Organisation et Gestion de Données, cycle III
« *Fil rouge* » : *une entrée par les PROBLEMES*
Etude de quelques questions d'enseignement et Compléments Disciplinaires

Patrick WIERUSZEWSKI
Université Orléans, ESPE CVL, BLOIS
GCD de MATHEMATIQUES

Circonscription ORLEANS Sud
Collège MONTESQUIEU. Avril 2015

RESOLUTION de PROBLEMES : « *fil rouge* » quelques QUESTIONS INITIALES à étudier…

1) Qu'est ce qu'un (*bon !*) PROBLEME (*dans le cadre de la scolarité obligatoire*) ? *Deux exemples emblématiques dans le domaine de la PROPORTIONNALITE* : le parking et son horodateur et « le problème de *DARCOS* ».*Le ton sera donné !*

2) Sa « place » dans les programmes et plus particulièrement dans le domaine OGD.

3) Le « pourquoi » de la résolution de problèmes ? *Bien avant la question du « comment » !* Etude d'exemples OGD.

4) Un exemple et une analyse des problèmes mettant en jeu la *PROPORTIONNALITE*. Classification et typologie.

5) Prospective et perspective : du côté des futurs programmes… Débats…

Qu'est-ce qu'un **PROBLEME**, dans le cadre scolaire ?

Jean Brun, Revue (*suisse*) Math-Ecole, n°41

« C'est une « situation initiale » (*au sens large, donc assez peu précis !*), avec un **but** à atteindre demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but ».

« Il n'y a PROBLEME que dans un rapport « sujet – situation » où la solution n'est pas (*nécessairement*) disponible d'entrée, mais elle est possible à construire ».

*Commentaires **PW.***

(i) Une même « situation » peut être un problème pour un élève et ne l'est pas pour d'autres.

(ii) D'autres acceptions, sur le territoire de la psychologie convergent vers cette « *définition* », qui demande quand même quelques explicitations : « *(…) il faut découvrir des relations, développer des activités d'explorations, formuler des hypothèses, vérifier la ou les solutions produites et enfin mettre en forme cette ou ces solutions (…)* ».

Analyses et exemples contextualisés : *ça vient tout de suite !*

Deux « bons » (*?*) problèmes d'entrée dans la problématique de la PROPORTIONNALITE

EXEMPLE 1.

Stationnement payant (*de luxe, note de PW*). Un horodateur n'indique qu'une seule information : « Une heure pour deux euros ».

Question. Y a-t-il PROPORTIONNALITE ? (*Cf. Fichier GeoGebra*).

EXEMPLE 2. Le problème de DARCOS.

Enoncé.

Sachant que 4 crayons (*identiques, ouf !*) valent 2,42 euros, combien coûtent 14 crayons ?

Consignes PE et PLC. Résoudre cet exercice, justifier la technique employée, proposer alors plusieurs autres techniques de résolution et la justifier.

Où trouve-t-on le « mot » PROPORTIONALITE dans les programmes du primaire (en 2008) ?

Dans le domaine **4 - Organisation et Gestion de Données** ou OGD.

La proportionnalité est abordée à partir des situations faisant intervenir les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, d'agrandissement ou de réduction de figures. Pour cela, **plusieurs procédures** (*en particulier celle dite de la « **règle de trois** »*) sont utilisées.

Remarque. On ne trouve pas le mot « proportionnalité » libellé comme tel dans le domaine **3**, mais les grandeurs au programmes (*les longueurs, les masses, les volumes, les aires, les angles, le repérage dans le temps, les durées, la monnaie*) peuvent fournir des supports pour trouver des exercices mobilisant des compétences liées à la proportionnalité.

SCOOP 2015 : « pistes » renforcées dans les projets…

Articulation de l'animation-conférence en deux PARTIES :
Partie 1) ce qui relève plus spécifiquement de l'OGD : « *it's a long way !* »
Partie 2), *déjà entamée*, ce qui relève de l'étude de la PROPORTIONNALITE.

L'objectif de l'OGD, à partir du Primaire jusqu'à la fin du Lycée, doit pédagogiquement être pensé en termes de « formation » du futur citoyen adulte qui devra décrypter l'abondante « information » à laquelle il sera confronté.

Du coup, quelles spécificités au Primaire ? *Une réponse* : un regard du côté des programmes du collège : *Cf. diapositive suivante.*

SCOOP 2015 : le « nouveau » cycle III propose des pistes commune à l'articulation ECOLE – COLLEGE, mais le « domaine » OGD n'est plus un domaine à part entière (*Deux parties : NOMBRE et CALCUL et ESPACE et GEOMETRIE*)…

- d'une part de <u>continuer</u> à initier les élèves de collège à la <u>lecture</u>, à <u>l'utilisation</u> et à la <u>production</u> de tableaux, de représentations graphiques. *<u>Donc : SUITE du Primaire…</u>*

- d'autre part de mettre en place les premiers outils de la statistique descriptive, en particulier la notion de résumé statistique à partir de l'étude de quelques caractéristiques de position et de dispersion. *<u>SPECIFICITES du Collège…</u>*

Enfin, dans les programmes 2008, *toujours en vigueur*, essentiellement au cycle III, on distingue clairement les activités « propres » d'OGD de l'utilisation en acte des compétences des élèves concernant l'OGD pour résoudre des problèmes.

Comment cette distinction est-elle prise en compte dans les fichiers et dans les manuels ? <u>Une piste de travail</u> : analyse de manuels…

Qui dit OGD, dit DONNEES, avant ORGANISATION et GESTION, et donc ?

Question : qui les donne ces données à « *organiser* » et à « *gérer* » ?

Principe pédagogique : la « fabrication », la constitution d'une banque de données fait partie intrinsèque du « chapitre » OGD.

Question pour le PE : quelles données pour quels traitements, au cycle III ?

