens » dans des contextes sociaux. *Pistes à explorer* :

Notion de grandeur sans la mesure, Estimation d'une mesure, Calculer une mesure.

Quelques objectifs « d'enseignement-apprentissage » incontournables :

- Etablir les relations et les égalités entre les unités d'une GRANDEUR.
- Estimer, comparer, ranger des GRANDEURS.
- Effectuer des calculs avec les GRANDEURS.
- Etablir les formules, *ne pas oublier* !

Un « petit » mot sur les tableaux de conversions : quelle(s) institutionnalisation(s) des relations et des égalités entre les unités de longueur ?

- (*Un exemple*) 1dam = 10 × 1m = 10m. Faire apprendre par cœur « 1dam, c'est 10 fois plus grand que 1m » et « 1m, c'est 10 fois plus petit que 1dam ».
- Idem pour les autres relations et les autres grandeurs.
- Beaucoup plus difficile lorsqu'on s'intéresse aux égalités dans l'autre sens : les difficultés sont conceptuelles, les « nouveaux nombres » ont leur part de responsabilité !
- (*Un autre exemple*) 1,5L = 1,50L = 1,500L = 1L 50cl =1L 500ml : suite d'égalités délicates à établir, à mémoriser et à « reconstruire ». Idem pour les autres grandeurs.
- Et les tableaux de conversions ? Ah oui. *Un exemple* : 123m = 100m + 20m + 3m = 1hm + 2dam + 3m ; on écrit « 1 » dans la colonne « hm », « 2 » dans la colonne « dam » et « 3 » dans la colonne « m ». De même, 4,56m = … = d'où les écritures dans le tableau. *Trop facile !*

Le « problème » de la virgule : dans le tableau, elle est TOUJOURS à la même place et quand on « fait » des calculs, elle se déplace, donc, elle n'est plus à la même place. Aie !!!

Allons-y : convertir en mètres la longueur 7,89hm. Quelles techniques ?

- Utilisation en acte de la propriété : « *pour convertir des hm en m, on multiplie par 100* ». D'où « l'opération » : $7,89 \times 100 = 789$, puis on écrit la conversion avec les unités. Oui, mais c'est aussi facile que ça ?
- On remplit le tableau et on « lit ». Oui, mais la virgule, on en fait quoi : elle se déplace ou pas ?
- Justifications ? A l'oral.
- Même consigne dans l'autre sens : convertir en mètres 27,3cm. C'est quoi la propriété ?

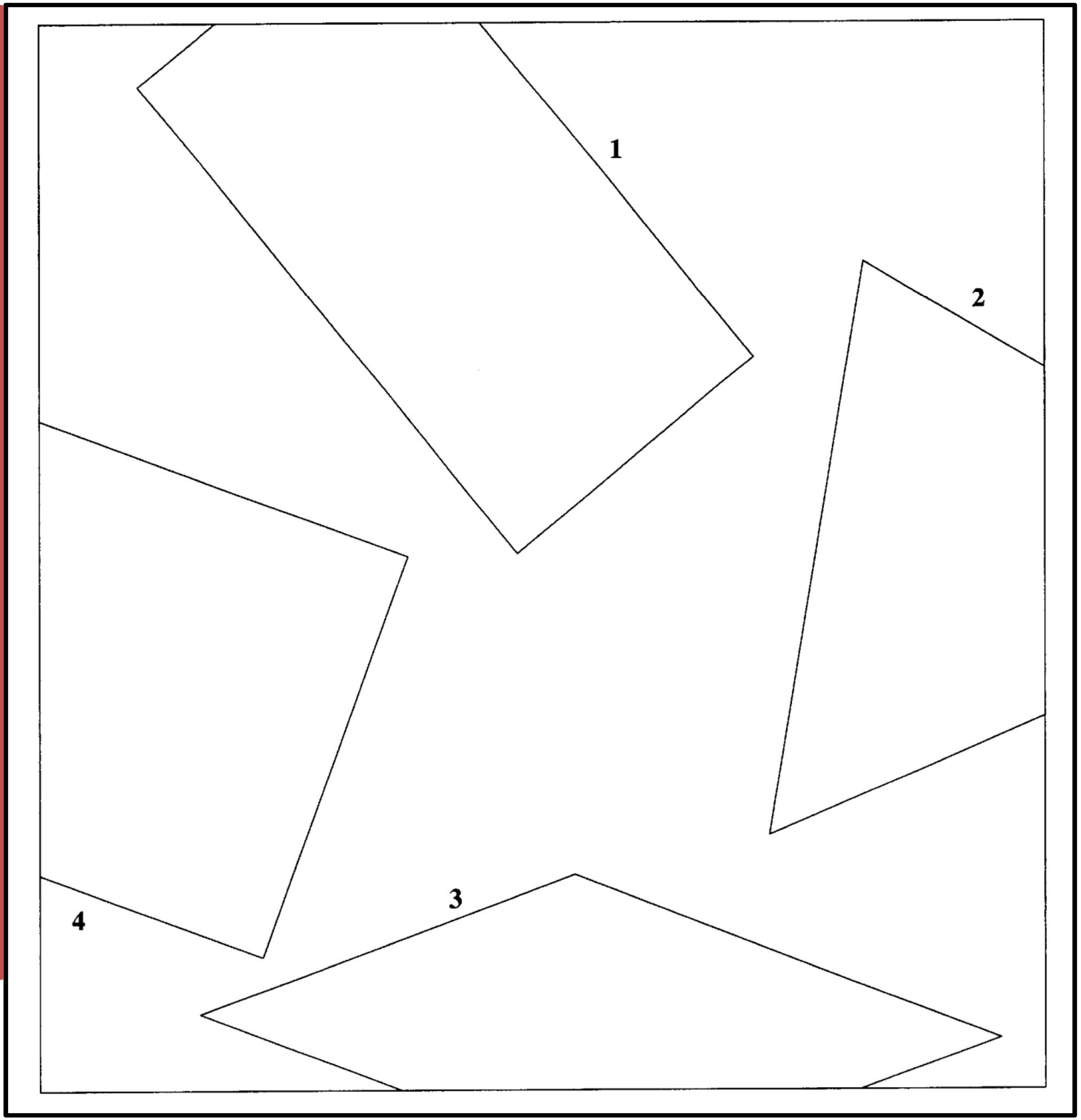
On y va pour les formules. Du côté des périmètres.

