Les « nouveaux » nombres au cycle III
FRACTIONS et NOMBRES DECIMAUX
Questions d'enseignement et « Pistes » de travail

Patrick WIERUSZEWSKI

Université Orléans, IUFM CVL, BLOIS

Département Disciplinaire de MATHEMATIQUES

CONTRES, Novembre 2011

CHATEAUNEUF sur LOIRE, Janvier 2012

ORLEANS, Mai et Décembre 2012

Parti pris « théorique » pour cette animation-intervention

1) Une approche de type « constructiviste » :

- Apprentissage par adaptation ;
- Apprentissage dans le cadre de l'école : rôles des « pairs » et rôle du ***PE***, …

2) Une entrée (*résolument*) « didactique » :

- Analyse « *multicritérielle* » et *disciplinaire* des contenus à enseigner ;
- Analyse des relations entre enseignement et apprentissage ;
- Analyse de manuels et fichiers, analyse de productions des élèves, des « préparations » du ***PE***, (*classique !*)…
- Utilisation de ***modélisations*** de phénomènes d'enseignement, deux théories fondatrices :

La Théorie des Situations Didactiques ou ***TSD***,
La Théorie Anthropologique du Didactique ou ***TAD***, …

BIBLIOGRAPHIE restreinte et sélective…

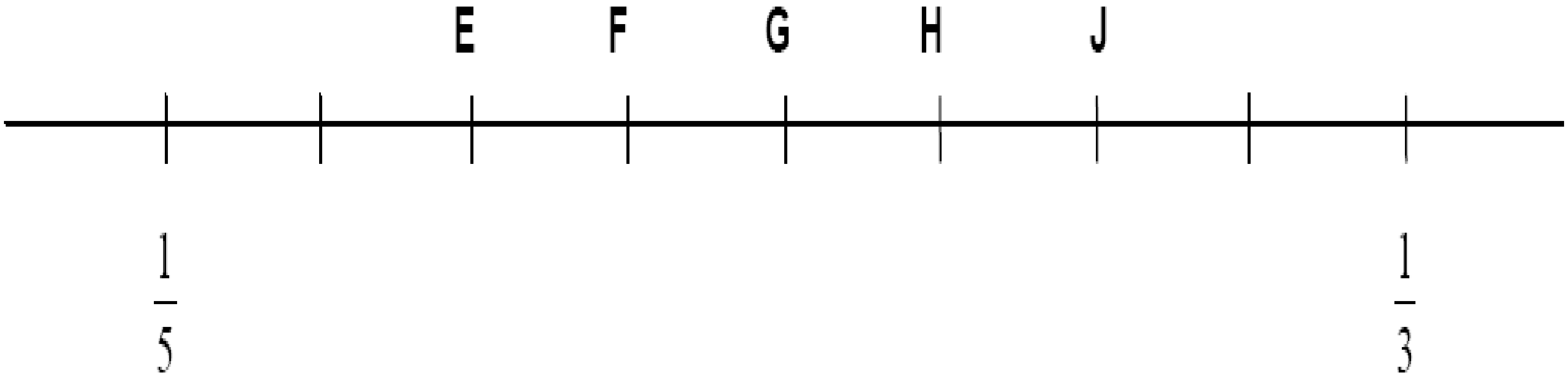
- « Le Nombre au cycle III, apprentissages numériques », ressources pour la classe, réseau SCEREN.
- « Le Nombre au cycle II », idem ci-dessus.
- « Calcul Mental à l'école primaire ». Ressources et Formation, publication de la COPIRELEM.
- « Le Jeu des Fractions », IREM Nice, ARPEME. Publication du groupe IREM premier degré.
- « Pourquoi ont-ils inventé les Fractions ? », Nicolas ROUCHE, éditions Ellipses.

- <u>*Du côté des IREM*</u>. Quelques publications pertinentes en sélectionnant les IREM suivants : IREM-IRES Orléans, groupe de production sur la liaison CM2-Sixième ; IREM de Rennes ; IREM de Lyon ; …
- Les manuels scolaires, accompagnés des livres du maître : sélection délicate ! Une proposition : s'intéresser aux manuels des éditions Hatier : « Cap Math » et « Euro Math ». De nouvelles collections apparaissent…

« Fil rouge 1 » : un exercice de Rallye Math, posé au CRPE !

Difficile, mais on n'a rien sans rien !

II. La droite ci-dessous est graduée régulièrement. Les rationnels $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{3}$ sont placés sur cette droite. Parmi les points **E**, **F**, **G**, **H** et **J**, quel est celui dont l'abscisse est exactement $\frac{1}{4}$? Justifier.



« Fil Rouge 2 » : Questions Initiales et premiers débats

- Donner les principales EVOLUTIONS au niveau des connaissances mathématiques, en termes de « ruptures » et de « continuités » avec les NOMBRES ENTIERS quand on s'intéresse aux « Nouveaux Nombres » (*fractions et nombres décimaux*) au cycle III ? *Argumenter.*

- Pour aller plus loin, du côté du collège : même question quand on s'intéresse aux « nouveaux nombres » (*nombres relatifs*) du collège. *Argumenter.*

- Pour aller encore plus loin, du côté du lycée : même(s) question(s) quand on s'intéresse à TOUS les nombres…

- Analyser les programmes 2008 et le SCCC, pilier 3, à la lumière des « réponses » apportées ci-dessus.

Pistes de réponse aux Questions Initiales (*Charnay*)

Des nombres entiers (*naturels*) aux nombres décimaux, à partir du CM1 :

- renoncer à l'idée de nombres qui se « suivent »,
- accepter l'intercalation « sans fin ».

Passage aux « fractions-quotients » :

- accepter qu'un nombre ne s'exprime pas nécessairement par une suite finie ou déterminée de chiffres.

Corollaire. Du côté des « Techniques Opératoires » : apprendre de « *nouvelles* » techniques sur et à partir des techniques plus anciennes.

Au Collège. Passage aux nombres négatifs :

- renoncer au fait qu'un nombre exprime une quantité ou la mesure d'une grandeur. *A suivre !*

CONSEQUENCE : nécessité de restructurations des connaissances, en particulier pour les opérations. *C'est l'objet de cette animation !*

Ecole Maternelle et Cycle II. Aucune connaissance sur les fractions et les nombres décimaux n'est exigée (*ni attendue, ouf !*) à ces niveaux.