Quelques définitions « communes »…

L'OGD ont pour but de permettre d'accéder le plus rapidement possible à une (*certaine*) « information » afin de pouvoir l'utiliser pour réfléchir ou agir.

En situation scolaire, il s'agit donc d'apprendre progressivement à trier des données, à les classer, à lire ou à produire des tableaux, des graphiques et à les analyser.

Le « TABLEAU ». Tout le monde croit savoir, mais y a t-il UNICITE de forme d'un « tableau » (*classique et générique*) ?

<u>Quelques exemples emblématiques </u>: *quadrillages droits et obliques, réseaux à mailles quadrillées, pointées et jeux, « vrais » tableaux « à double entrée », fenêtres d'écran et feuilles de calculs, jeux (Rush Hour, …), …*

Fonctions d'un tableau (*classique et générique*).

Un tableau sert essentiellement à organiser des données ou à y accéder rapidement à partir du moment où on sait l'ordonner et le lire !
Généralement, il possède des *LIGNES* et des *COLONNES*.

Oui, mais, le fait de présenter et donc d'organiser des « données » dans un tableau les met aussi en regard et donc, dirige et commande d'une certaine manière les relations directes et moins directes non nécessairement vues à la lecture des données brutes.

Important d'un point de vue didactique et pédagogique !

REPERAGE
Ligne et Colonne ;
Intersection ligne-colonne ;
Case et Nœud ;
Complétion ligne, colonne ;
Traitement des
« informations » ; …

LECTURE
Tout ce qui concerne le
REPERAGE ;
Changement de registres =
« mise en mots » ;
Recherche de la bonne
information ; …

Bon, quelques idées pratiques : un résumé de l'essentiel des tâches liées à l'étude d'un « tableau ».

- LIRE directement des « informations » dans un « tableau ».
- LIRE directement des « informations » dans un « tableau », puis <u>REPONDRE</u> à des questions à l'aide de CALCULS.
- LIRE directement des « informations » dans un « tableau », puis TRIER des « informations », en fonction du statut du nombre (*nombre-code*, *nombre-scalaire*, *nombre-grandeur*, *nombre-variable*, …).
- COMPLETER un « tableau » : TRIER, ORGANISER, CALCULER, …

