Les « nouveaux » nombres au cycle III
FRACTIONS et NOMBRES DECIMAUX
Quoi de neuf ?

Patrick WIERUSZEWSKI
Université Orléans, ESPE CVL, BLOIS
GCD de MATHEMATIQUES

BLOIS, Novembre 2017

Parti pris « théorique » pour cette animation-intervention, identique aux précédentes !

1) Une approche de type « constructiviste » :

- Apprentissage par « adaptation » ;
- Apprentissage dans le cadre de l'école : rôles des « pairs » et rôle du ***PE***, …

2) Une entrée (*résolument*) « didactisée » :

- Analyse « *multicritérielle* » et *disciplinaire* des ***CONTENUS*** à enseigner (*entrée première !*) ;
- Analyse des relations entre *enseignement* et *apprentissage* ;
- Etude de l'existant : (éléments) d'analyses de manuels et de fichiers, analyses de productions des élèves, analyses de certaines « préparations » du ***PE***, (*classique*) ;
- Utilisation d'éléments « simples » de deux ***modélisations*** des phénomènes d'enseignement, à partir de deux théories fondatrices : La Théorie des Situations Didactiques ou ***TSD***,
  La Théorie Anthropologique du Didactique ou ***TAD***, …

SOMMAIRE, parsemé de quelques « friandises », as usual !

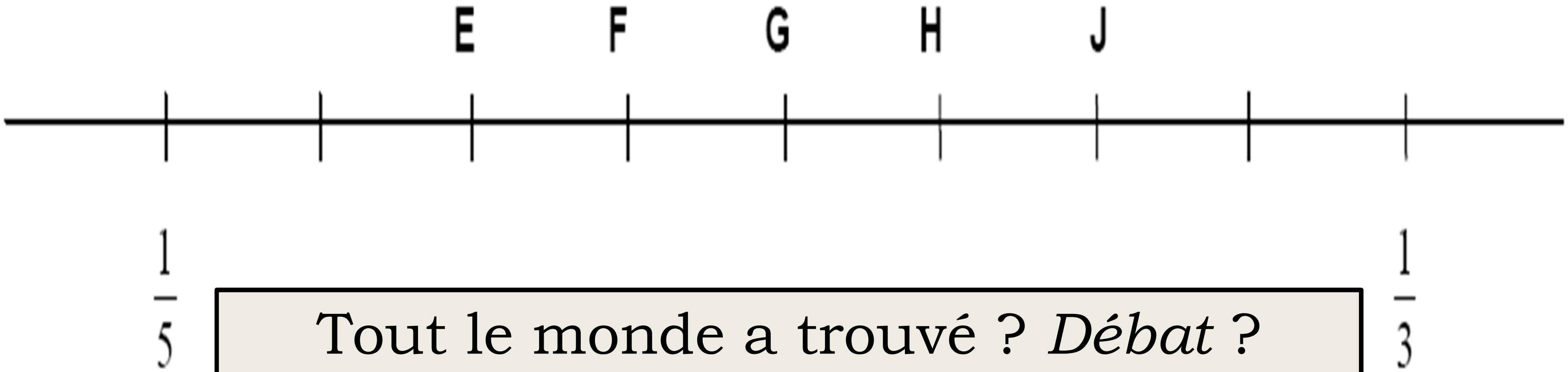
- La NUMERATION à l 'articulation cycle II – cycle III, quelques mises au point théoriques : les aspects incontournables à prendre en compte dans l'enseignement (*diapositive 9*);
- Les fractions : genèse et pistes d'enseignement (*diapositive 14*) ;
- Les nombres décimaux : genèse et pistes d'enseignement (*diapositive 29*) ;
- Retour à la NUMERATION : « *koi de neuf* » pendant le cycle ; modulo les types de tâches idoines ?
- Supports d'études : quelles situations privilégier ? Friandises. Prolongements : CALCUL et RESOLUTION de PROBLEMES, next ! Cf. diapositives ANNEXES (*à partir de la diapositive 43*).

Une fois n'est pas coutume !
On commence par une BIBLIOGRAPHIE-SITOGRAPHIE (1) restreinte et sélective…

- Les programmes officiels, *of course* ! *D'aujourd'hui* et *d'avant*, y compris les documents spécifiques déposés sur le site *Eduscol.*
- « *Le Nombre au cycle II* » et « *Le Nombre au cycle III, apprentissages numériques* », ressources pour la classe, réseau SCEREN-CANOPE. (*Durpaire, Mégard et al.*).
- La conférence de consensus : « *Nombres et Opérations* » CNESCO, IFE-Lyon, réseau national des ESPE et réseau CANOPE. *Document* : « Recommandations du Jury ». 2015.

« Friandise » : *peut-être difficile, mais on n'a rien sans rien !*

II. La droite ci-dessous est graduée régulièrement. Les rationnels $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{3}$ sont placés sur cette droite. Parmi les points **E**, **F**, **G**, **H** et **J**, quel est celui dont l'abscisse est exactement $\frac{1}{4}$? Justifier.



Tout le monde a trouvé ? *Débat* ?
On y reviendra un peu plus tard, *ouf* !

<u>Questions Initiales et (*premiers*) débats…</u>

- Donner les principales EVOLUTIONS au niveau des <u>connaissances mathématiques</u>, en termes de « <u>ruptures</u> » et de « <u>continuités</u> », avec les NOMBRES ENTIERS quand on s'intéresse aux « NOUVEAUX NOMBRES » (les « <u>*fractions* »</u> *et les <u>nombres décimaux</u>*) au *nouveau* cycle III ? *Argumenter*.

- ~~Pour aller plus loin, du côté du collège : même question quand on s'intéresse aux « nouveaux nombres » (*nombres relatifs*) du collège.~~

- ~~Pour aller encore plus loin, du côté du lycée : même(s) question(s) quand on s'intéresse à TOUS les nombres…~~

- Tâche post-animation : analyser les programmes 2016 et le Socle, à la lumière des « réponses » apportées ci-après.

Pistes de réponse aux QUESTIONS INITIALES (*Charnay*)

Des nombres entiers (*naturels*) aux nombres décimaux, à partir du CM1, jusqu'à la classe de sixième de clg, et bien après… :

- renoncer à l'idée de nombres qui se « suivent » ;
- accepter l'intercalation « sans fin » ;
- accepter qu'un nombre possède plusieurs écritures, non nécessairement « *ressemblantes* ». *Commentaires…*

Passage aux « fractions », puis aux « fractions-quotients » (*clg*) :

- accepter qu'un nombre ne s'exprime pas nécessairement par une suite finie ou déterminée de chiffres. *Redoutable jusqu'au lycée et même après !*

Corollaire. Du côté des « Techniques Opératoires » : enseigner et apprendre de « *nouvelles* » techniques à partir des techniques plus anciennes. Quel est alors le problème du *PE* ?

~~Au Collège. Passage aux nombres négatifs :~~

- ~~renoncer au fait qu'un « nombre » exprime une quantité ou la mesure d'une grandeur. *A suivre !*~~

CONSEQUENCE : nécessité de restructurations des connaissances mathématiques sur les NOMBRES, en particulier pour les opérations et par extension pour la résolution de problèmes.

L'objet de cette animation-conférence est de s'intéresser prioritairement aux (nouveaux) NOMBRES !

Point de départ de cette longue et lente conquête : les essentiels et les incontournables des deux cycles I et II.

RECOMMANDATIONS de la « conférence CNESCO-IFE » :

R7 – *Lors de l'apprentissage des mots désignant les nombres, il importe de les associer à différentes représentations* ;

R8 – *Les pratiques régulières et variées de composition/décomposition de petites collections doivent être favorisées, car elles permettent de donner du sens aux nombres et d'approcher les notions d'addition et de soustraction* ;

R11 – *L'acquisition du système de numération décimale de position est fondamentale pour les apprentissages numériques.*

NUMERATION DECIMALE (et) de POSITION
analyse des deux « qualificatifs » et déclinaisons : il faut les deux !

- A quoi renvoie « *DECIMAL(E)* » ? L'aspect décimal renvoie aux relations « décimales », *de fait*, entre unités de NUMERATION. Cet aspect est mobilisé en acte par les élèves dès la moindre tâche de conversion (= OPERATION : *à mettre en évidence !*). Cet aspect est caractéristique du système de NUMERATION choisi : NUMERATION BINAIRE ; NUMERATION SEXAGESIMALE ; …

- L'aspect *POSITIONNEL* est mobilisé pour des tâches de codage, décodage, encodage, … le nombre de groupements correspondant à un rang donné dans l'écriture décimale usuelle. Le lien entre position et unité définit cet aspect. Rôle du zéro…

- Un exercice, trois items à analyser :

<u>Item 1</u> : « *Je suis un nombre entier. Mon chiffre des unités est « 5 » et mon nombre de centaines est 27* ». Je suis : ?