Cycle III. Du CE2 au CM2, dans les quatre domaines du programme, l'élève enrichit ses connaissances, acquiert de nouveaux outils, et continue d'apprendre à ***résoudre des problèmes***. (...)

1. Nombres et Calcul. (...) 3. Le Calcul. (...)
2. Les Fractions et les Nombres décimaux.

- Fractions simples et décimales : écriture, encadrement entre deux entiers consécutifs, écriture comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, somme de deux fractions décimales ou de deux fractions de même dénominateur ;
- Nombres décimaux : désignations orales et écritures chiffrées, valeur des chiffres en fonction de leur position, passage d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire et inversement, comparaison et rangement, repérage sur une droite graduée ; valeur approchée d'un décimal à l'unité près, au dixième près, au centième près.

Autre ENTREE : du côté des COMPETENCES. SCCC, <u>pilier 3</u>.

(…) L'élève est capable de :

- écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (*jusqu'au centième*) et quelques fractions simples ; (…)
- utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux (*pour la division, le diviseur est un nombre entier*) ; (…)

Quid de la résolution de problèmes ? Un OUBLI du SCCC?

<u>Un petit retour en arrière</u> : les programmes 2007.

Au cycle III, les élèves mettent en place une première maîtrise des fractions et des nombres décimaux : [...] <u>Leur étude sera poursuivie au collège</u>.

Les fractions et les nombres décimaux doivent d'abord apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour ***résoudre des problèmes*** que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre de façon satisfaisante : <u>problèmes de partage</u>, <u>de mesure de longueur ou d'aire</u>, de <u>repérage d'un point sur une droite</u>. Les fractions sont essentiellement introduites, au cycle III, pour donner du sens aux nombres décimaux.

La question fondamentale du ***PE*** : comment articuler (*ou désarticuler !*) l'étude de ces deux « objets » mathématiques ?

- *Du côté des programmes* : quelles progressions et quelles programmations ?
- *Du côté des manuels*.

Classiquement, en France, les manuels proposent de s'intéresser aux fractions dites « *simples* », puis aux fractions décimales et enfin aux nombres décimaux, écrits sous la forme « usuelle ». *Il y a au moins un autre « chemin » !*

Question subsidiaire : qu'appelle-t-on fraction « *simple* » ?

Enfin, du côté de l'HISTOIRE, survol (!), là aussi.

L'usage des FRACTIONS remonte à l'Antiquité.

En ce qui concerne les NOMBRES DECIMAUX, ils ont émergé plutôt au Moyen Age et ont été imposés au public par la Révolution Française. Ils ont permis d'approcher « *au mieux* » la mesure des quantités irrationnelles ou rationnelles apparaissant dans certaines constructions géométriques.

Manuel de la classe de CM1, collection EURO MATH, chez Hatier.
*PERIODES **4** et **5** du manuel (paru en 2006).*

1. Fractions « au quotidien ». Partage d'une tablette de chocolat, exercices avec un cadran d'horloge, apparition des tartes (ou des pizzas, ***aie*** !), détermination de « la moitié de … », « du quart de … », « des trois quarts de … ». (*Attention !*)
2. Fractions et partages de longueurs (*Oui, oui, des **longueurs** : apparition d'une bande unité **l***).
3. Fractions : la machine à partager les segments (*The **KEY** : le partageur universel ou le « **fractionneur universel** »*).
4. Fractions et graduations. 5. Fractions et partage d'aires.
5. Encadrer des fractions par des entiers.
6. Fractions décimales (« ***l'effet-loupe*** »). 8. Fractions décimales et addition. 9. Fractions décimales et nombres décimaux.
10. Comparer des nombres décimaux.
11. Nombres décimaux et mesure des longueurs.
12. Addition et soustraction des nombres décimaux : vers la technique.
13. Nombres décimaux au « quotidien ».

L’idée de **FRACTION** vient de la nécessité de couper, de partager, de « *fractionner* » une ou des entités, des « *unités* », en parts égales.

(…) Pour les égyptiens, les fractions sont des nombres « **rompus** », mais pas n’importe comment : on coupe l’unité en deux, puis en deux, puis en deux, *and so on* … (On définit ainsi la ***dichotomie*** : qui est en quelque sorte « l’opération » contraire à la ***duplication***). On travaille donc (*et surtout*) avec les fractions de la forme $1/2^n$. (…).

Apparaissent ensuite d’autres fractions comme 2/3 ou 5/6 ou 5/7 et quelques (*rares*) autres fractions… Le ***dénominateur*** indique ainsi en combien de parts on partage l’entité ou l’unité et le ***numérateur*** indique le nombre de fois que l’on prend cette ***fraction de l’unité*** : on peut ainsi écrire les égalités suivantes :

$$5/7 = 1/7 + 1/7 + 1/7 + 1/7 + 1/7 = 5 \times 1/7.$$

« 5/7 » est ainsi lu(*e*) comme « cinq septièmes », entendu comme « cinq fois un septième ». (…)

Oui, mais il y a d'autres acceptions de « l'objet » FRACTION (*ou plutôt du nombre rationnel*).

➢ <u>*Acception usuelle*</u> : 5/7 lu(*e*) comme « cinq-septièmes ». *Voir diapositive précédente*. 5/7 = somme de cinq termes égaux à 1/7. On parle de <u>*Fractionnement*</u>.

➢ <u>*Plus délicat*</u> : 5/7 lu(*e*) comme « le septième de cinq ». C'est l'aspect QUOTIENT (*à <u>éventuellement</u> calculer…*) qui est ainsi convoqué. On a : 5/7 « = » 5 ÷ 7. On parle de <u>*Commensuration*</u>.