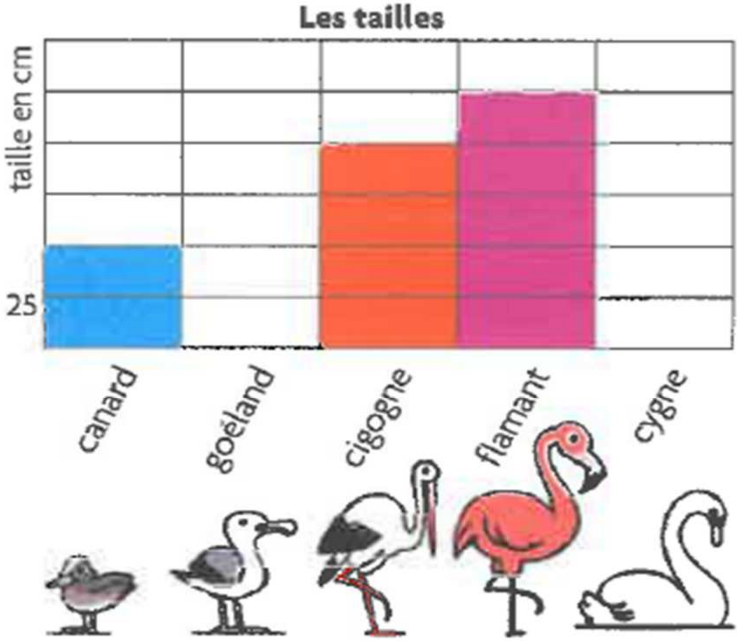
Début de CE2…

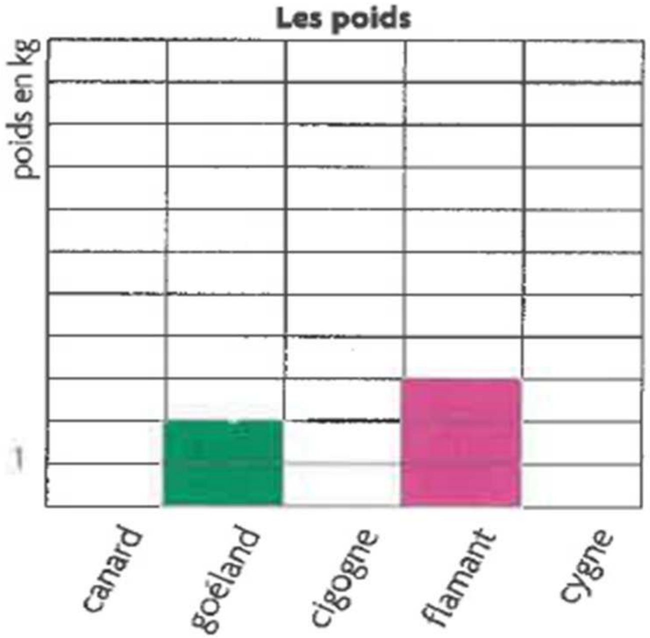
Manuel Cap Math CE1

Lire un tableau et un graphique

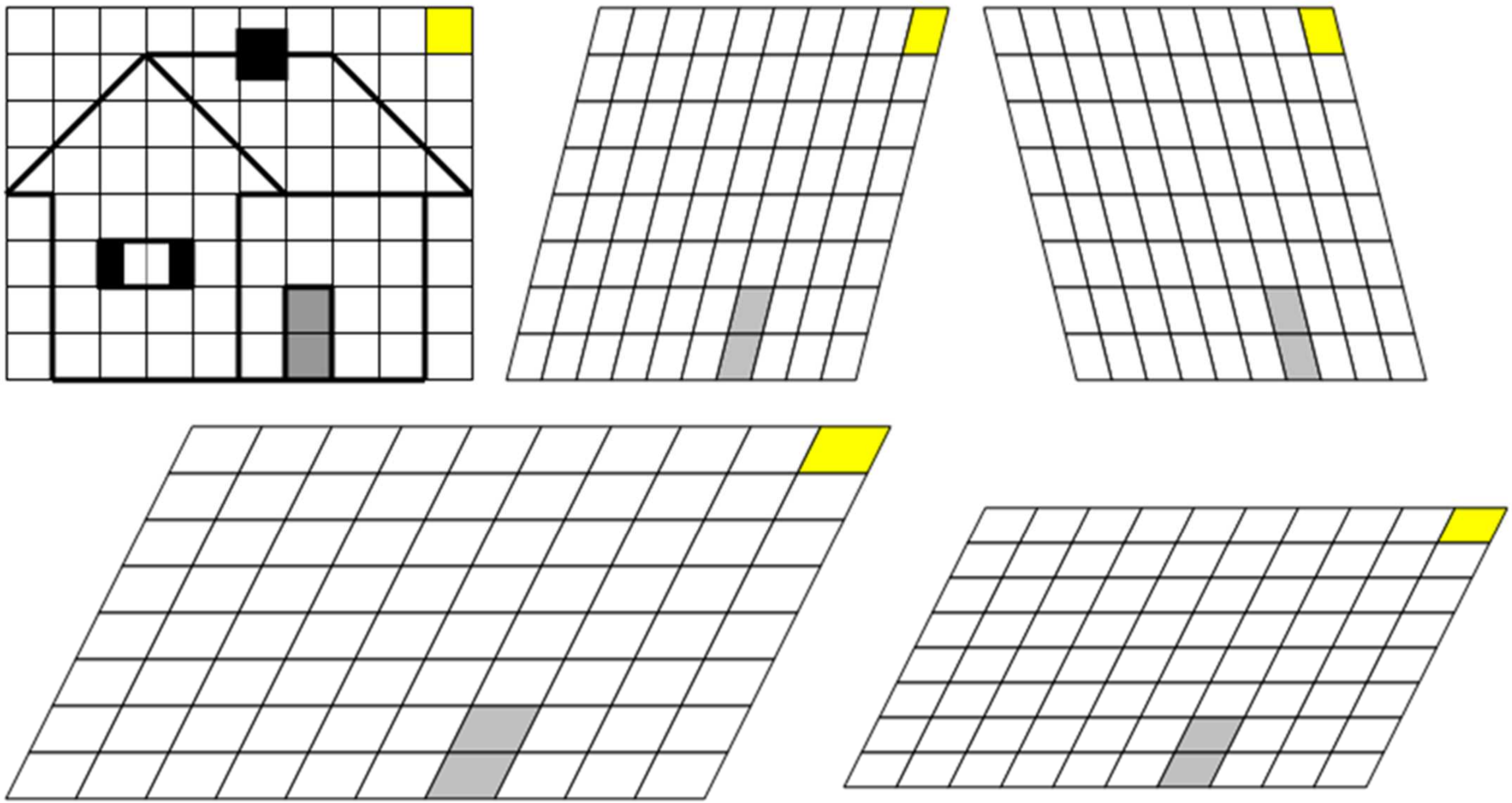
1 **Complète** le tableau et les deux graphiques.

	taille	poids	longévité
Cigogne blanche		3 kg	26 ans
Canard à front blanc	50 cm	1 kg	19 ans
Cygne tuberculé	75 cm	10 kg	20 ans
Flamant rose			13 ans
Goéland marin	75 cm		20 ans