<u>Item 2</u> : « *Je suis un nombre entier. Je suis constitué de 27 centaines et de 205 unités* ». Je suis : ?

<u>Item 3, avec la caltosss</u> : « *Afficher directement 438 ; afficher alors 478, sans effacer, en utilisant le minimum de touches* ».

Les ASPECTS fondamentaux et incontournables, bis de la *NUMERATION décimale de position*

La question est : quelle construction du NOMBRE (*OUTIL et OBJET*) à tous les niveaux de classe de l'école au lycée ?

1. Aspect dit « algorithmique » ;
2. Aspect lié aux « groupements » ou aux « paquets » ;
3. Aspect lié aux « échanges » ;
4. Aspect dit « opératoire » : *numération* et *calcul*, une première liaison forte ; *résolution de problèmes*, une deuxième liaison forte.

Note de *PW* : *aspect NON développé dans cette animation-conférence et pourtant !!! Next…*

Aspect dit « *algorithmique* »

Type de tâches à explorer et compétences à construire :

1. Produire et faire produire des suites orales ou écrites. *Cycles II et III.*
2. Comparer des nombres, ranger des nombres.
3. Ecrire des encadrements.
4. Situer des nombres sur un axe gradué (*précisément ou approximativement*). ESSENTIEL !

Commentaires *PW* : « nature » des NOMBRES…

Aspect « *groupements* » ou « *paquets* »

Type de tâches et compétences à développer :

1. Structurer des collections où l'idée de « *mettre en paquets* », où regrouper, est nécessaire, voire essentielle pour dénombrer. *Spécial cycle II.*

2. Donner du sens aux notions de « *chiffre de* » et « *nombre de* ». *Très délicat au cycle II et au cycle III et après !*

3. Faciliter l'accès aux décompositions *<u>variées</u>* par rapport à la base 10.

4. Donner diverses décompositions d'un nombre en utilisant 10, 100, 1000… Idem avec $0{,}1 = \frac{1}{10}$; $0{,}01 = \frac{1}{100}$; $0{,}001 = \frac{1}{1000}$ … Idem avec 10 et 0,1, …

5. Retrouver rapidement l'écriture chiffrée d'un nombre à partir de sa *décomposition canonique*, mais aussi à partir de *toute autre décomposition* (*indépendamment du « mode » ou des « formats » d'écriture*). Donner du sens au vocabulaire spécifique lié aux nouveaux nombres (*N et D d'une fraction ; PE et PD d'un nombre décimal*).

Aspect « **échanges** »

<u>Type de tâches et compétences à développer.</u>

1. (*Redoutable !*) Etablir, voire « *démontrer* », qu'une unité de rang ***n*** vaut dix unités de rang (***n* – *1***).
2. Donner du sens au rôle de chaque chiffre dans le nombre (*écrit*).
3. Dissocier « valeur » et « quantité ».
4. Réinvestir la règle de l'échange du « dix contre un » et du « un contre dix » dans les techniques opératoires et dans la conceptualisation de nouveaux nombres. (*fractions et nombres décimaux*). *Là aussi, next, zut !*

Et voilà, le décor est planté : on pourrait s'arrêter là.
Que nenni !!!

Les FRACTIONS et les NOMBRES DECIMAUX

RECOMMANDATIONS de la « conférence CNESCO-IFE », *suite* :

R12 – L'étude des fractions précède celle des nombres décimaux, mais doit se limiter aux fractions « simples » (*demi, tiers, quart, …*) et aux fractions décimales (*dixièmes, centièmes, …*) dans le cas du fractionnement de l'unité.

R13 – Le système d'écriture des nombres décimaux est un prolongement de celui des nombres entiers. L'identification de cette continuité doit être présentée de manière explicite auprès des élèves, tout en attirant l'attention des élèves sur certaines adaptations nécessaires.

Deux questions :

- Qu'est-ce qu'une fraction « simple » ?
- Ruptures et continuités dans les écritures des *nombres décimaux* vs *les nombres entiers* : *Cf. diapositive 6.*

C’est parti. Les « FRACTIONS ». Cf. « Friandise 1 »

Pour le moment, le mot « fraction » va désigner à la fois une écriture symbolique et un nombre rationnel.

Les différents sens seront précisés au fur et à mesure de l’exposé.

Pour la suite, on va s’intéresser plus particulièrement à la « fraction » $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}$. Est-ce une fraction « simple », *hihihi* ?

L’idée de **FRACTION** vient de la nécessité de couper, de partager, de « fractionner » une ou des entités, des « unités », en parties « égales ».

(…) Pour les égyptiens, les « fractions » les plus utilisées sont des nombres dits « *rompus* », mais pas n’importe comment : on coupe l’unité en deux, puis en deux, puis en deux, *and so on …*

*On définit ainsi la **dichotomie**, vs **duplication.** Quel délice pour les mathématiciens !*

On travaille donc (*et surtout*) avec les fractions de la forme $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{n}}$. (…). Mais il n'y a pas que des fractions de ce format, il y a aussi les « fractions égyptiennes », qui sont (*simplement*) les fractions de la forme $\frac{\mathbf{1}}{n}$, avec n non nul.

Enfin, on a aussi trace de quelques fractions ne s'écrivant pas $\frac{\mathbf{1}}{n}$, comme $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ ou $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$, voire $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{7}}$ … qui ont servi aux (*très savants*) calculs égyptiens.

*<u>Note de **PW**</u>. La décomposition d'une « fraction » en somme de « fractions égyptiennes » de <u>dénominateurs TOUS différents</u> est un PROBLEME subtilement délicat et encore OUVERT aujourd'hui dans la communauté des mathématiciens. Et oui !*

On travaille avec $\mathbf{\frac{5}{7}}$ (*comme précisé dans la diapositive 15*)

« 7 » est le ***dénominateur*** indique ainsi en combien de parts on partage l'entité ou l'unité et le ***numérateur*** « 5 » indique le nombre de fois que l'on prend cette ***fraction de l'unité*** ; on peut ainsi écrire les égalités suivantes :

$$\mathbf{\frac{5}{7}} = \mathbf{\frac{1}{7}} + \mathbf{\frac{1}{7}} + \mathbf{\frac{1}{7}} + \mathbf{\frac{1}{7}} + \mathbf{\frac{1}{7}} = 5 \times \mathbf{\frac{1}{7}}.$$

« $\mathbf{\frac{5}{7}}$ » est ainsi lu(*e*) comme « cinq septièmes », entendu comme « cinq fois un septième ». (…) On parle alors du fractionnement de l'entité ou de l'unité.

Oui, mais il y a d'autres acceptions de « l'objet » fraction (*ou mieux, du nombre rationnel*). Cela relève du collège, avec la fraction vue comme un QUOTIENT (<u>*non calculé*</u>) et lié à la multiplication.

Deuxième acception : $\mathbf{\frac{5}{7}}$ lu(*e*) comme « le septième de cinq ».

C'est l'aspect QUOTIENT (*non calculé !*) qui est ainsi convoqué. C'est le seul nombre qui multiplié par 7 donne 5. C'est à partir de ce « lien » qu'on peut *enfin* écrire :

$\mathbf{\frac{5}{7}}$ « = » $5 \div 7$, autrement dit : « 5 divisé par 7 ». Dans ce cas, on parle de *Commensuration*.

FRIANDISE théorique, y n'en faut bien !

Il faut établir, voire démontrer, par exemple dans le cadre des longueurs, que « *cinq septièmes de u* » est égal au « *septième de 5u* ».

Instrument officiel et magique : le « guide-âne » = réseau de parallèles équidistantes.