<u>*Exemple et Illustration*</u> . En se plaçant dans le contexte des LONGUEURS, il faut « démontrer » que, *par exemple*, « les cinq septièmes d'une longueur ***l*** » = « au septième de cinq longueurs ***l*** ». Au travail ! *Voir diapositive suivante.*

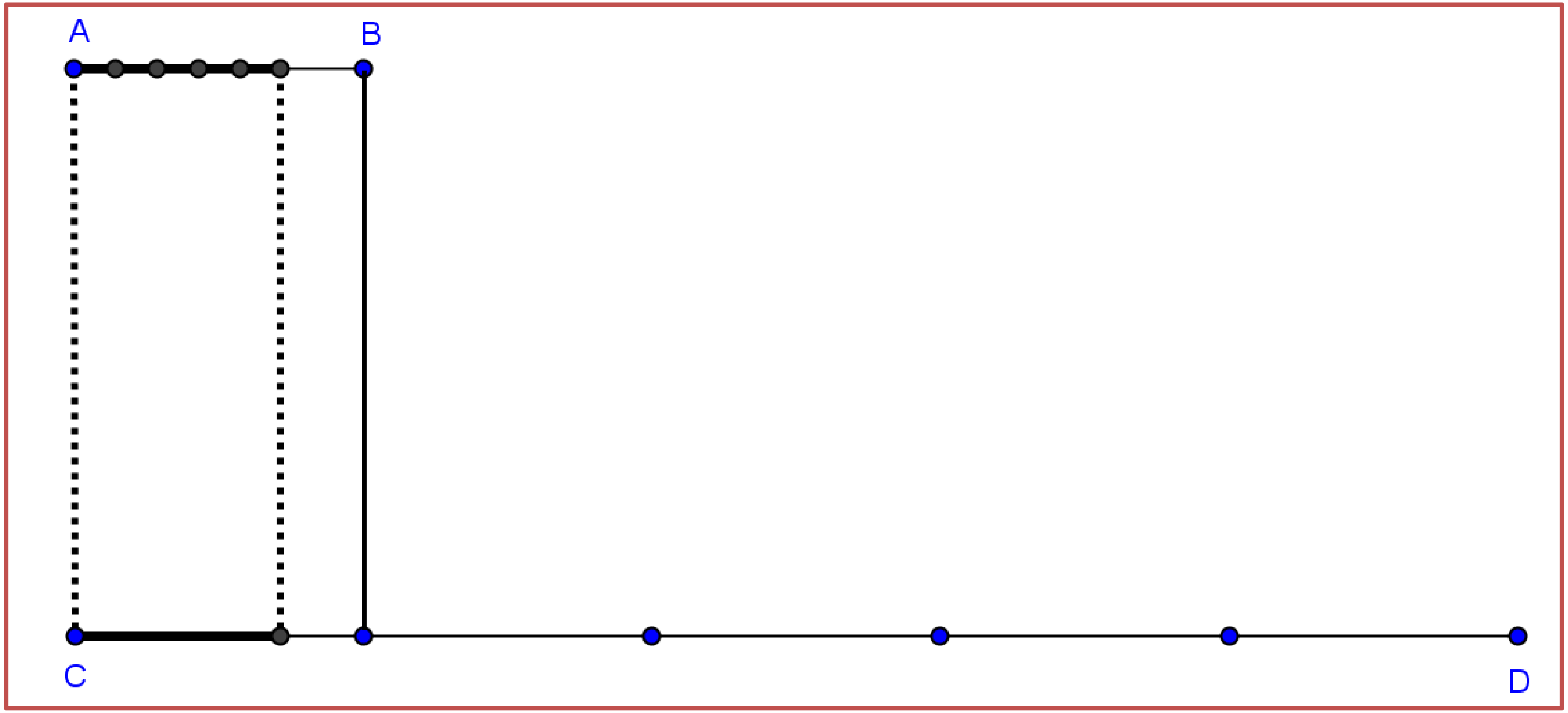
<u>*Instrument officiel utilisé*</u> : le partageur universel de longueurs ou plus simplement le « guide-âne ».

On a : **AB** = $\boldsymbol{l}$ et **CD** = 5$\boldsymbol{l}$

(*i*) Mise en évidence, *par construction géométrique* « *sur* » *le segment* ***[AB]***, d'un segment de longueur 5/7 de $\boldsymbol{l}$.

(*ii*) Mise en évidence, *par construction géométrique* « *sur* » *le segment* ***[CD]***, d'un segment de longueur 1/7 de 5$\boldsymbol{l}$.

(*iii*) ***Identification*** des deux *longueurs* par superposition ou autre…



(*Suite*). <u>Au COLLEGE</u>. On passe à la notion de QUOTIENT.

- Le « nombre » 5/7 est le nombre unique qui multiplié par 7 donne 5 : c'est la solution de l'équation : $7 \times \boldsymbol{x} = 5$.

(*<u>Note de **PW**</u> : on y reviendra pour les nombres décimaux*).

En reprenant l'exemple de la diapositive précédente, il reste à montrer que $7 \times 5/7 = 5$. *Voir ci-dessous.*

On a **CD** = 5 × **AB** = 5***l***. *Voir diapositive précédente.*

(i) Partage de **[CD]** en sept segments de même longueur (*Le segment en « plus gros », ci-dessous*).

(ii) Report de sept segments identiques pour « recouvrir » **[CD]** : on a alors l'égalité $7 \times 5/7\boldsymbol{l} = 5\boldsymbol{l}$.

➢ Enfin, dans l'enseignement, une autre acception de la notion de FRACTION a aussi été privilégiée : 5/7 vu(*e*) comme « opérateur » (*notation dite « fonctionnelle »*). *On y reviendra aussi, surtout si on parle de proportionnalité !*

« L'opérateur » 5/7 est ainsi une « abréviation » de la suite de calculs : « multiplier par 5, puis diviser par 7 ou inversement ». On utilise souvent cette acception « en acte » pour des tâches de la forme « calculer les 5/7 de … ».

Les différents cadres d'introduction (***GLP***, *IREM de Rennes*)

	Partages	Mesures
a $b^{\text{ièmes}}$	partage de l'unité	mesurage par fractionnement de l'unité
a : b	Partage de la totalité	mesurage par commensuration
aspect fonctionnel	Prendre les a $b^{\text{ièmes}}$ d'une grandeur	Proportionnalité entre les mesures

Un bilan « intermédiaire » :

- <u>Format des fractions à étudier en priorité</u> : les fractions décimales, les fractions de le forme $\boldsymbol{n}/2^{\boldsymbol{m}}$ et les fractions de la forme $\boldsymbol{p}/3\boldsymbol{m}$. ***PW*** renvoie à la brochure de l'IREM de Nice, référencée dans la diapositive bibliographie.
- <u>Commencer tôt dans l'année</u> les premiers apprentissages et « spiraler », afin de pouvoir mettre plusieurs couches de « pel » et de rappel.
- <u>Privilégier l'aspect « ***a*** – ***b*** *ièmes* » d'une « fraction »</u>, plutôt dans le cadre des grandeurs, pour les activités de mise en situation.
- <u>Du côté des Techniques Opératoires et de la Résolution de Problèmes</u> : « dossiers » incontournables ! *<u>Deux principes</u>* : situations et problèmes « consistants » et se donner du temps pour une maîtrise raisonnable des Techniques Opératoires. *Cf. la suite du diaporama ! Idem d'avance pour les nombres décimaux.*

Un OUBLI (*volontaire, ouf !*) et pourtant !