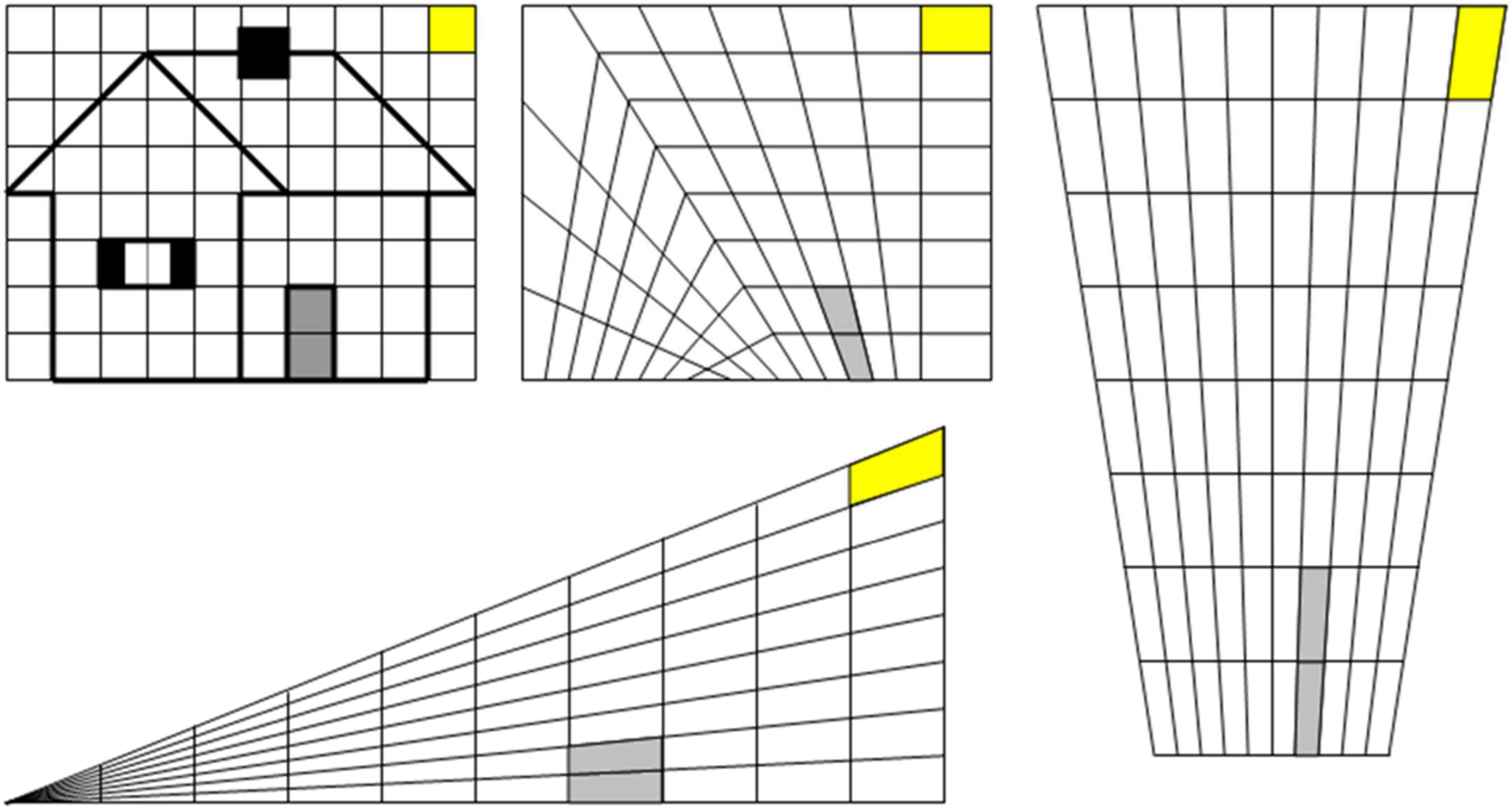




Bon PROBLEME : *pourquoi* ?



Source : J. MUELLER, IUFM de Strasbourg, ALSACE



Et pourquoi pas dans un quadrillage autre qu'un quadrillage, hihihi ? Cf. dernière diapositive

Du côté des « GRAPHIQUES ». *Double statut : objet-outil.*

Dynamique complémentaire et duale de tout travail avec les « tableaux ». On est dans un *rapport dialectique*…

- Le GRAPHIQUE pour une <u>autre</u> représentation plus visuelle des données d'un « tableau ». C'est la dimension « outil ».

Le graphique permet ainsi d'obtenir une autre perception des données dont découle une comparaison visuelle immédiate.

Attention à l'illusion du mieux VOIR des « choses » sur un graphique que de bien LIRE et de bien VOIR dans un « tableau » !

Cf. les enquêtes PISA et autres…

- Le GRAPHIQUE pour lui-même : « objet » possédant des particularités à étudier. De fait, le « passage » du tableau au graphique ou au diagramme permet d'introduire ce qu'on l'ANALYSE des DONNEES…

Un exemple d'exercice non scolairement classique.

A partir d'un texte linéaire, réaliser tableaux graphiques et diagrammes d'après des informations selon des critères à définir et à fixer. Dispositif de classe : demi-classe en « émetteur-récepteur ».

Pat doit suivre un régime alimentaire. *Et oui, le pauvre !* Son médecin lui a fourni une liste d'aliments avec l'indication, pour 100g de ces aliments, du nombre de calories de la masse (en g) de sucre et de graisse.

- 100g de pain de régime contiennent 57g de sucre, 1g de matière grasse et « fournissent » 262 calories ;
- 100g de lait « fournissent » 67 calories et contiennent 5g de sucre et 4g de matière grasse ;
- 100g de beurre contiennent 1g de sucre, 81g de matière grasse et « fournissent » 735 calories ;
- 100g de spinachs contiennent 3g de sucre, pas de matière grasse et « fournissent » 24 calories ;
- 100g de pomme, aliment sans graisse, contiennent 13g de sucre et « fournissent » 57 calories ;
- Et enfin, 100g de chocolat contiennent 30g de matière grasse, 62g de sucre et « fournissent » 526 calories.

Consignes…

On attaque maintenant la deuxième partie : PROPORTIONNALITE et « Règle de Trois »

Petit quart d'heure théorique : une « classification » opératoire des problèmes de proportionnalité suivant la nature de la question. (*Note de PW* : choix distinct de la modélisation de VERGNAUD).

Source : «***Décalages cognitifs dans les problèmes de proportionnalité, …*** », *1987, thèse de E. KOLEZA-ADAM.*

… *EKA* définit trois types de problèmes à support numériques relevant de la PROPORTIONNALITE.

(*Note de PW : il n'y a pas que les problèmes à support numériques qui relèvent de la PROPORTIONNALITE ! Autre point : importance des aspects langagiers dans tout problème de PROPORTIONNALITE*).

(*i*) Les **P**roblèmes à **V**aleur **M**anquante (**PVM**), (*ii*) les **P**roblèmes de **C**omparaison (**PC**) et (*iii*) les **P**roblèmes de **P**artage **P**roportionnel (**PPP**).

Des exemples, oui, tout de suite : Cf. diapositives suivantes…

Problème **PVM**.

Exemple emblématique, le problème de DARCOS

En effet, le problème de Darcos est un **PVM**. L'énoncé propose généralement deux parties.

(i) Mise en relation de deux grandeurs numériques (*par exemple* : quantité et prix) qui « téléphonent » la proportionnalité.

(ii) Apparition de la question demandant une valeur manquante, après introduction d'une troisième valeur numérique.

Très souvent, la technique de traitement attendue est « la règle de trois », ou quelque chose qui y ressemble…

Et donc, il va falloir qu'on s'y intéresse à cette règle !

(Manuel *EuroMath*, CM2, Hatier, *après 2008*). **PVM** ou ?