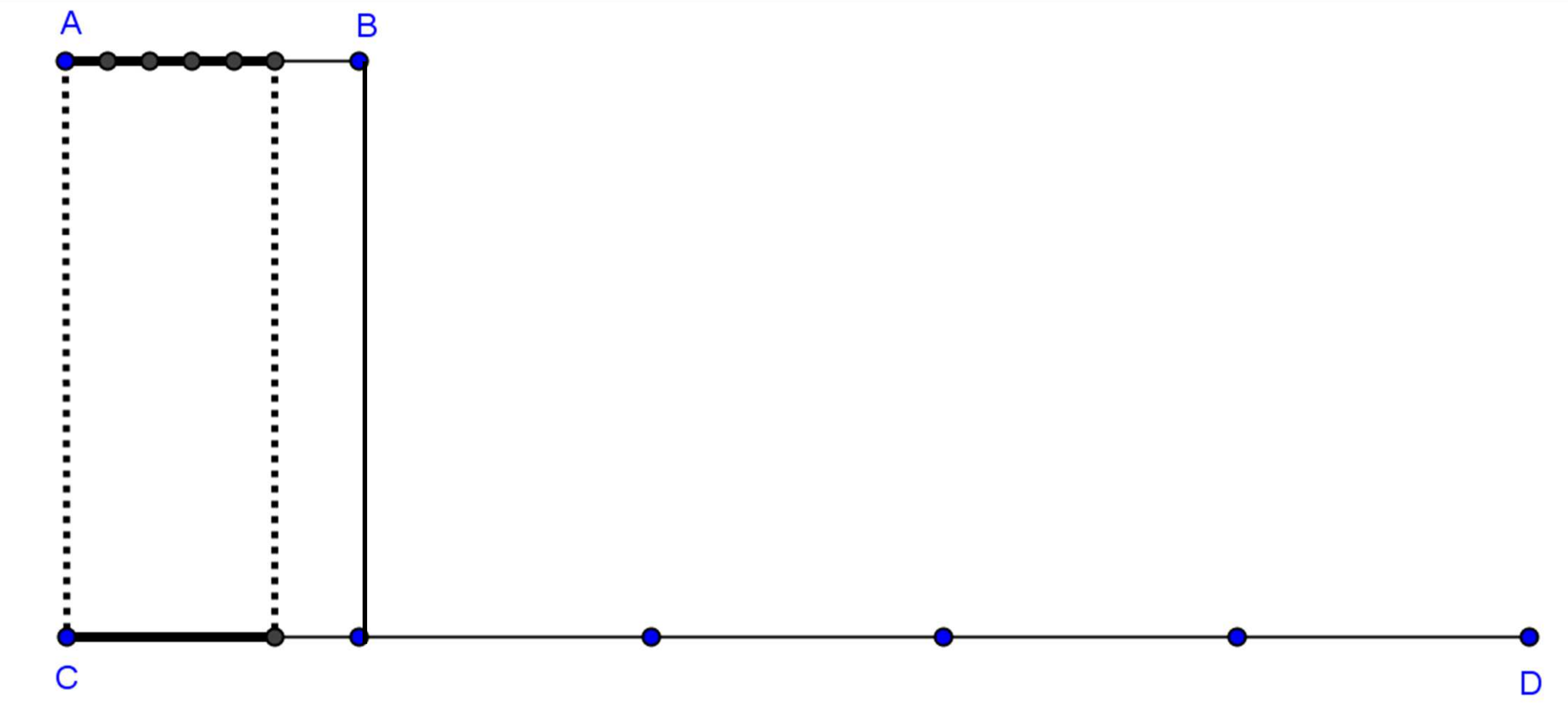
Manipulation en « *direct-live show* » !

On a : AB = ***l*** et CD = 5 × AB = 5***l***

(*i*) Mise en évidence, <u>*par construction géométrique*</u> *« sur » le segment [AB]*, d’un segment de longueur 5/7 de ***l***.

(*ii*) Mise en évidence, <u>*par construction géométrique*</u> *« sur » le segment [CD]*, d’un segment de longueur 1/7 de 5***l***.

(*iii*) ***Identification*** des deux *longueurs* par <u>superposition</u> ou autre…



Enfin, dans l'enseignement, une autre acception de la notion de fraction a aussi été privilégiée : $\frac{5}{7}$ vu(*e*) comme « opérateur » (*notation dite « fonctionnelle »*). *On y reviendra aussi, surtout lorsqu'on va parler de proportionnalité (pourcentages, échelles, …) !*

« L'opérateur » $\frac{5}{7}$ 5/7 est ainsi une « abréviation » de la suite de calculs : « multiplier par 5, puis diviser par 7 ou inversement ». On utilise souvent cette acception « en acte » pour des tâches de la forme « calculer les 5/7 de … ».

Les différents cadres d'introduction (***GLP***, *IREM de Rennes*)

	Partages	**Mesures**
a $b^{\text{ièmes}}$	partage de l'unité	mesurage par fractionnement de l'unité
a : b	Partage de la totalité	mesurage par commensuration
aspect fonctionnel	Prendre les a $b^{\text{ièmes}}$ d'une grandeur	Proportionnalité entre les mesures

Un premier bilan « intermédiaire » sur les fractions :

- <u>Format des fractions à étudier en priorité</u> : les fractions décimales : $\frac{\text{Entier}}{10^n}$, les fractions de la forme $\frac{n}{2^m}$ et les fractions de la forme $\frac{p}{3^m}$. <u>*Mode de génération*</u> : fractionnement d'une longueur, bien avant un fractionnement d'une aire (*on pourrait même s'en dispenser !*).

- <u>Commencer tôt dans l'année</u> les premiers apprentissages et « *spiraler* », afin de pouvoir mettre plusieurs couches de « ppel » et de « ra-ppel » et de « ra-ra-ppel ».

- <u>Privilégier l'aspect « ***a b***$^{\textit{ièmes}}$ » d'une « fraction »</u>, plutôt dans le domaine des grandeurs, pour les activités de mise en situation. On pourra tout aussi utilement se placer dans le cadre de la proportionnalité.

- <u>Du côté des Techniques Opératoires et de la Résolution de Problèmes</u> : « dossiers » incontournables, mais ce sera pour une autre fois. *Next et Zut !* Cf. <u>RECOMMANDATIONS R16 et R21</u> !

On est maintenant prêt pour utiliser le « guide-âne » ou « le partageur universel ».

What's that ? C'est un réseau de droites parallèles équidistantes. Cf. « manipulation » de la diapositive 17.

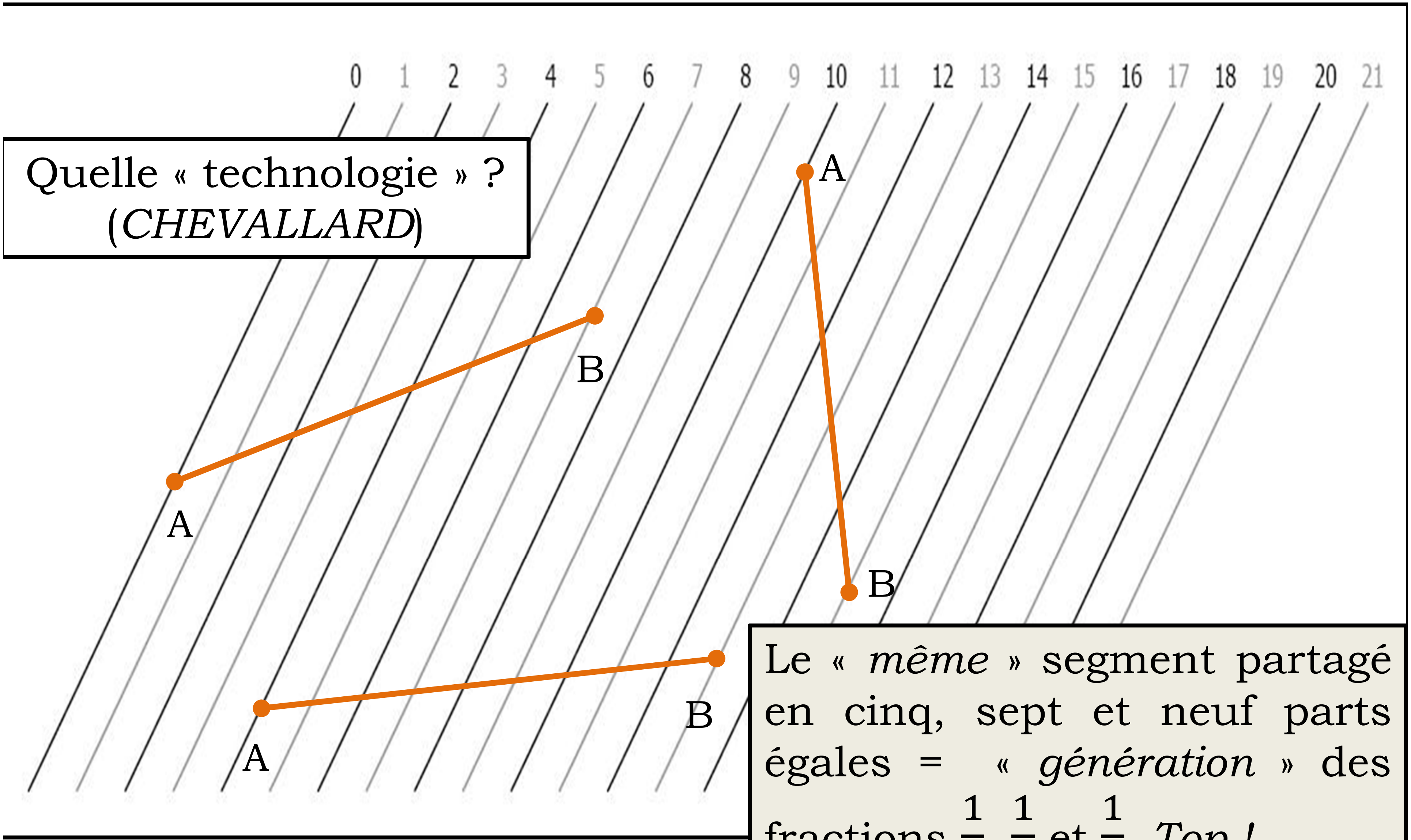
Utilisation du « guide-âne ». On dispose du segment [AB] qu'on veut partager en sept (*petits*) segments de même longueur et d'un « guide-âne ». *Diapositive suivante*