- Le périmètre d'un carré dont le côté a pour longueur 5cm est 4 × (5 cm). On a : 4 × (5 cm) = 4 × 5cm = 4 × 5 × 1cm = 20 × 1cm = 20 cm. Commentaires…
- Le périmètre d'un rectangle de longueur 12cm et de largeur 5cm est égal à : 12 cm + 5 cm + 12 cm + 5 cm , ou encore 2 × (12 cm + 5 cm), c'est-à-dire 2 × 17 cm, soit 34 cm.
- Ceci revient à interpréter les formules $\boldsymbol{p} = 4 \times \boldsymbol{c}$ *et* $\boldsymbol{p} = 2 \times (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{l})$ comme des formules portant sur des longueurs et pas seulement sur des mesures de longueur. Ce sont des formules qui sont vraies quelle que soit l'unité de longueur choisie. Commentaires…
- *Pour aller plus loin*. Lorsqu'on partage un segment de longueur 12 cm en 7 parties de même longueur, chacun des segments a pour longueur 12/7cm, et on a 7 × (12/7cm) = 12cm.

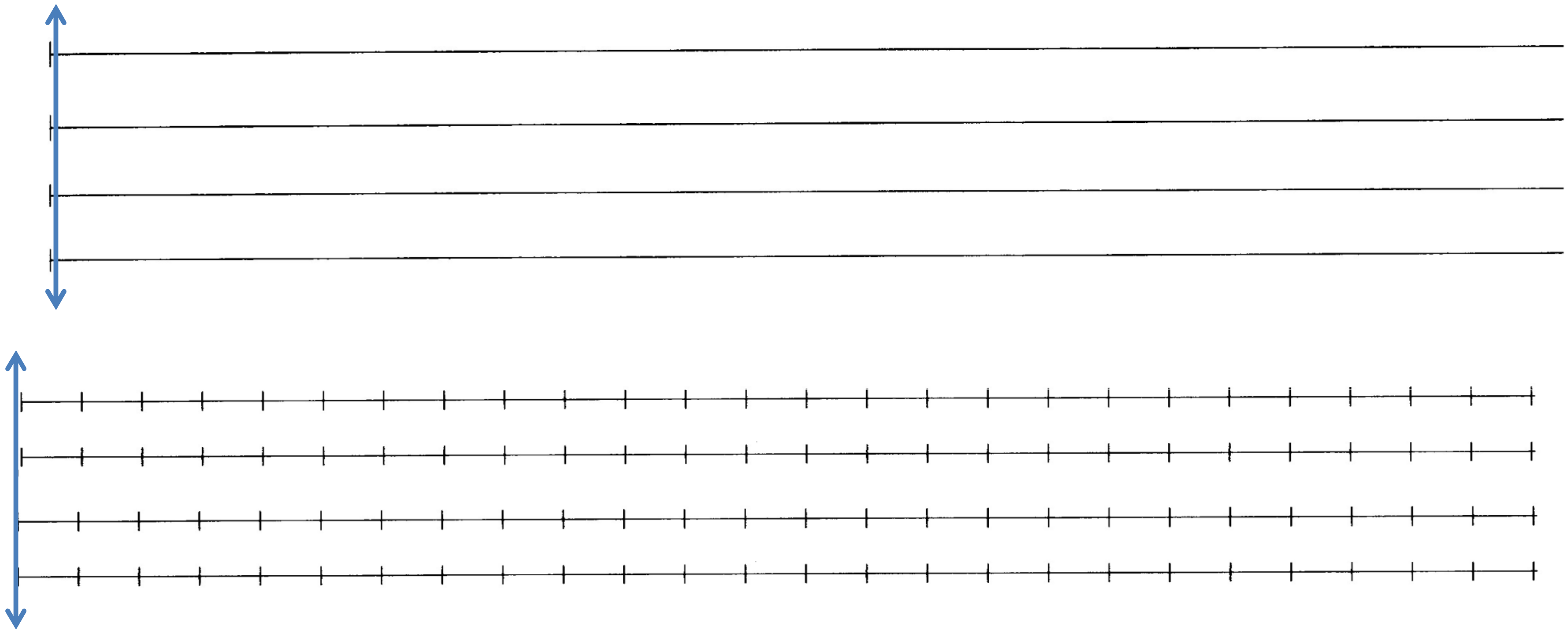
Un problème…

Quatre figures géométriques n'ont pas pu être « tracés » dans le cadre.

Il s'agit d'un carré (4), d'un rectangle (1), d'un triangle équilatéral (2) et enfin d'un parallélogramme (3).



Sans les mesurer, ranger les périmètres de ces quatre figures par ordre croissant. Utiliser les bandes ci-dessous. Contraintes sur le matériel ?



Et pour les aires, c'est le paragraphe suivant, ouf !

Du côté des aires

➢ La formule $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{l}$ est une égalité entre deux grandeurs, indépendante des unités choisies pour les exprimer. Des exemples :

$5\text{cm} \times 3\text{mm} = 50\text{mm} \times 3\text{mm} = 150\text{mm}^2$,

$5\text{cm} \times 3\text{mm} = 5\text{cm} \times 0{,}3\text{cm} = 1{,}5\text{cm}^2$,

d'où l'égalité : $150\text{mm}^2 = 1{,}5\text{cm}^2$