1) 17 DVD coûtent 204 euros. Quel est le prix de 23 DVD ?
2) 6 jeux vidéo identiques coûtent 150 euros, donner le prix de 8 jeux, en déduire le prix de 7 jeux ? … *Techniques ?*

Problème **PC**.

La situation des mélanges. Lequel est le plus sucré : 50 cL avec 10 g de sucre ou 40 cL avec 6 g de sucre ? *Technique ?*

Autres problèmes du même type.
(Manuel *CapMath*, CE2, Hatier, *après 2008*).

TIM fait des pas beaucoup plus grands que les sauts de PIAF. En effet, quand TIM fait deux pas, PIAF doit faire cinq sauts pour parcourir la même distance.

1) Si TIM fait 14 pas, combien de sauts PIAF doit-il faire ?
2) Si TIM fait 180 pas, combien de sauts PIAF doit-il faire ?
3) Si PIAF fait 60 sauts, combien de pas TIM doit-il faire ?
4) Si PIAF fait 730 sauts, combien de pas TIM doit-il faire ?

Dernière « famille » : les problèmes **PPP**.

A l'issue d'une année de travail, on doit partager une prime ***S*** en ***n*** personnes, en fonction de l'ancienneté de chacune d'elles… *Techniques ?*

La PROPORTIONNALITE en pratique : échelles, pourcentages, agrandissements et réductions…

Un principe pédagogique : préférer le raisonnement contextuel à l'application (*trop*) directe de techniques trop « luxueuses »…

ECHELLES : en fait, il y a surtout beaucoup de zéros à traîner. Les difficultés résident moins dans la notion d'échelle que dans les changements d'unités. D'où…

Tâches : appliquer une échelle, déterminer une échelle… Une question : est-ce que toutes les échelles s'expriment sous la forme $1/n$ ou 1u pour ***n***u' ; et les échelles « entières » ?

POURCENTAGES : idem paragraphe précédent, difficultés et tâches… Une piste : et les fractions décimales, ah, oui, j'y avais pas pensé ! *Un point délicat* : pourcentage de majorations ou pourcentage de réductions…

AGRANDISSEMENTS et REDUCTIONS ou l'invasion de la GEOMETRIE par la PROPORTIONNALITE.

La clef théorique : l'énoncé de Thalès.

Quelques exemples.

Un rectangle de dimensions ***a*** et ***b*** est-il un agrandissement ou une réduction d'un autre rectangle de dimensions ***x*** et ***y***.

Un rectangle est donné, construire un rectangle ***n*** fois plus grand ou ***n*** fois plus petit. Idem pour un triangle ou une autre figure usuelle.

Effet d'un doublement des dimensions d'un rectangle sur les périmètres, sur les aires…

Pour terminer ce paragraphe, deux problèmes moins scolaires, qui mobilisent la PROPORTIONNALITE, sans le dire…

Cf. les deux diapositives suivantes.

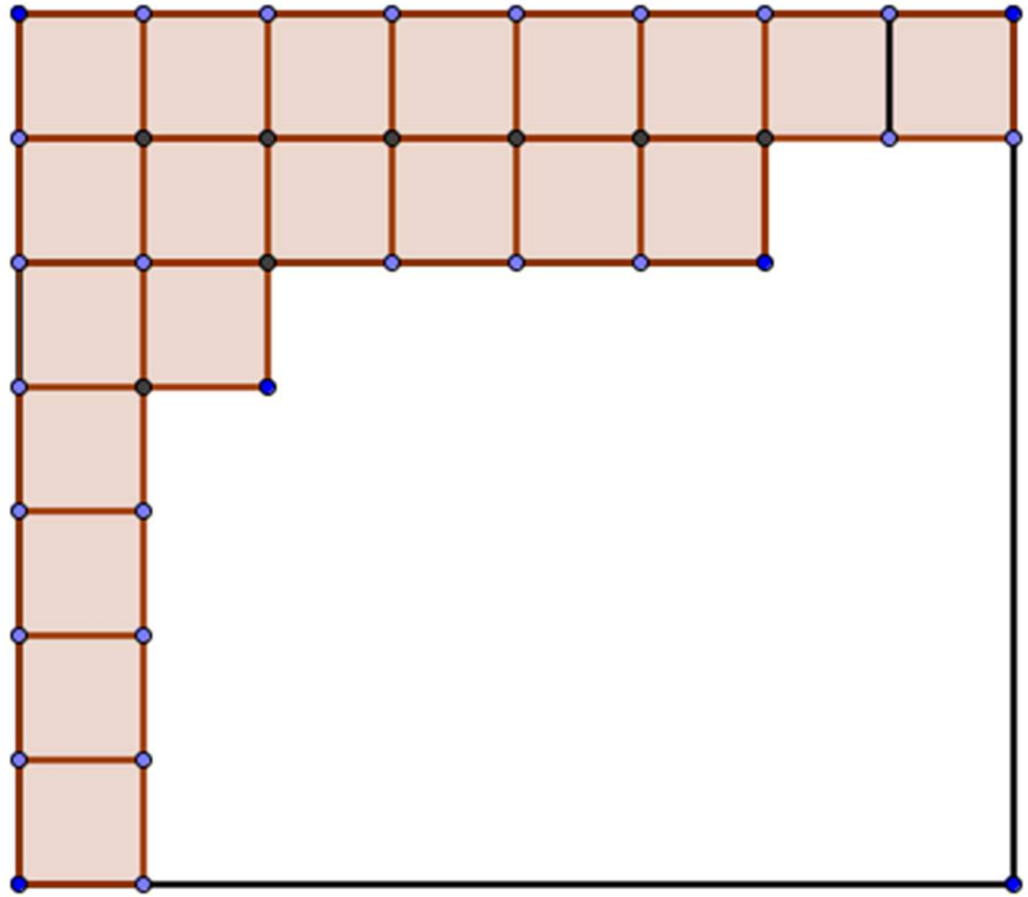
Le carrelage

Voici le plan d'une chambre (*rectangulaire*) dont le sol doit être carrelé. Il a fallu trois heures pour poser les carreaux coloriés.