Le cadre GRAPHIQUE est aussi convoqué pour donner du SENS à la FRACTION et par extension les NOMBRES DECIMAUX.

Les activités dans ce cadre, sur un axe régulièrement gradué, ont pour fonction de traiter des problèmes liés à l'intercalation et au rangement des fractions et des nombres décimaux. *On peut aller plus loin* : vers les opérations !

A savoir. Sur une graduation, figurent à la fois :

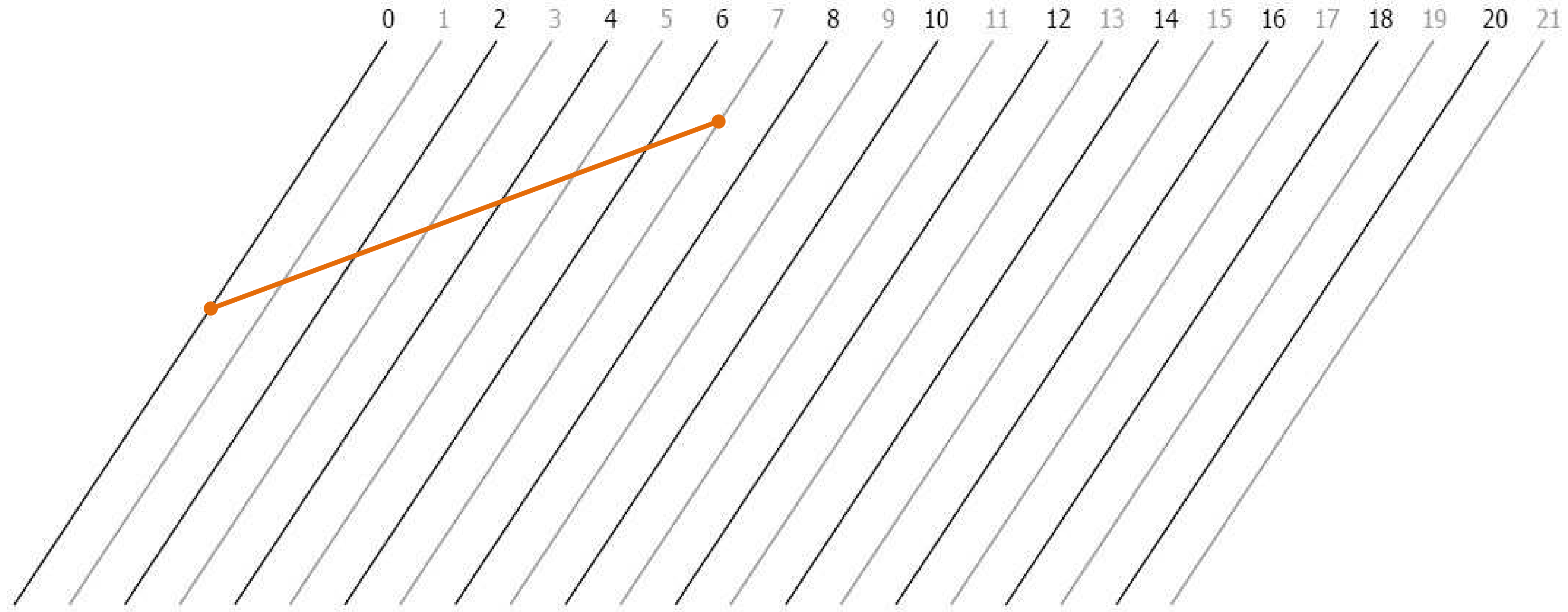
- le « nombre-repère » ou abscisse d'un point ;
- le « nombre-mesure » ou distance d'un point à l'origine ou distance entre deux points.

On est maintenant prêt pour utiliser le « guide-âne » ou « le partageur universel ».

What's that ? C'est un réseau de droites parallèles équidistantes. Comment cela se « fabrique » ? Quelle utilisation ?

Utilisation du guide-âne. On dispose du segment **[AB]** qu'on veut partager en sept segments de même longueur et d'un « guide-âne ».

Algorithme. Poser la droite (**0**) sur une extrémité, « rotationner » le guide-âne jusqu'à ce que l'autre extrémité soit portée par la droite (**7**). MARQUER les points d'intersection, puis COMPTER.



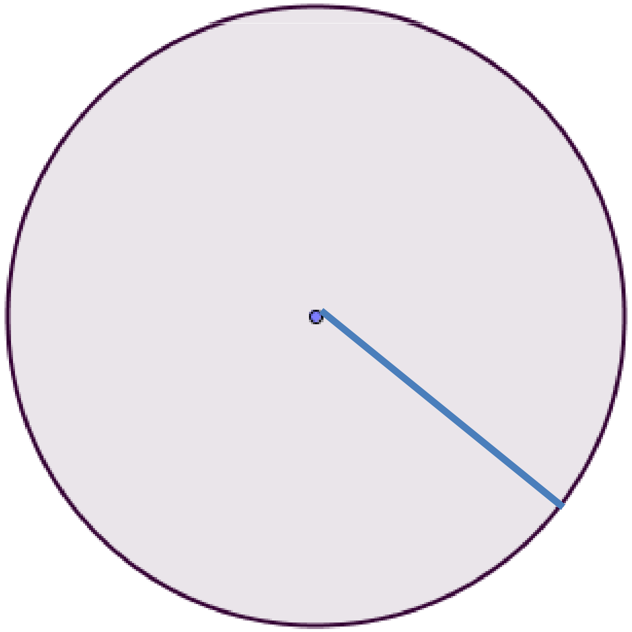
Pourquoi privilégier les longueurs plutôt que les aires ?

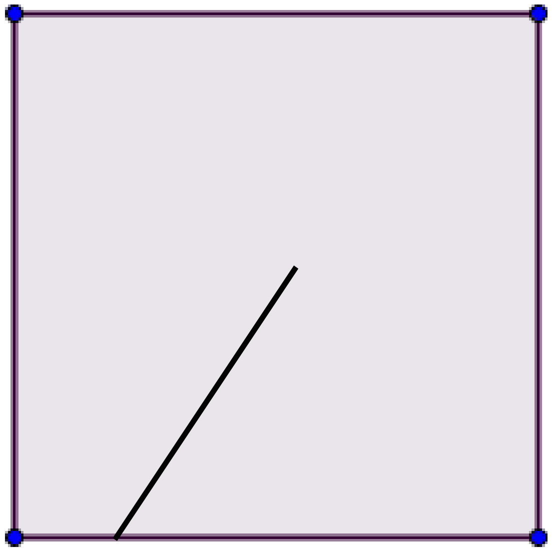
On s'amuse : partager ces deux tartes ou pizzas ou … en trois parts « égales ».