Algorithme. Poser la droite (**0**) sur une extrémité, « *rotationner* » le guide-âne jusqu'à ce que l'autre extrémité soit portée par la droite (**7**). *Pourquoi 7 ?* MARQUER les points d'intersection, puis « COMPTER ».

Idem pour partager en cinq, idem pour partager en neuf.

FRIANDISE, à consommer immodérément. *Aucun risque* !

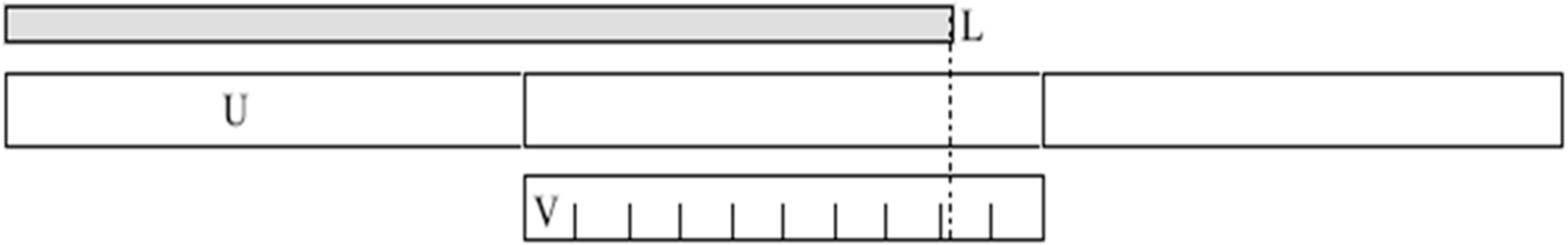
Quelle « technologie » ?
(*CHEVALLARD*)



Le « *même* » segment partagé en cinq, sept et neuf parts égales = « *génération* » des fractions $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ et $\frac{1}{9}$. *Top !*

On continue : encore des fractions décimales, jusqu'à presque des nombres décimaux…

On dispose de deux « bandes ». Une « bande » L, dont on cherche la longueur, et une unité de longueur U, subdivisée en 10 sous-unités V. (*On sait faire : le « guide-âne »*).



<u>Information n°1</u>. On a : U < L < 2U.
On cherche ensuite à améliorer cette « information ».

On peut alors couper en deux l'unité U. on obtient alors *<u>l'information n° 2</u>* : U + 1/2U < L < 2U.

Le processus peut se poursuivre ; on choisit en combien de sous-unités on partage U (en trois, en quatre, en cinq, ..., en dix, *yes* !).

On définit ainsi un système de sous-unités (U, V, W, ...).

D'où (les) différentes écritures , avec éventuellement apparition de la « fameuse » virgule, en termes de longueurs :

$$L \approx 18V \approx 1U + 8V \approx 1U \text{ et } 8V \approx \frac{18}{10} \text{ de } U \approx (\ldots)$$

Commentaire : « système » tout à fait pertinent et efficace en base 10. *Justement, ne serions-nous pas tenté d'écrire alors :*

$$\frac{18}{10} \text{ de } U \approx 1U + 8V \approx 1{,}8\ U\ !$$

La question est : comment résister à cette tentation d'introduire la virgule ? Celle-ci se « marque » après le scalaire qui « marque » les unités et surtout elle ne se décale JAMAIS de chez JAMAIS !!!

Wait a minute, please, on y revient dans pas longtemps…

La bande des « tiers » : une nouvelle bande à adopter !