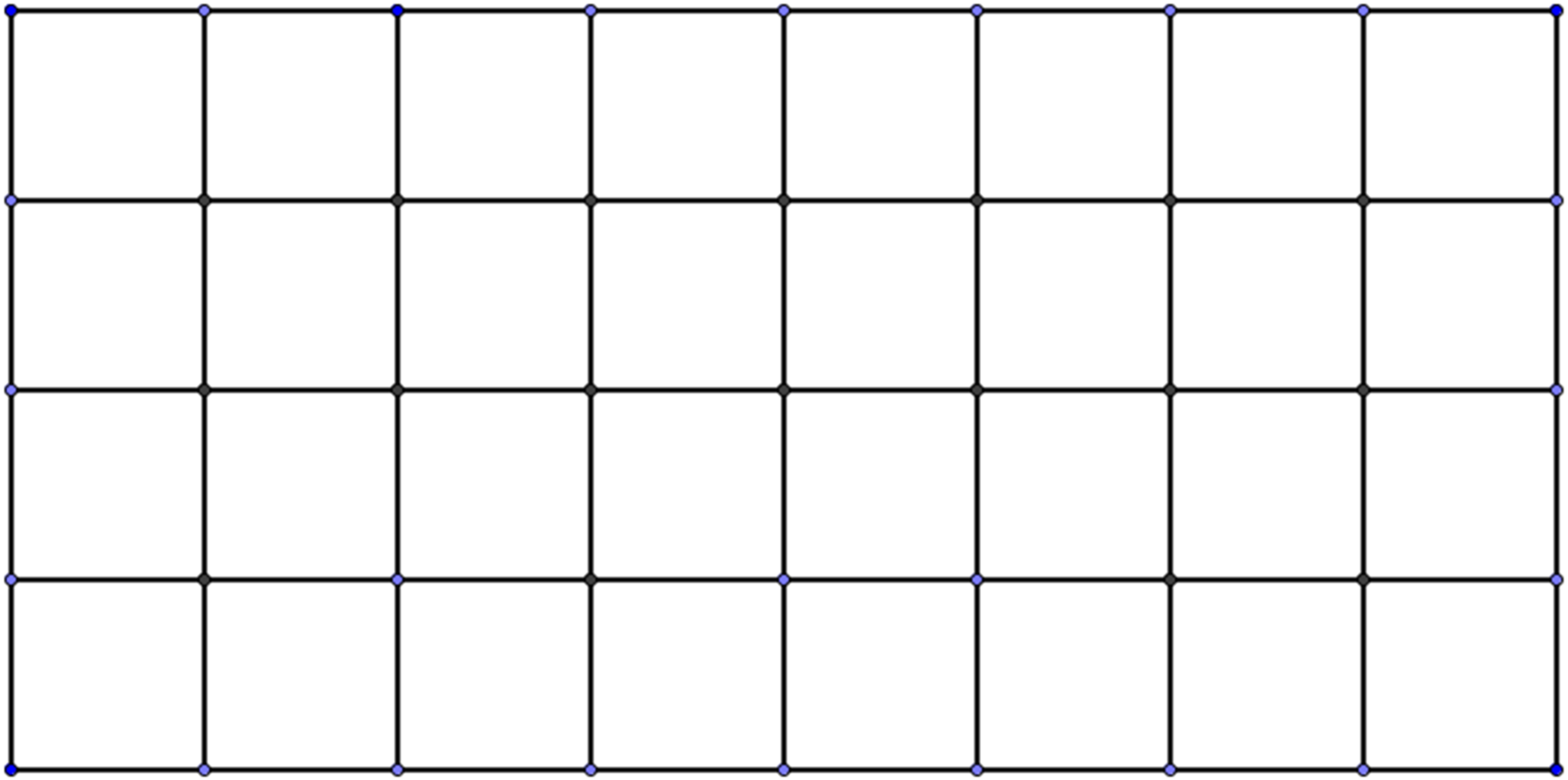
__Question.__

Combien de temps faut-il pour finir l'ouvrage ?

(« Points de Départ », revue Grand N).



Le chocolat. Cette tablette de chocolat pèse 200 g. On a besoin de 75 g pour réaliser une recette de cuisine. Quelle quantité doit-on prendre ? (*COPIRELEM*).



La REGLE de TROIS. On y est !

HYPOTHESE : la « règle de trois » est corrélée à la période où on l'a enseigné et du coup, comment on l'a apprise.

Le « poids » de l'HISTOIRE assume ainsi une vraie responsabilité ! (*Contribution de H. PLANE*).

Tout le monde croit savoir, mais qui sait vraiment ?

Une première acception. On appelle « règle de trois » TOUT PROBLEME de proportionnalité (*directe ou inverse*). Dans ce cas, la « règle de trois » n'est pas une méthode ou une technique de résolution, mais elle désigne une classe ou une « famille » de problèmes (*ceux dont le traitement relève de la PROPORTIONALITE !*).

Ben oui , évidemment !

Cours Abrégé d'Arithmétique. Carlo BOUCHET, Hachette, 1910.

… « (788). *Définitions*. Une règle de trois est un problème dans lequel il s'agit d'une grandeur qui est directement ou inversement proportionnelle à plusieurs autres. On connaît la valeur de cette grandeur qui correspond à des valeurs données de celles dont elle dépend, et il s'agit de calculer une seconde valeur de cette même grandeur, correspondant à d'autres valeurs données de celles dont elle dépend » …

Commentaires PW « 1910 ».