Zut, pour la tarte carrée, mon ami Paul a mis un malencontreux coup de couteau à partir du « centre ». Tant pis, il faut quand même réaliser le partage demandé.

Et une tarte rectangulaire. *Ah non, stop…*

Matériel : règle (éventuellement graduée) et compas, stop, bis !



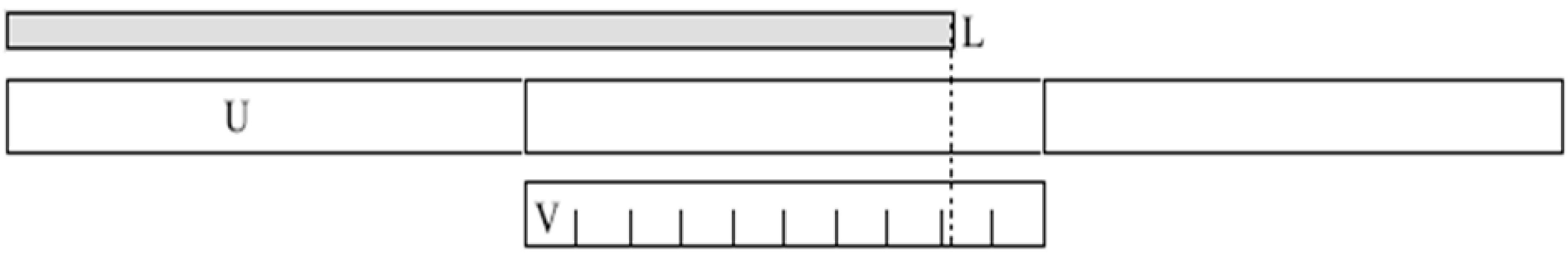


Conséquence pratique : comment faire en classe ?

Un choix : définir FRACTIONS, puis NOMBRES DECIMAUX, à partir de la GRANDEUR ***LONGUEUR***.

Sources : travaux initiaux de l'équipe ERMEL, puis des autres équipes INRP, IREM et COPIRELEM, quelques manuels récents (dont « le » *Cap Math et l'Euro Math*)…

On dispose de deux « objets ». Un « objet » L, dont on cherche la longueur, et une unité de longueur U, subdivisée en 10 sous-unités V. (*On sait faire : le « guide-âne »*).



Information n°1. On a : U < L < 2U.
On cherche ensuite à améliorer cette « information ».

On peut alors couper en deux l'unité U. on obtient alors *l'information n° 2* : U + 1/2U < L < 2U.

Le processus peut se poursuivre ; on choisit en combien de sous-unités (trois, quatre, cinq, …, dix, ***yes*** !) on partage U. On définit ainsi un système de sous-unités (U, V, W, …).

D'où (les) différentes écritures , avec éventuellement apparition de la « fameuse » virgule, en termes de longueurs :

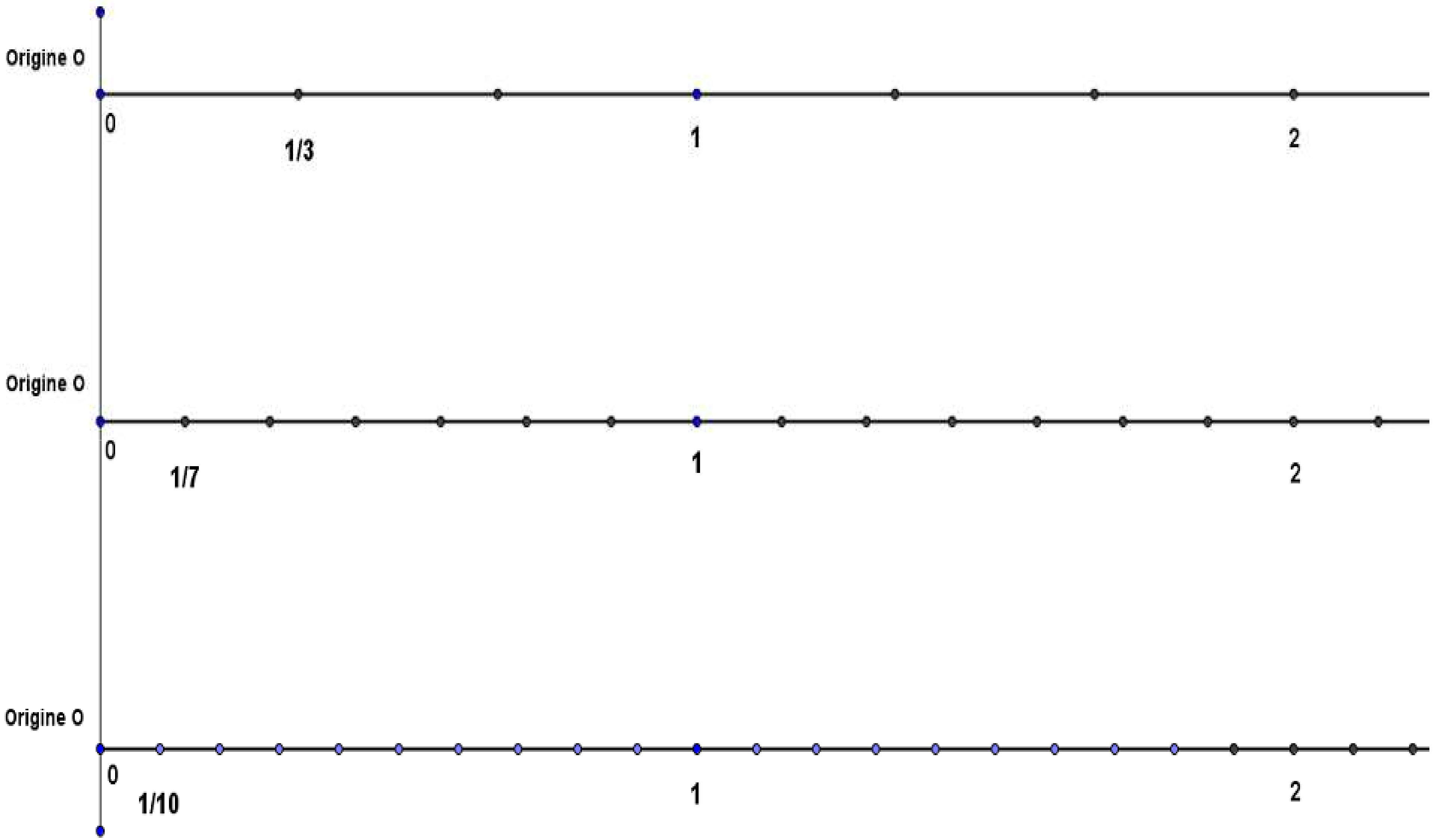
$$L \approx 18V \approx 1U + 8V \approx 1U\ 8V \approx 1{,}8U \approx 18/10\ U \approx \ldots$$