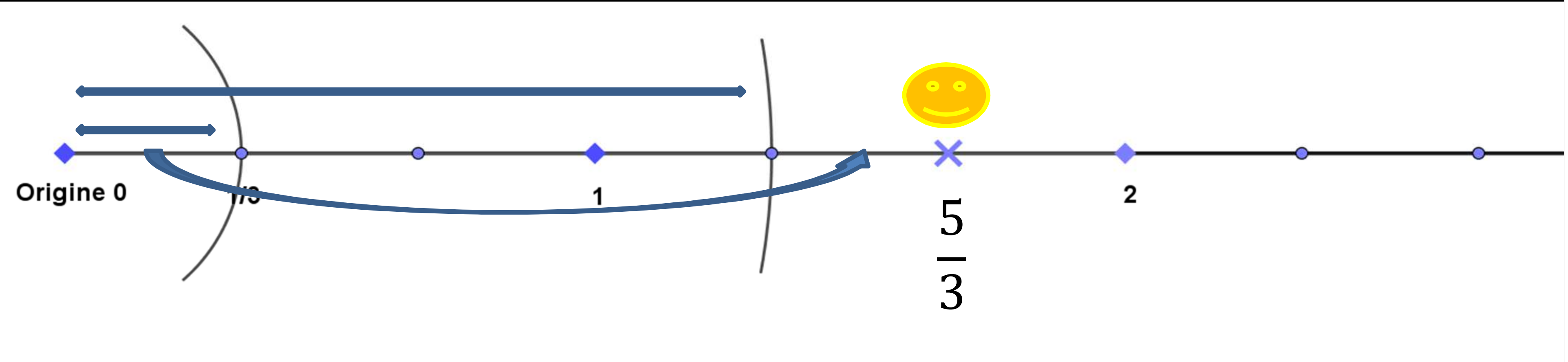


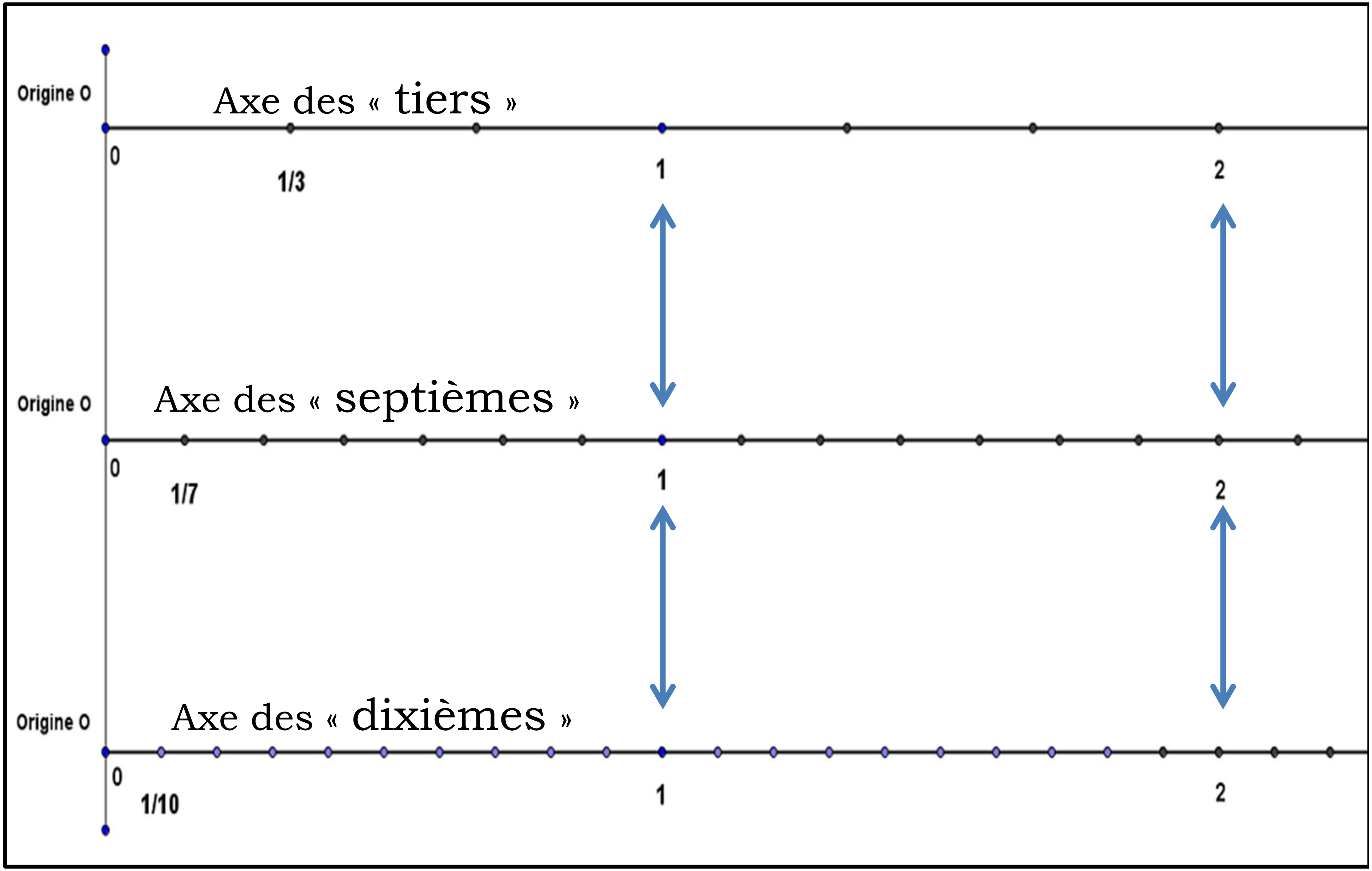
Illustration ci-dessus, *sans calcul*, avec le compas, par reports, de la somme $S = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 3 - \frac{1}{3}$

Dans un sens de lecture, on a un « calcul construit » et dans l'autre sens des décompositions. *Pas mal du tout.*

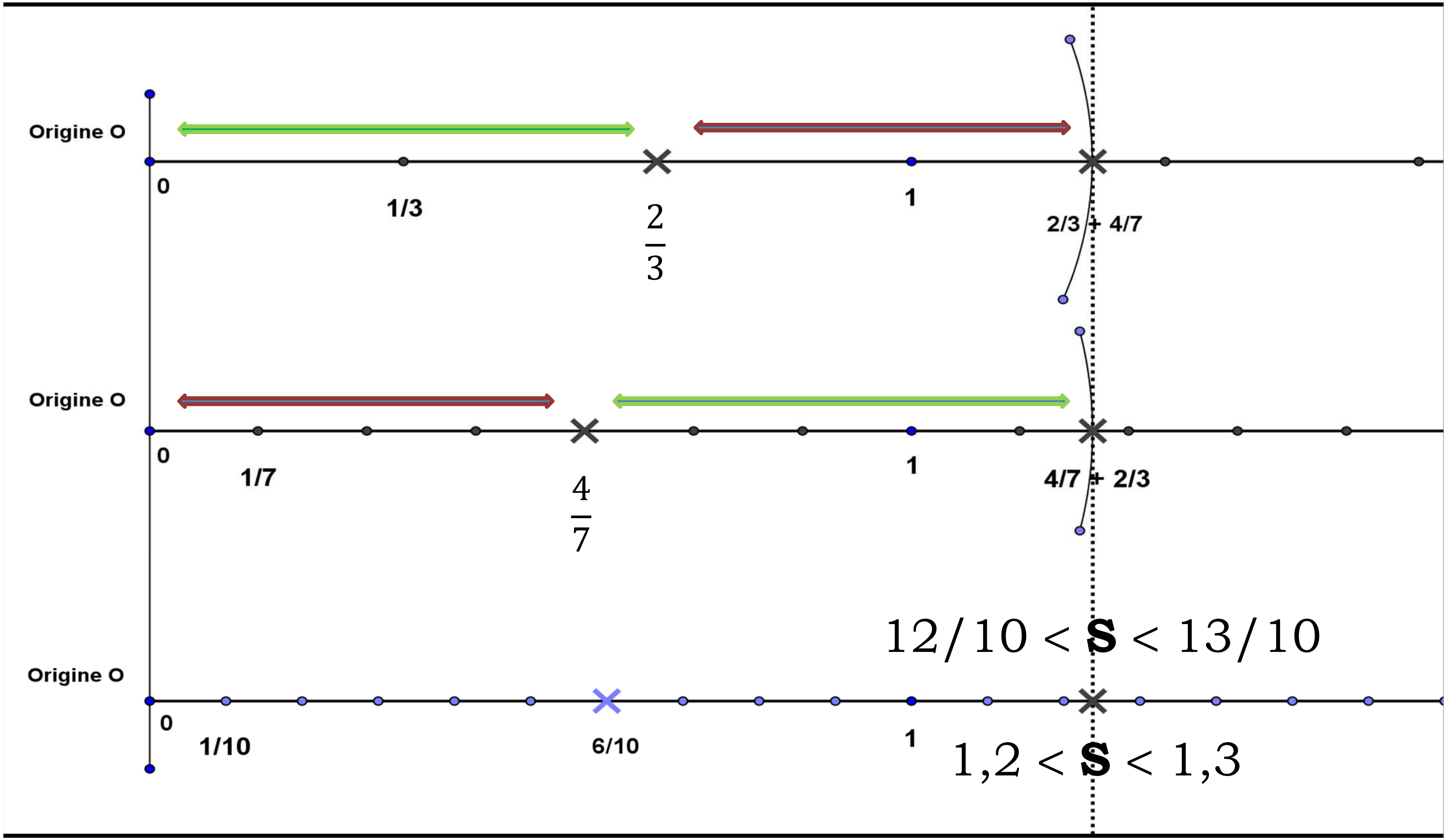
Donc : user et abuser de cette disposition.

Et encore on n'a pas parlé d'ordre : comparaison et rangement !!!

FRIANDISE : une « *triple bande* », CONSTRUCTION de CALCULS



<u>*Un calcul*</u>. **S** = 2/3 + 4/7 = 4/7 + 2/3 = **?** 6/10, car 2 + 4 = 6 et 3 + 7 = 10. La <u>construction géométrique</u> ci-dessous prouve que c'est ***faux*** ! Et, en plus, on a de belles inégalités ou encadrements de **S**, en « tiers », en « septièmes » et en « dixièmes ». *Top du top d'un point de vue graphique* !



On va bientôt changer de paragraphe.
Du coup, quels oublis et quelles questions ?

➢ Proposer des tâches de comparaison et de rangement et contrôler les résultats avec l'axe ou la bande graduée ;

➢ Poursuivre et densifier les tâches de calculs de sommes et de différences, effectuations et contrôles avec la « *triple bande* » ;

➢ Et la « caltosss » là-dedans ? Elle joue ! Yes, of course ! On va attendre le prochain paragraphe pour « friandiser ». *Encore next !*

On s'intéresse maintenant aux NOMBRES DECIMAUX

Pour les ceusses qui suivent encore, on avait commencé !

FRIANDISE ou pas ? Dans le temps, bien avant la *Finlande*, avant *Singapour*, avant et avant, du *temps d'arrière-papy*, c'était comment avec les décimaux ?

Etude datant d'avant 1986, étude réalisée par l 'APMEP, recensée dans la brochure n°61.

Un inventaire (résumé) des erreurs caractéristiques à l'entrée en classe de sixième.

E1. On rencontre des égalités du type : $2,3 \times 4,9 = 8,27$ ou $17,3 + 21,8 = 38,11$.

E2. Le nombre 3,2 est inférieur au nombre 3,135.

E3. Intercaler un nombre entre 12,34 et 12,35. Il n'y en a pas !

E4. Les écritures 41,45 et 41,450 désignent des nombres différents.

E5. A la question : « *Lorsqu'on multiplie un nombre par un autre, le résultat est « toujours » plus grand ?* », beaucoup d'élèves répondent par l'affirmative. Du coup, la division « *rapetisse* » !