Une « règle de trois » est donc un problème qui met en jeu plusieurs grandeurs, on ne dit pas combien. Ensuite, on ne doit calculer qu'une seule autre valeur, sans dire « comment ».

Enfin, cette « définition » (*au pluriel*) peut paraître lourde à apprendre, mais elle permet d'identifier une classe de problèmes, sans donner le « moyen » de les identifier.

(…) Ecoles Primaires Supérieures. J. BOITEL, Colin, 1930.

… ON APPELLE « *RÈGLE DE TROIS* » LES PROBLÈMES QUE L'ON PEUT RAMENER AU CALCUL DE L'UN DES TERMES D'UNE PROPORTION CONNAISSANT LES *TROIS* AUTRES. IL S'AGIT GÉNÉRALEMENT DE DEUX GRANDEURS DIRECTEMENT OU INVERSEMENT PROPORTIONNELLES DONT DEUX VALEURS DE L'UNE SONT CONNUES ET UNE VALEUR SEULEMENT DE L'AUTRE GRANDEUR. SI LES DEUX GRANDEURS SONT DIRECTEMENT PROPORTIONNELLES, LA RÈGLE DE TROIS EST *DIRECTE*. …

Commentaires PW « 1930 »

La « règle de trois » désigne ici aussi un problème, avec une référence explicite au nombre de données en jeu. On précise la définition dans le cas direct, pas dans d'autres cas. Cette définition ne propose pas de méthode ou technique de résolution d'un tel problème.

<u>Une deuxième acception</u>. (*Elle est plus restrictive*).

On nomme « règle de trois » tout problème de recherche d'une <u>quatrième proportionnelle</u>, résolu par une technique mobilisant de façon explicite les (*fameux*) « produits en croix », en écrivant des égalités de quotients. On peut « résumer » cette technique par une sorte de « formule passe-partout » du style :

« truc fois bidule divisé par machin ».

Extrait d'un texte, *réécrit en français actuel, ouf*, datant de 1690.
Oui, oui, 1690. (Auteur : F. Le Gendre).

... LA RÈGLE DE TROIS EST FORT FACILE, POURVU QU'ON SACHE BIEN LA MULTIPLICATION ET LA DIVISION ; CAR ORDINAIREMENT IL N'Y A QU'UNE MULTIPLICATION ET UNE DIVISION À FAIRE.

POUR LA FAIRE, MULTIPLIEZ SEULEMENT LES DEUX DERNIERS NOMBRES ENSEMBLE, DIVISEZ CE QUI VIENDRA PAR LE PREMIER ET VOTRE RÈGLE SERA FAITE. ...

Commentaires PW « 1690 »

La règle de trois est donc « facile », mais elle ne se réfère pas à une classe de problèmes particuliers : pas de référence explicite à la proportionnalité ! Elle se résume à l'effectuation de deux opérations dans un ordre donné. Tout est facile, ordinaire, et simple du moment qu'on « sait » la multiplication et la division ! On ne dit rien sur comment savoir qui sont les premiers et qui sont les derniers nombres ?

De la règle de trois, simple. « Article » de (*Frère ?*) P. Silvestre (~ 1787 – 1818)

(…) (**177**). La règle de trois est une <u>opération</u> par laquelle on cherche le terme inconnu d'une <u>proportion</u>. Quand une question exige une « règle de trois », <u>elle renferme quatre termes</u>, dont trois sont connus. Deux de ces quatre termes sont causes des deux autres qui en sont les effets.

On regarde comme première cause celle dont l'effet est connu, et réciproquement.

La règle est « droite » quand les causes se contiennent dans le même ordre. …

<u>Commentaires PW « 1787 – 1818 »</u>.

La référence à un type de problèmes est explicite : on parle de proportion. Les nombres en jeux (termes) sont mis en relation causale, on fait référence à une réciproque dans cette relation. La technique de calcul n'est pas décrite.

Une troisième acception.

(Plus « proche », milieu et fin du Vingtième Siècle).

Cette version associe l'expression « la règle de trois » à la recherche d'une quatrième proportionnelle, mobilisant essentiellement la méthode du « passage à l'unité ».

Commentaires PW.

- Passage à l'unité « = » ou « ≠ » Retour à l'unité.
- Apparition d'un rite immuable : le raisonnement se fait par étapes, toujours les mêmes…

D'où la question !
Finalement, c'est quoi la « règle de trois » en 2015, avant les nouveaux programmes ?

Le point sur la « Règle de Trois » (*ainsi bien nommée !*).

On reparle et on repart du problème de DARCOS.

Utilisation de la langue naturelle : cette « règle » et ses dérivées sont parlées, voire mimées, tout autant qu'elles sont écrites.

« ***Que cherche-t-on ? Un prix, OUI.***
Que sait-on sur les prix ? … »

- Procédure 1 : « **le retour à l'unité** ». On paie 2,42 € pour 4 crayons. Donc pour 1 crayon, il en faut 4 fois moins, c'est-à-dire 2,42 ÷ 4 ; soit 0,605 €. Pour 14 stylos, on paiera 14 fois plus, c'est-à-dire 0,605 € × 14 ; soit 8,47 €.

On calcule effectivement le prix à l'unité, sans s'occuper de ce que « représente » ce prix.

Procédure 2 : « **la règle de trois** ». Elle diffère de la procédure 1 par la présentation et par l'ordre dans lequel les calculs sont conduits. On paie 2,42 € pour 4 crayons. Donc pour 1 crayon, il en faut 4 fois moins, c'est-à-dire 2,42 ÷ 4. On écrit alors un premier calcul in

$$\frac{2{,}42\text{ €}}{4}$$

Pour 14 stylos, on paiera 14 fois plus. D'où le calcul terminal :

$$\frac{2{,}42\text{ €} \times 14}{4}$$

Remarque. Et un, et deux et trois : les trois étapes immuables des années « *19du* ». Pour la commodité des calculs, on simplifiait (*si possible*) la « fraction » avant , puis, on effectuait (*presque toujours*) la multiplication en premier. *« Technique de calcul » souvent imposée par le maître ! Pourquoi ?*

D'où quelques pistes pédagogiques à exploiter au primaire

1) Rendre explicite et faire émerger les représentations et les conceptions des élèves sur l'idée de **rapport** ou de **proportion**.