➢ $1\text{cm}^2 = 1\text{cm} \times 1\text{cm} = 0{,}01\text{m} \times 0{,}01\text{m} = 0{,}0001\text{m}^2$.
Ces calculs fournissent un agréable et très efficace substitut aux « tableaux de conversion» pour les unités d'aire.

➢ Pour aller plus loin, au collège, on peut mettre à profit le calcul sur les puissances, dont les règles de calcul s'étendent aux calculs sur les grandeurs.

➢ Et que fait-on de l'aire du triangle ? Ah oui, la hauteur : koi kess ? Droite ou Grandeur ? Excellente question !

ANNEXE. Préoccupation du 36.

La typologie, *très simplifiée*, mobilisée dans ce diaporama concernant la RESOLUTION de PROBLEMES, sans hiérarchie, ni ordre.

- Problème « ouvert ».
- Problème pour apprendre à chercher.
- Problème pour apprendre ou construire une connaissance.
- Problème pour appliquer une connaissance.

Ces types de problèmes ont donc des objectifs différents et des « supports » distincts. Ils supposent des attitudes et des aptitudes différentes chez les élèves, et bien entendu, sous-entendent une posture de l'enseignant variable suivant le problème en jeu.

C'est the piste consistante à explorer lorsqu'on s'intéresse à ce « dossier ».

GRANDEURS et MESURES dans une collection de manuels (« *Pour comprendre les Mathématiques* », aux éditions *HACHETTE*). (*Remerciements à Claude MAURIN*). CM1

Leçon 7 : Du mètre au millimètre. *Leçon 9* : Lire l'heure.
Leçon 23 : Calcul de durées (1).
Leçon 27 : Du mètre au kilomètre.
Leçon 33 : Calcul de durées (2).
Leçon 37 : Le calendrier.
Leçon 47 : Les masses.
Leçon 48 : Les angles.
Leçon 52 : Les aires : comparaison
Leçon 56 : Mesure des aires.
Leçon 60 : Aire et périmètre.
Leçon 68 : Contenances.
Leçon 83 : Unités de mesure et système décimal.
Leçon 86 : Périmètre du carré et du rectangle.