Commentaire : « système » tout à fait pertinent et efficace en base 10. *Cool, ça tombe plutôt bien : on en reparlera* !

La diapositive suivante présente une activité support de travaux calculatoires, à partir d'axes régulièrement gradués.

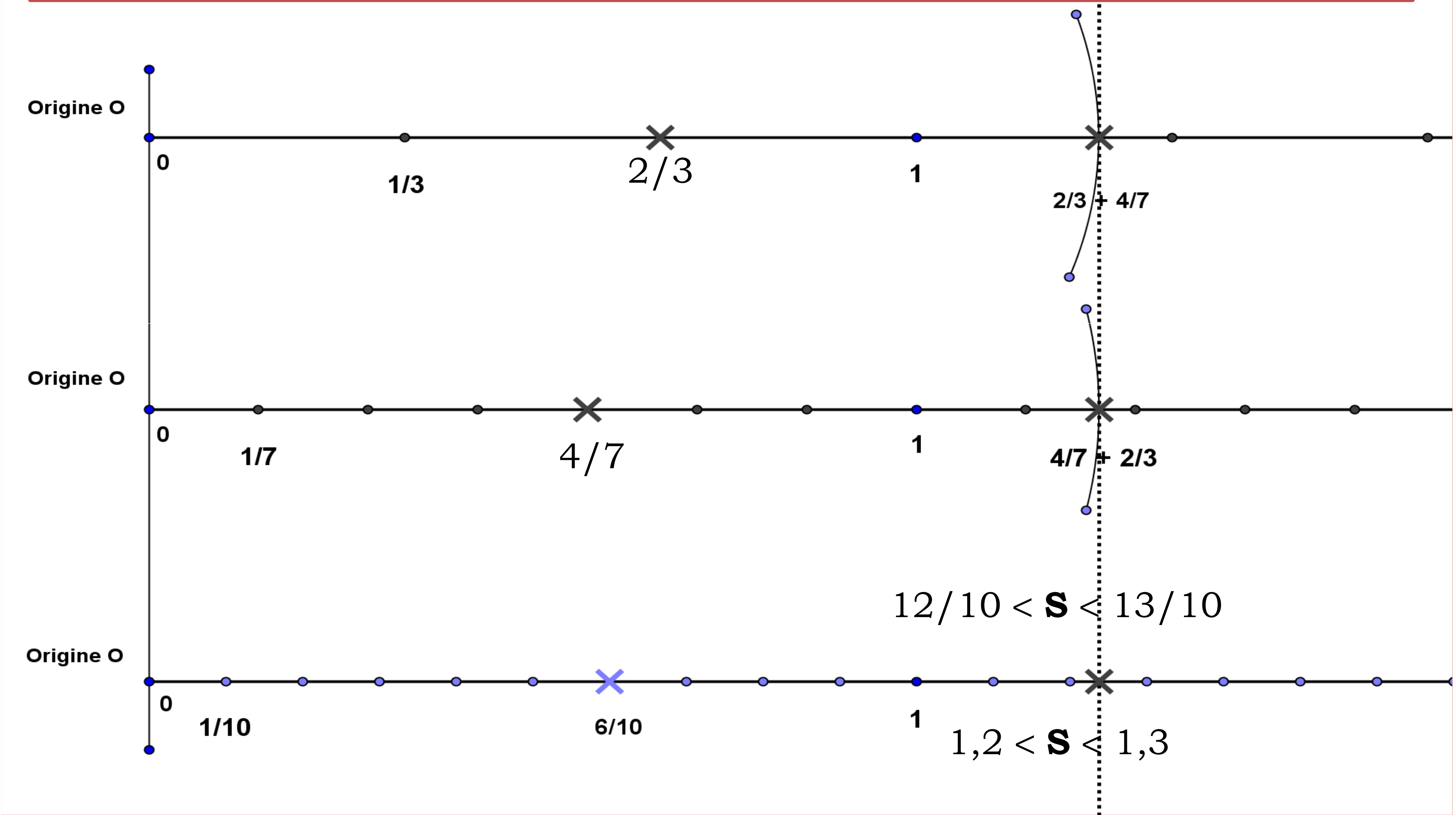
Note de ***PW*** : user et abuser de cette disposition !

Se reporter aux programmes 2008, ***CM1*** *!*


Origine O
0
1/3
1
2
Origine O
0
1/7
1
2
Origine O
0
1/10
1
2

<u>*Un calcul*</u>. **S** = 2/3 + 4/7 = 4/7 + 2/3 = **?** 6/10, car 2 + 4 = 6 et 3 + 7 = 10.

La construction géométrique ci-dessous prouve que c'est ***faux*** ! Et, en plus, on a de belles inégalités ou encadrements de **S**, en « tiers », en « septièmes » et en « dixièmes ». *Top du top d'un point de vue graphique* !



On s'intéresse maintenant aux **NOMBRES DECIMAUX**

Pour ceux qui suivent encore, on avait déjà commencé !

Changement de stratégie(s) : une entrée par quelques ***questions d'enseignement***, *non hiérarchisées*, qui se posent à tout **PE** et tout **PLC**.