Question « es-spécial(e) PE » : on en donne UNE de définition ou bien PLUSIEURS ou bien on n'en donne pas ? *Débat* ? Justement : voici une catégorisation…

Cat. 1	« *nombre à virgule* – avec un nombre fini ou pas de décimales » ; « *deux « nombres » entiers séparés par une virgule* »…
Cat. 2	« *nombre non entier* » ; « *nombre entier* + *une partie décimale ou* + *une partie fractionnaire* »…
Cat. 3	« *nombre fractionnaire* » ; « *nombre fractionnaire se « finissant »* » ; définition(s) faisant appel aux « *fractions décimales* »…
Cat. 4	« *résultat de la division de deux entiers* » ; « *résultat de la division d'une entier par une puissance de dix* »…
Cat. 5	« *somme de fractions décimales* » ; « *produit d'un entier par une puissance de dix* »…
Cat. 6	« *nombre qui multiplié par une puissance de dix donne un entier* ». *Ah, QUOTIENT ???*
Cat. 7	Toute autre réponse : juste, fausse, « combinaison » de catégories ci-dessus, …

Alors, qu'est-ce qu'on fait ?
Quel CHOIX ? *Retour à la diapositive 6 !*

FRIANDISE

- « *Wanted* » ! Rechercher deux nombres décimaux ayant la même partie entière, distants de huit millièmes.
- « *Wanted* » ! Rechercher deux nombres décimaux n'ayant pas la même partie entière, distants de huit millièmes.
- « *Wanted* » ! Rechercher deux nombres décimaux n'ayant pas la même partie entière, distants de dix-huit millièmes.

I'm a poor lomesone mathematic teacher !

Une (ou des) DEFINITION(S) ? *Pas si facile que ça !*
La clef : la NUMERATION, encore et toujours…

<u>Exemple</u> : 24,37 est le nombre (*unique*) qui, multiplié par 100, donne 2437. (*addition répétée de 100 termes égaux à 24,37 : caltosss !*).

Cette « opération » propose alors une grande proximité avec la définition d'un QUOTIENT (*non calculé*).

D'où une définition rigoureuse, opératoire et « robuste » d'un nombre décimal :

Un NOMBRE DECIMAL est un nombre, quel que soit son « format », qui multiplié par 1, 10, 100, 1 000, 10 000, … donne un NOMBRE ENTIER.

Sans la généraliser avec les puissances de 10, cette définition peut être efficace dès le cycle III et, évidemment, en classe de sixième, *<u>quelle que soit le format d'écriture choisi</u>*.

Cette DEFINITION pose donc le problème de la multiplication par 10, 100, 1000, …, en relation avec cette « même » multiplication pour les nombres entiers.

Quelle « technique » et surtout quelle(s) justification(s) ? A partir de l'exemple : **P** = 17,805 × 10. (*D'après Manuel Cap Math, CM2*).

- On a : 17,805 = 1dizaine 7unités 8dixièmes et 5millièmes. (*Décomposition Canonique*)
- Si on prend « *10 fois ce nombre* », on obtient « *10 fois plus de chacune des unités de la DC* », c'est à dire : **P** = (17,805 × 10) = 10 dizaines 70 unités 80 dixièmes et 50 millièmes. (*Distributivité en acte*)
- Par « *la règle d'échange du 10 contre 1* », on en déduit alors que : **P** = (17,805 × 10) = 1centaine 7dizaines 8unités et 5centièmes. On retranscrit alors dans la forme usuelle.

Soit : **P** =17,805 × 10 = 178,05.

Une preuve, et c'est même une « technique » initiale fortement liée à la définition de la diapositive précédente !

P = 17,805 × 10 = 17,805 + 17,805 + … + 17,805 = 178,05

(**P** = somme de dix termes égaux à 17,805 : *on savait déjà le faire !*).

TRACE écrite et à faire apprendre : « *Ce n'est pas la virgule qui se déplace, c'est chaque chiffre qui « monte » d'un rang vers la gauche quand on multiplie par 10* ». *Cf. la « réglette » du document EDUSCOL sur le cycle III.*

COMMENTAIRE : Pourquoi préférer le changement de rang pour les chiffres au « déplacement » de la virgule ? D'abord, une virgule ne se déplace « jamais » : on le « voit » dans un tableau de numération, la virgule est « toujours » entre l'unité et le dixième, c'est son seul repère visuel et pourtant, qu'est-ce qu'elle se promène cette virgule !

Deux autres arguments plus sérieux :

Argument (i). Cette technique rend compte de l'effet de la multiplication par 10 sur le décalage de chaque chiffre dans les rangs. Elle donne des raisons objectives, mathématiques d'enseigner la NUMERATION, avec les règles y afférant (*Décompositions de toutes sortes, règles d'échanges, notions de groupements, puis calculs : Cf. diapositive 9*).

Argument (ii). Elle est valable aussi bien pour les nombres entiers que pour les nombres décimaux. Cette « technique » a donc une portée et un avenir !

Idem pour la division : encore et toujours la NUMERATION.

Prolongement : et la multiplication de deux nombres décimaux. Ah oui, il faut s'en occuper très sérieusement !

Un exemple emblématique de « saut conceptuel ».

Soit à calculer le produit **P** = 5,7 × 2,75

On « sait » que 2,75 est égal à 275/100, il peut maintenant être considéré comme le nombre qui, multiplié par 100, donne 275. Cela va permettre une justification du calcul du produit de deux nombres décimaux, comme par exemple pour calculer **P**.

Sachant que (5,7 × 10 = 57 et 2,75 × 100 = 275), on a alors : 57 × 275 = (5,7 × 10) × (2,75 × 100) = 5,7 × 2,75 × 1000 = **P** × 1000. Le produit **P** = 5,7 × 2,75 est donc le nombre (*unique*) qui, multiplié par 1 000, donne 57 × 275, c'est à dire : 5,7 × 2,75 = (57 × 275)/1000 = 15675/1000 = 15,675. *Autre technique* : utilisation des fractions décimales…

Bon, admettons et « *koment kon fait* » pour $0{,}7 \times 0{,}8$?
Trop facile ! *Fait en plénière…*

Les NOMBRES DECIMAUX et l'ORDRE

« Micro-trottoir » ! COMPARER 7/5 et 8/6. Idem pour 5/7 et 6/8. Donner plusieurs techniques, justifier…

COMPARER, suite. Un principe pédagogique : varier les « formats » d'écriture des nombres en jeu et (*toujours ?*) utiliser la droite graduée (*incontournable !*). *Cf. diapositive ?*