BIBLIOGRAPHIE « sélective »

Ce n'est pas parce que les « anciennes » références communes, en particulier les publications ERMEL, ne sont pas citées qu'elles ont perdu de leur actualité, mais de nouveaux « produits » existent. *Heureusement !*

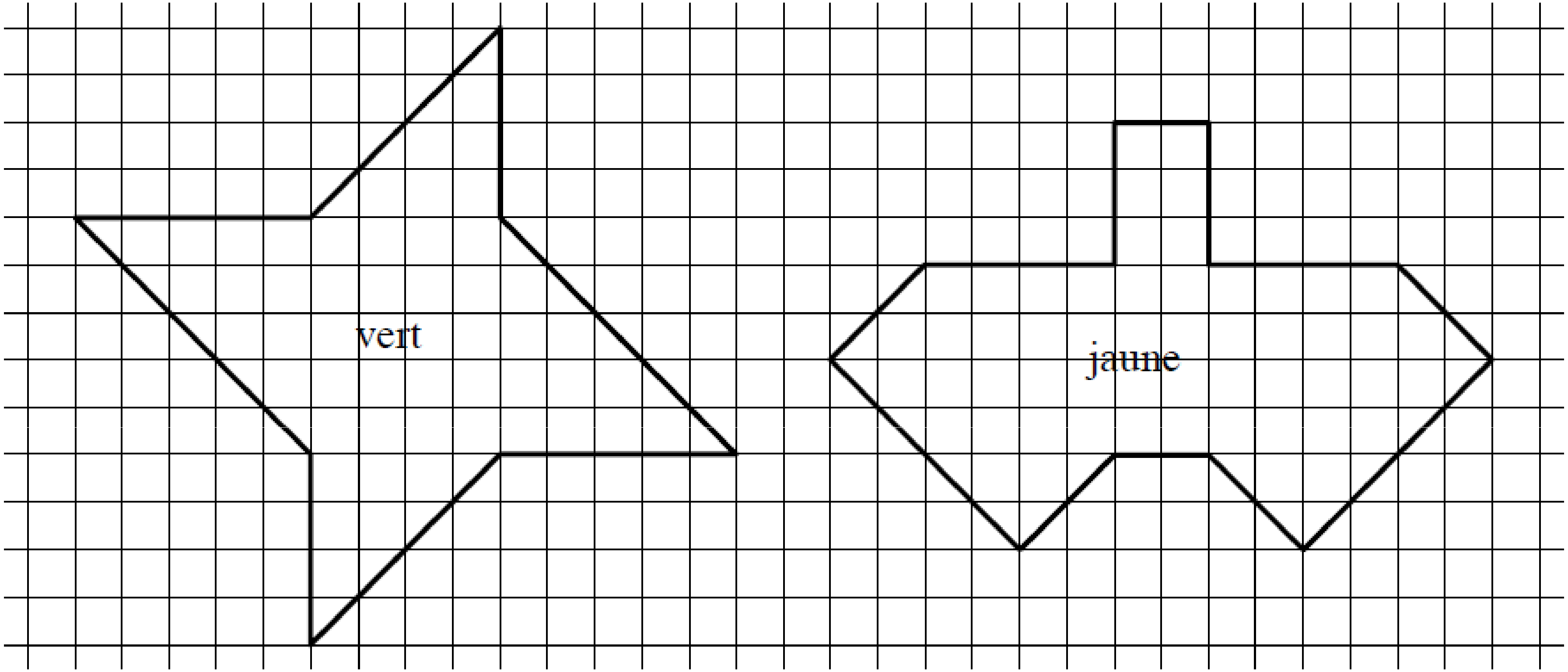
Deuxième remarque : les sites institutionnels sont aussi à explorer.

- Mathématiques. « Le nombre au cycle II ». SCEREN, CRDP du Centre, Académie Orléans-Tours.
- (*Cycles I et II*) « Un rallye mathématique à l'école maternelle ? Oui, c'est possible ! » F. et F. EMPRUN. SCEREN, CRDP Champagne-Ardenne.
- « Problèmes additifs et soustractifs, CP et CE1 ». GRAFF, VALZAN et WOZNIAK. SCEREN, CRDP Nord – Pas de Calais. (…)
- To be continued…

- « Calcul Mental au cycle II ». « Calcul Mental au cycle III ». Collection MOSAIQUE, éditions Hatier. CLAVIE, PELTIER, AUBERT.
- « Prends ton Temps ! », « Le Carrousel des Nombres » : deux publications de l'IREM de Besançon.
- « Points de Départ », numéro spécial de la revue « *Grand N* ». Une publication de l'IREM de Grenoble.
- « Grandeurs et Mesures, cycle 3 ». IREM Lille et SCEREN, CRDP Nord, Pas de Calais.
- Les manuels et fichiers de la collection « Pour Comprendre les Mathématiques », programmes 2008. Editions HACHETTE (*sous la direction de Claude MAURIN*).
- (…)

MERCI !