1. DEFINITION ? On en donne UNE, oui ? Non ? …
2. Multiplication par 10, 100, 1000, … : justifications et « portée(s) ».
3. Opérations, dont la multiplication. Sens et Techniques.
4. Du côté de l'ordre : ***comparer***, ***ranger***, ***intercaler***, ***encadrer***, ***insérer***, ***générer***, …
5. Nombres décimaux et « moyens » de calcul : Calcul Mental, Calcul Posé, Calcul Instrumenté… (*Une autre fois : et pourquoi pas maintenant ?).*
6. Du côté de la résolution de problèmes… Divers : ouverture vers le collège.
7. Autres questions ? *Ce sera pour l'année prochaine !*

P1	(*Un retour sur les FRACTIONS : fraction « au quotidien », partages de longueurs, partages et grandeurs*). Encadrer une fraction par des entiers, fractions décimales. Fractions et nombres décimaux.
P2	Addition et Soustraction de nombres entiers et décimaux. Soustraction de nombres décimaux : technique. *Utiliser une calculatrice (1).* Comparer des nombres décimaux. *Utiliser une calculatrice (2).*
P3	Multiplication d'un nombre décimal par 10 ou par 100 ou par 1000. Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. (*Proportionnalité (1)*). Nombres décimaux et mesure de longueurs. Décimaux et Fractions.
P4	Division avec quotient décimal. Multiplication d'un décimal par un entier. (*Proportionnalité (2)*). *Calcul Automatisé, Calcul Réfléchi : les quatre opérations*). Nombres décimaux et mesure d'aires, idem avec mesure de contenances. *Utiliser la calculatrice (3).* Décimaux et Fractions.
P5	(*Les différents quotients : entier ou décimal, exact ou approché*). Produit de dixièmes par des dixièmes. Produit de deux nombres décimaux. (…) *Manuel Euro Math CM2, HATIER, 2009*

Calculatrice, Division, Fractions et Nombres à virgule

Dans une classe qui comporte moins de 35 élèves, il y a plus de 10 filles. Si on divise le nombre de filles par le nombre de garçons, on trouve 1,25.

QUESTION : peut-on trouver le nombre de garçons et le nombre de filles de cette classe. *Utilisation possible de la calculatrice, **yes**.*

Nombres à virgule

- Voici une « égalité » : 605 + 65 + 2345 = 945.

Au fait, y a-t-il égalité ? Expliquer, sans lancer de calcul.
Placer alors une ou des virgules « aux bons endroits » pour que l'égalité soit vraie.

- On s'intéresse à cette « égalité » : 7,33 + 6,72 + 6,68 = 21,12

Zut, le résultat est faux ! Remplacer quatre chiffres de cette addition par des zéros pour obtenir un résultat juste.

Nombres décimaux

- « Wanted » ! Rechercher deux nombres décimaux n'ayant pas la même partie entière, distants de 8 millièmes.
- De combien de façons différentes peut-on affranchir une lettre à 3,70 *kopecks* (k) si on dispose de ces huit timbres ?

0,80k ; 0,90k ; 0,80k ; 2,10k ; 0,30k ; 1,70k ; 1,20k et 0,70k

Le défi : ESTIMATOR contre CALCULATOR …

CONSIGNE : il s'agit de colorier les cases lorsque le résultat proposé est faux ou « impossible », mais pas n'importe comment ! *Pas de calculatrice pour le moment* !

- Lorsque la partie entière du résultat est trop « petite », colorier la case en ROUGE.
- Lorsque la partie entière contient trop de chiffres, colorier la case en JAUNE.
- Lorsqu'il y a une erreur dans la partie décimale, colorier la case en VERT.
- Encadrer ou entourer le bon résultat.

PROLONGEMENT : concevoir un tableau du même type en changeant les variables de situations .
Choix de l'opération. (*Pour le moment, addition et soustraction*). Nature des nombres. Taille des nombres, choix des écritures désignatives, … Explicitation à l'oral ou à l'écrit des critères d'élimination.

CALCUL	**Les QUATRE résultats**			
842,75 + 58,50 = ?	8428,25	89,250	901,25	904,125
246 + 9,55 + 72,45 = ?	328	2469,0	188,0	336,90
1460,5 – 683,25 = ?	257,25	764,75	2043,25	777,25
2367,80 – 1425,75 = ?	3782,5	942,05	236,05	957,55
8,25 × 6 = ?	4,85	48,12	49,5	425,6
(*) 65 × 0,35 = ?	6,15	22,75	23,7	135,5
126,3 × 8 = ?	1010,4	62,4	937,9	8730,4
98 × 1,52 = ?	95,6	115,9	148,96	152,56
3,14 × 42 = ?	131,88	12,28	128,5	148,28
(**) 1500 × 0,15 = ?	15,15	150,6	225	175,15

<u>ELEMENTS de réponses aux questions</u>, en se servant éventuellement des problèmes des diapositives précédentes.

1.Une ou des DEFINITIONS ? *Pas si facile que ça* !

(…) « La relation entre <u>**écriture à virgule**</u> et <u>**quotient**</u> de 2347 par 1 00 est une <u>nouveauté</u> pour les élèves ». (Collège) (…)

<u>*Exemple*</u> : « 23,47 est le nombre (*unique*) qui, multiplié par 100, donne 2347 ». C'est la définition d'un quotient. On dispose ainsi d'une <u>**définition**</u> très « robuste » d'un nombre décimal, *sans négliger le fait que cette définition soit conceptuellement délicate à appréhender pour les élèves. Et pour les PE ?*.

On doit donc essayer de chercher à faire vivre dans la classe l'énoncé suivant :

Un nombre décimal est un nombre qui multiplié par 1, 10, 100, 1 000, 10 000, … donne un nombre entier.

Sans la généraliser avec les puissances de 10, cette définition peut être opératoire dès le cycle III et, évidemment, en classe de sixième, <u>*quelle que soit l'écriture choisie*</u>.

*<u>Note de **PW**</u>**.** Il faudrait peut être que cette définition le soit aussi pour le niveau **CM**, au vu des nouveaux programmes 2008 du primaire ! En effet, on opère avec ces nombres et un recours à une définition forte et stable est dans ce cas plus que nécessaire.*

Cette DEFINITION pose donc le problème de la multiplication par 10, 100, 1000, …, en relation avec cette « même » multiplication pour les nombres entiers.

Quelle « technique » et quelle(s) justification(s) ? A partir de l'exemple : **P** = 17,805 × 10. (*Manuel Cap Math, CM2*).

- On a : 17,805 = 1dizaine 7unités 8dixièmes et 5millièmes. (*Décomposition canonique*)
- Si on prend « 10 fois ce nombre », on obtient « 10 fois plus de chaque unité », c'est à dire : **P** = (17,805 × 10) = 10 dizaines 70 unités 80 dixièmes et 50 millièmes. (*Distributivité en acte*)
- Par « *la règle d'échange du 10 contre 1* », on en déduit alors que : **P** = (17,805 × 10) = 1centaine 7dizaines 8unités et 5centièmes. On retranscrit alors dans la forme usuelle.