Par exemple, on change les proportions d'une figure en augmentant ou en diminuant ses dimensions d'une même longueur. Par contre, on ne change pas ses proportions en multipliant ou en divisant ses dimensions par un même nombre.

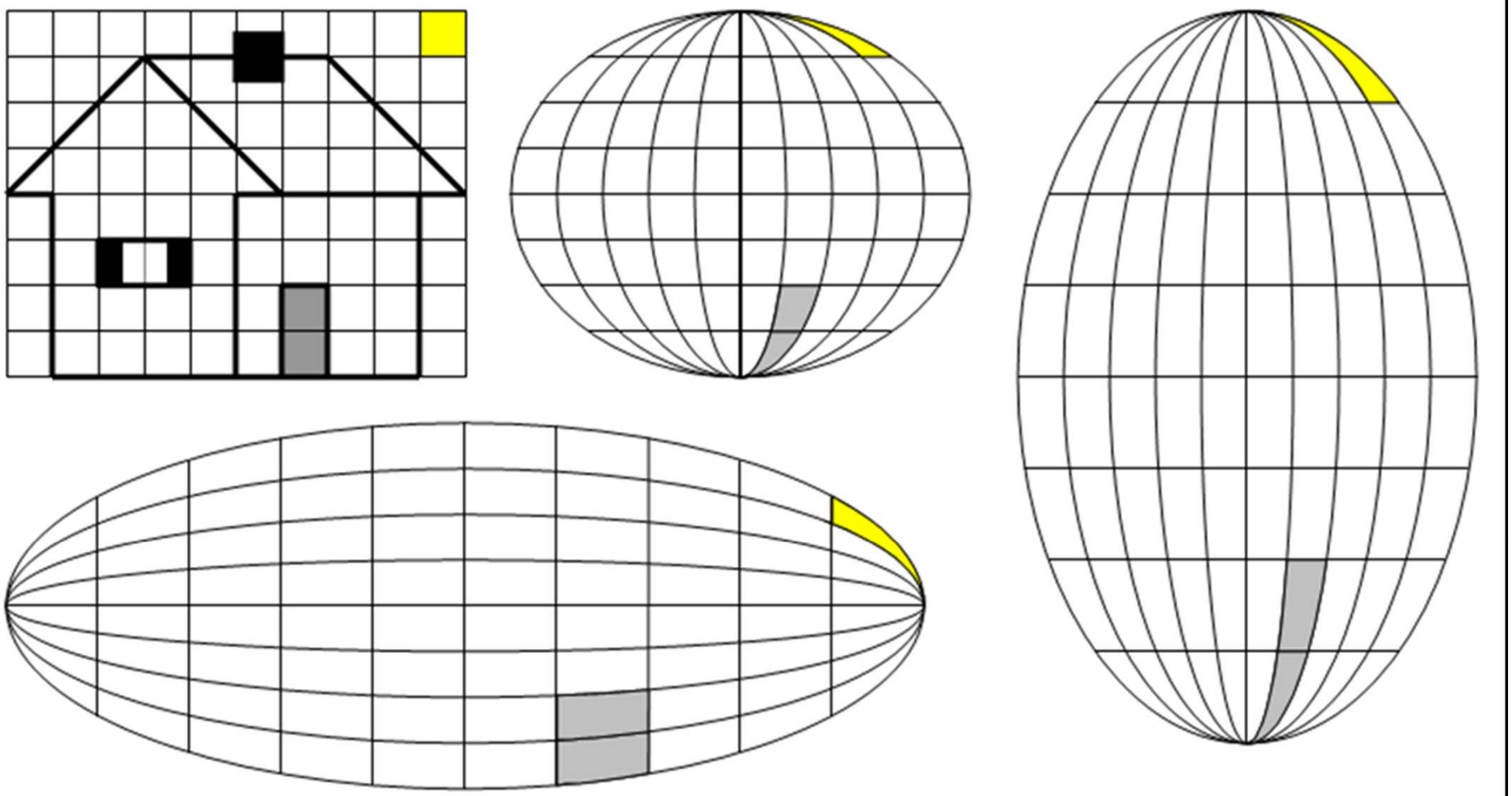
2) *Conséquence du 1).* Munir les élèves d'outils (*opérateur multiplicatif ou divisif, propriétés de la linéarité*) leur permettant d'agrandir ou de réduire, en respectant les proportions.

3) La proportionnalité s'applique à un grand nombre de situations qu'on peut la voir « partout » ! D'où l'intérêt des **contre-exemples**.

4) Développer des aptitudes à utiliser « le raisonnement proportionnel », en mathématiques et dans la vie courante (*échelles, pourcentages, représentations graphiques, …*).
5) Exploiter (*très souvent*) les locutions : « Tant de fois plus », « Tant de fois moins ».

Commentaires ***PW***

- On « transporte » facilement ces pistes au collège et au futur cycle IV : ce sont les mêmes, avec des possibilités supplémentaires liées aux nouveaux nombres rencontrés.
- **Notions mathématiques** sur lesquelles on peut travailler la PROPORTIONNALITE :
  - Produit des nombres décimaux.
  - Produit de grandeurs, dans le domaine des aires, des capacités ou … (*Sans présager des difficultés du PE liées à l'enseignement-apprentissage de ces notions !*).



Merci ! Pour tout renseignement complémentaire :
patrick.wieruszewski@univ-orleans.fr