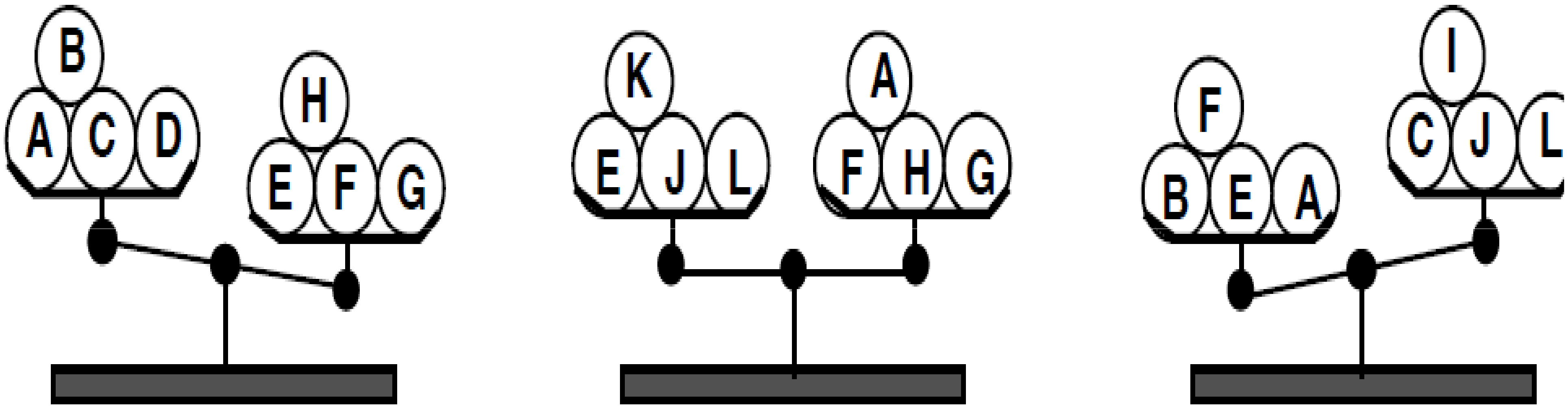
Pour la fête de l'automne, on a décidé de décorer la salle de gymnastique de l'école avec des feuilles découpées dans du carton vert et avec des feuilles découpées dans du carton jaune. Voilà le modèle des feuilles.



PB1. Lisa a découpé une feuille verte et Tom a découpé une feuille jaune.
Faut-il plus de carton pour la feuille verte ou faut-il plus de carton pour la feuille jaune ? Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse. *(Source : RMT)*

Mathieu possède douze billes, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**, **H**, **I**, **J**, **K** et **L**. Elles ont toutes le même poids, sauf une.

Il a effectué trois pesées sur une balance à plateaux, dont voici les résultats :



PB2. Quelle est la bille qui a un poids différent des autres ? Est-elle plus lourde ou plus légère ?
Expliquez votre raisonnement. *(Source : RMT)*

Matthieu est un automobiliste qui conduit très régulièrement. Il part aujourd'hui en vacances. Il passe par Issy, traverse Labat, puis Pluloin pour arriver à sa destination Bellemer. Sa grand-mère le rejoindra dans quelques jours.
Après son arrivée Matthieu téléphone à la vieille dame pour l'informer sur ses temps de passage :
- Je suis passé à Issy à 8h du matin, à Labat à 8h45 et à Pluloin à 9h30. J'étais à Bellemer à 10h30. Je n'ai commis aucune imprudence et j'ai roulé à la même vitesse sur tout le parcours.
Lorsque la grand-mère fait le même parcours, elle passe à Issy à 9h10 mais n'arrive à Labat qu'à 10h10. Elle se rend alors compte qu'elle va mettre plus de temps que Matthieu mais, vu qu'elle est extrêmement prudente, elle décide de ne pas accélérer et de continuer en maintenant la même vitesse.

À quelle heure la grand-mère passe-t-elle à Pluloin et à quelle heure arrive-t-elle à Bellemer ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

PB3. (Source : RMT)