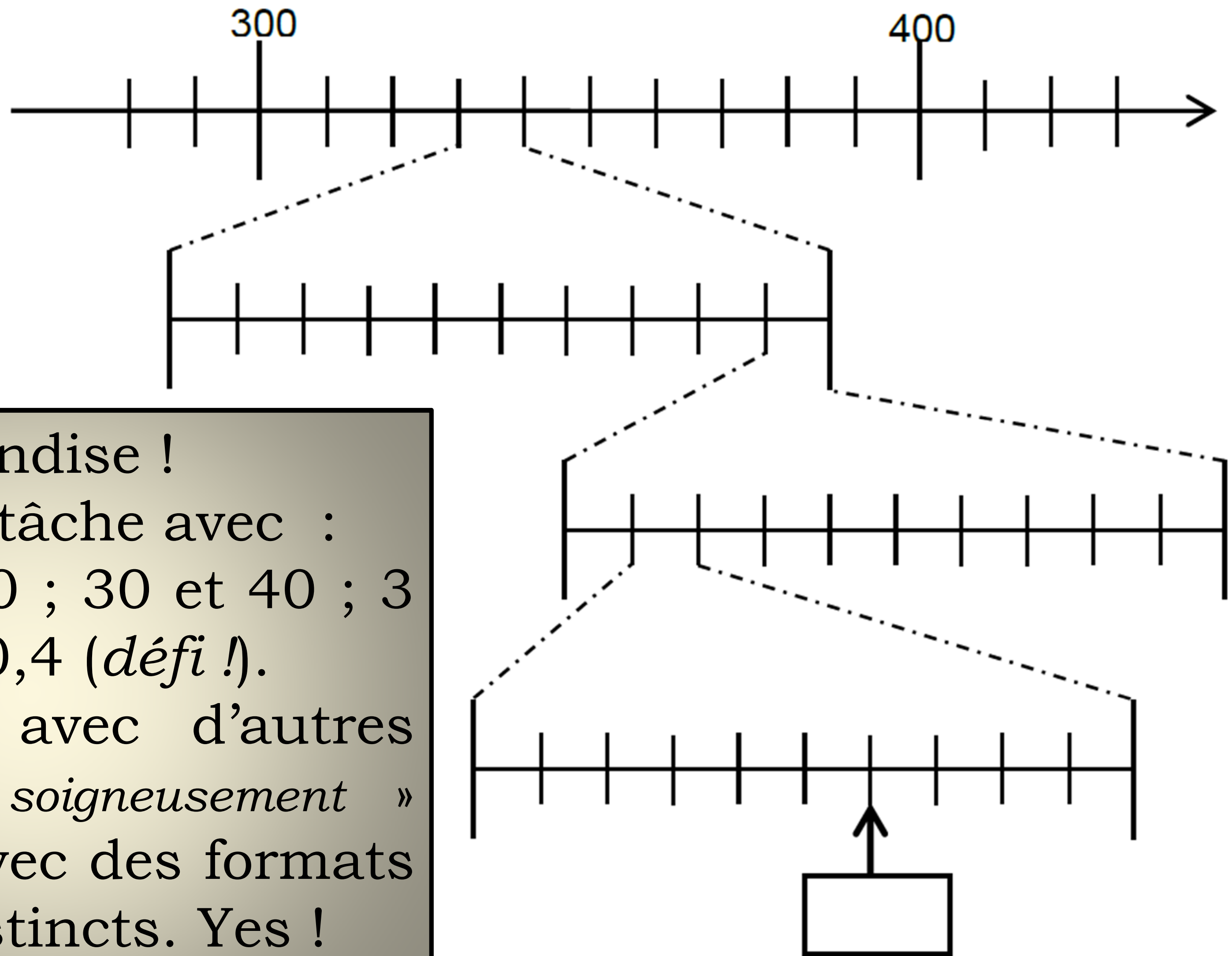
Exemples. Comparer 0,17 et 0,2 ; comparer 0,17 et 2/10 ; comparer 2 + 34/100 et 2,034 ; comparer 3 + 4/10 et 4 – 3/10 ; comparer 5 + 37/100 et 54/10 ; comparer deux fractions décimales n'ayant pas le même dénominateur ; …

Questions ***PE*** : quelles traces écrites (*idem pour tous les autres verbes d'action qui suivent*) ?

<u>ENCADRER</u>. Des items à travailler, en notant ***d*** un nombre décimal donné, <u>sous un format quelconque</u>, encadrer ***d*** par deux entiers consécutifs ***n*** et (***n*** + 1), encadrer ***d*** par deux fractions décimales de même dénominateur et de « numérateurs consécutifs ». <u>*Important*</u>. Contrôle de l'encadrement : vérifier par le calcul d'une différence que le « pas » obtenu est celui demandé.
<u>INTERCALER</u>. Donner un (deux, onze, …) nombre(s) compris entre 12,7 et 12,8. (Insister sur la rupture avec l'ordre dans $\mathbb{N}$ et l'ordre dans $\mathbb{D}$). *Pourquoi onze ? Onze est un nombre intéressant dans ce cas, car il oblige à « descendre » d'une puissance de 10.* Problème du **PE** : quelle(s) trace(s) écrite(s) ?
<u>INSERER</u> et « <u>GENERER</u> », puis <u>RANGER</u>. <u>*Exemple*</u> : On s'intéresse au nombre 47,12. Insérer un chiffre choisi (le « 3 », le « 0 » (*oui*), …) pour générer de nouveaux nombres et les ranger ensuite par ordre croissant. Problème du ***PE*** : quelle(s) trace(s) écrite(s) ?

« Écrire le nombre qui convient dans le rectangle. »

Document Eduscol…

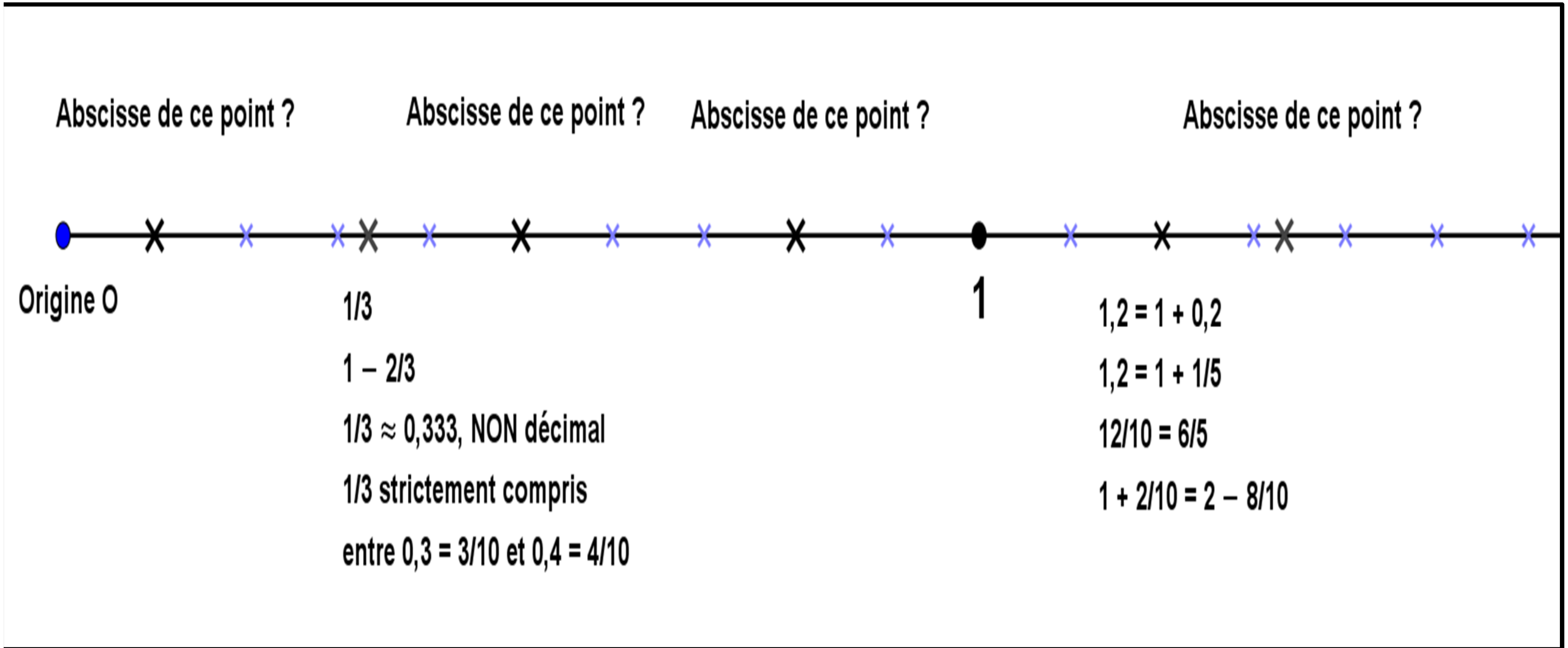


Friandise !

Même tâche avec : 3000 et 4000 ; 30 et 40 ; 3 et 4 ; 0,3 et 0,4 (*défi !*).

Idem, avec d'autres nombres « *soigneusement* » choisis, et avec des formats d'écriture distincts. Yes !

Festival de FRIANDISES…



On « rencontre » les nombres suivants : 0,42 ; 1,17 ; 1 – 0,82 ; 27/10 ; 159/100. Marquer les points dont ces nombres sont les abscisses. Ecrire des encadrements « *pertinents* »…

Carte Heuristique ou Carte Mentale… On s'intéresse au nombre N = *24unités et 7centièmes* : réaliser une « carte mentale » (*privée* et *évolutive*) liée à N. *Affichage* ?

PROLONGEMENTS : le CALCUL et la RESOLUTION de PROBLEMES…*NEXT*…

Des RECOMMANDATIONS de la conférence CNESCO-IFE

R14 - Bien qu'il existe des outils informatiques de calcul très performants, le calcul mental et le calcul posé doivent continuer à occuper une place importante dans l'enseignement des mathématiques.

R16 - L'enseignement du calcul, avec les nombres entiers et décimaux, doit permettre la découverte, la compréhension progressive, l'appropriation, puis la mobilisation des propriétés des opérations.

R17 - Le calcul mental et le calcul en ligne doivent être privilégiés par rapport au calcul posé.

R18 - L'enseignement du calcul mental et du calcul en ligne doit être organisé selon une progressivité.

R21 - Les opérations sont introduites par la résolution de problèmes.

Une fois n'est pas coutume, bis !
BIBLIOGRAPHIE-SITOGRAPHIE (2)
Toujours aussi restreinte et sélective !

- « Calcul Mental à l'école primaire ». Ressources et Formation, publication de la COPIRELEM ;
- « Le Jeu des Fractions », IREM Nice, ARPEME. Publication du groupe IREM premier degré ;
- « Pourquoi ont-ils inventé les Fractions ? », Nicolas ROUCHE, éditions Ellipses ;
- Pour les mordus ! « Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie ». Daniel PERRIN, éditions Cassini ;
- « Les Mathématiques à l'école primaire », deux tomes, éditions De Boeck, Belgique ;
- « Math, cycle 3 (2008) », ML PELTIER, J BRIAND, B NGONO et D VERGNES, éditions Hatier ;
- *Du côté des IREM*. Quelques publications pertinentes en sélectionnant les IREM suivants : IREM-IRES Orléans, groupe de production sur la liaison CM2-Sixième ; IREM de Rennes ; IREM de Lyon ; …
- Les manuels scolaires, accompagnés des livres du maître : sélection tout à fait délicate ! *Position singulière du système français…*

ANNEXE 1.

Liens avec les domaines du SCCCC, *d’après document Eduscol*

Utiliser les principes du système décimal de numération et les différentes écritures d’un nombre décimal pour effectuer des calculs, utiliser une droite graduée et modéliser des situations contribuent au développement des langages pour penser et communiquer (domaine 1).

De plus, l’élève, en s’engageant dans une démarche de résolution de problème nécessitant l’utilisation de fractions et/ou de nombres décimaux, en mettant à l'essai plusieurs solutions, en mobilisant les connaissances nécessaires, en analysant et en exploitant les erreurs, développe des méthodes et des outils pour apprendre (domaine 2). L’engagement dans un travail collectif lui permet de développer, dans des situations concrètes, son aptitude à coopérer, à vivre ensemble et à faire preuve de responsabilité (domaine 3).

La pratique du calcul (mental et en ligne, posé, exact et approché), l’estimation d’ordres de grandeurs avec des nombres décimaux contribuent à l’étude des systèmes naturels et des systèmes techniques (domaine 4).

ANNEXE 2. Compléments de la diapositive 7… *Eduscol*

(…) Les nombres décimaux s'étendent au-delà des nombres entiers qui servent à dénombrer des collections d'objets ;

- l'unité devient une entité que l'on peut partager ;
- on ne peut pas parler du successeur d'un nombre décimal, par exemple : quel nombre viendrait après 7,3 ? ;
- lorsqu'on compare deux nombres décimaux, celui dont l'écriture à virgule s'écrit avec le plus de chiffres n'est pas nécessairement le plus grand ;
- entre deux nombres décimaux on peut intercaler une infinité d'autres nombres décimaux ;
- la multiplication d'un nombre décimal par un nombre décimal ne peut plus être conçue comme une addition itérée ;
- lorsqu'on multiplie un nombre par un nombre décimal on n'obtient pas toujours un nombre plus grand que le nombre de départ (4 x 0,7 = 2,8 et 2,8 est inférieur à 4). (…)

ANNEXE 3. Super FRIANDISE, à épisodes… *D'après Brochure INRP, 1991 et manuel « Maths et Clic, 6è », Bordas, 2000.*

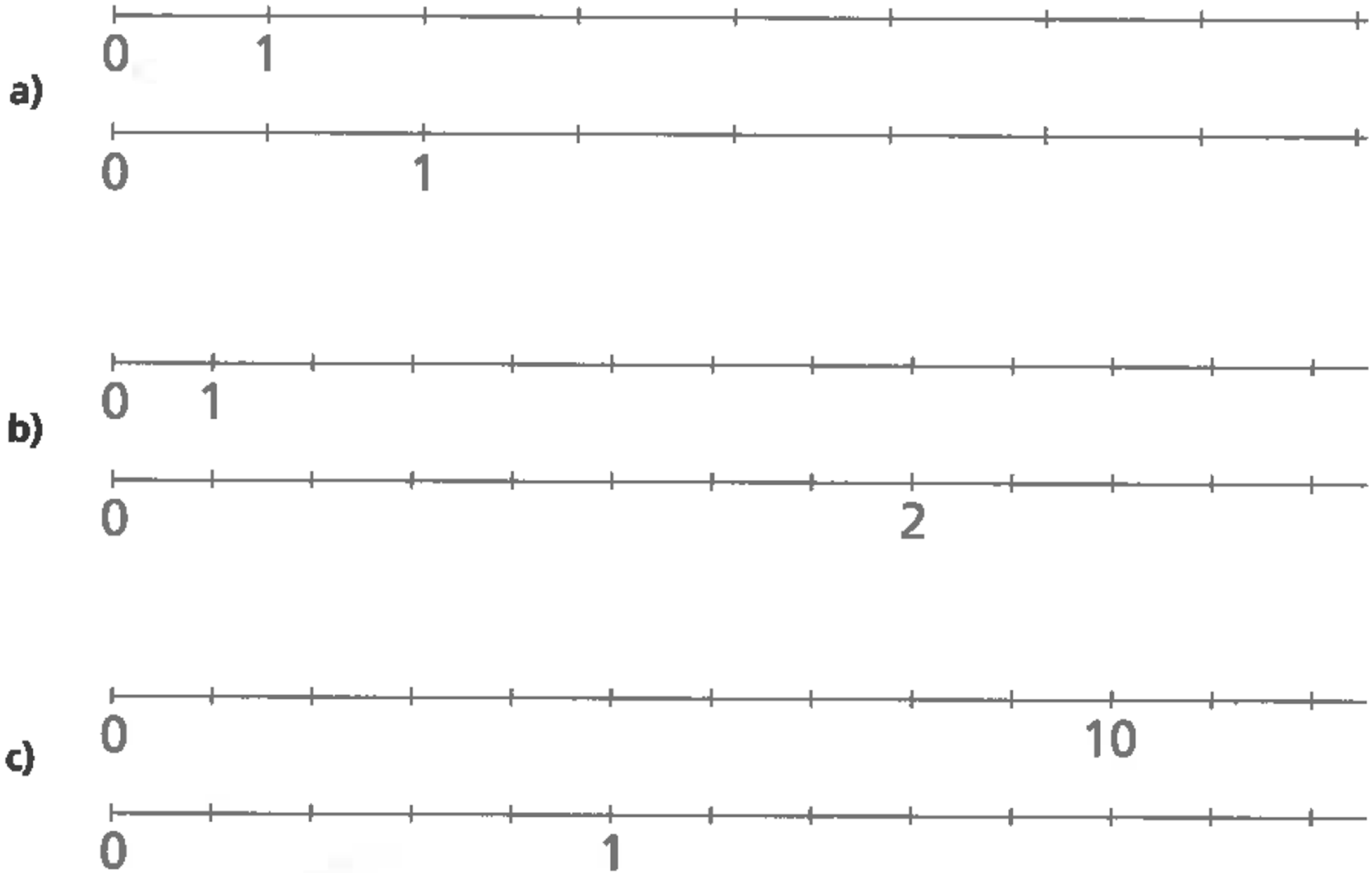
Bande à « double graduation »

Première phase

1. *Placer sur cette demi-droite les nombres suivants : 10 ; 15 ; 7,5 ; 12.*

2. *Lire et écrire le nombre qui correspond à chacun des points.*

Deuxième phase. Ecris le nombre qui convient à chaque graduation



2. « *Pour chacune des doubles bandes, il y a une multiplication qui permet de passer des nombres de la bande du haut à ceux de la bande du bas, laquelle ?* »

3. « *À l'aide de la troisième double bande, donner les produits suivants :*
2,5 × 0,2 ; 6,5 × 0,2 ; 10,5 × 0,2 ».

« *Si on pouvait placer 25,65 et 105 sur la bande du haut, quels seraient les nombres placés au-dessous ?* ».

4. « *Construire une double bande qui permette d'effectuer le produit 1,75 × 0,4* ».

Question PW, « *the last (one) but not the least* » ! Tout au long de cette activité, on a mobilisé des connaissances et des compétences relevant de quel domaine spécifique, <u>*non mathématique*</u>, mais pourtant fondamental, dans l'enseignement ? ALORS ?

MERCI…