Soit : **P** =17,805 × 10 = 178,05.

Une preuve, et c'est même une « technique » initiale !

P = 17,805 × 10 = 17,805 + 17,805 + … + 17,805 = 178,05

(**P** = somme de dix termes égaux à 17,805 : *on savait déjà le faire !*).

TRACE écrite et à faire apprendre : « *Ce n'est pas la virgule qui se déplace, c'est chaque chiffre qui « monte » d'un rang vers la gauche quand on multiplie par 10* ».

COMMENTAIRE : Pourquoi préférer le changement de rang pour les chiffres au « déplacement » de la virgule ?

D'abord, une virgule ne se déplace « jamais » : on le « voit » dans un tableau de numération, la virgule est « toujours » entre l'unité et le dixième, et pourtant !

Deux autres arguments plus sérieux :

Argument (i). Cette technique rend compte de l'effet de la multiplication par 10 sur le décalage de chaque chiffre dans les rangs. (*Par exemple, une unité devient une dizaine*).

Elle donne des raisons objectives, mathématiques d'enseigner la NUMERATION, avec les règles y afférant (*Décompositions de toutes sortes, règles d'échanges, notions de groupements, puis calculs*).

Argument (ii). Elle est valable aussi bien pour les nombres entiers que pour les nombres décimaux. Cette « technique » a donc une portée et un avenir !

Pour aller plus loin : on procède de la même manière pour diviser par 10, 100, 1000, … : on utilise les mêmes fondamentaux de la NUMERATION : décompositions canoniques et autres, règles d'échanges et distributivité en acte. *Pas mal du tout !*

Prolongement : et la multiplication de deux nombres décimaux. Ah oui, il faut s'en occuper très sérieusement !

Un exemple emblématique de « saut conceptuel ».

Soit à calculer le produit **P** = 5,7 × 2,75

On « sait » que 2,75 est égal à 275/100, il peut maintenant être considéré comme le nombre qui, multiplié par 100, donne 275. Cela permet une justification du calcul du produit de deux nombres décimaux, comme par exemple pour calculer **P**.

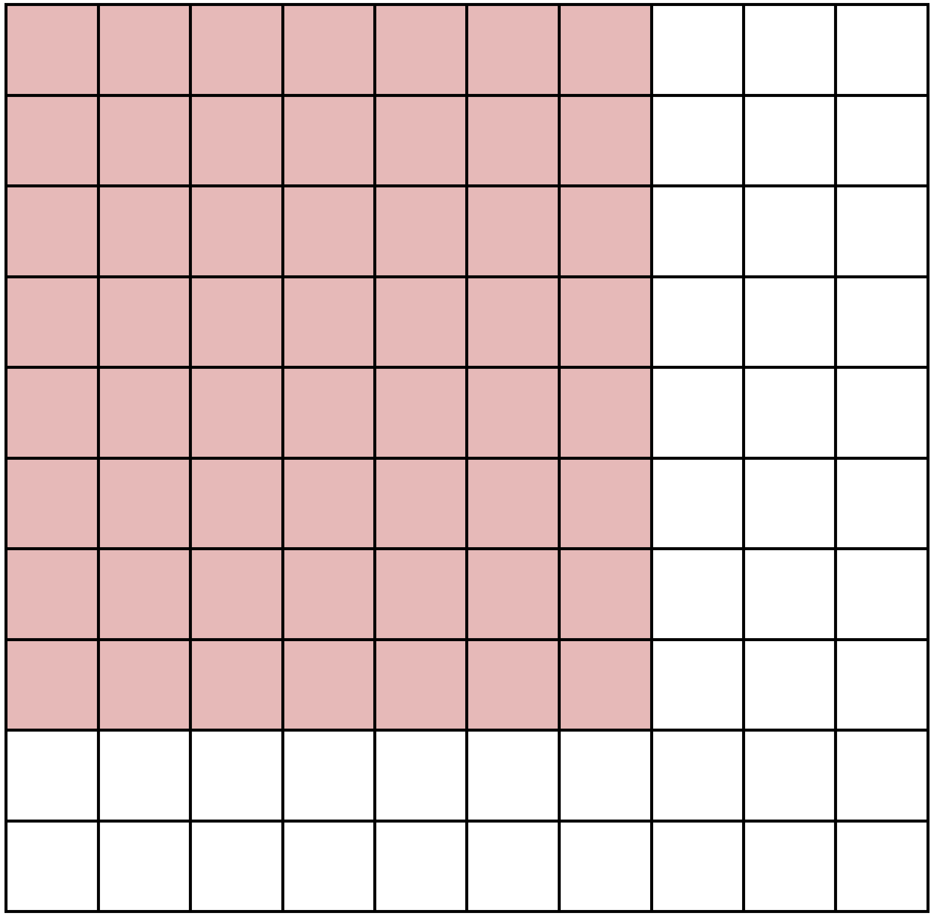
Sachant que (5,7 × 10 = 57 et 2,75 × 100 = 275), on a alors : 57 × 275 = (5,7 × 10) × (2,75 × 100) = 5,7 × 2,75 × 1000 = **P** × 1000. Le produit **P** = 5,7 × 2,75 est donc le nombre (*unique*) qui, multiplié par 1 000, donne 57 × 275, c'est à dire : 5,7 × 2,75 = (57 × 275)/1000 = 15675/1000 = 15,675.

Autre technique : utilisation des fractions décimales, exemple.

Bon, admettons et « *koment kon fait* » pour $0{,}7 \times 0{,}8$?

On considère un carré de côté **1**. On partage sa « *longueur* » et sa « *largeur* » en dix. On obtient alors un quadrillage contenant 100 « petits » carrés. On marque les graduations 0,7 et 0,8. On « colorie » le rectangle de côtés 0,7 et 0,8. Conclure… *Pas mal du tout !*

0,7 = 7/10



0,8 = 8/10

PW *confirme, pas mal du tout ! Sans trop d'efforts, on peut alors « dépasser « 1 et s'intéresser au produit : $1{,}7 \times 0{,}8$. A explorer !*

Les NOMBRES DECIMAUX et l'ORDRE

« <u>Micro-trottoir</u> » ! **COMPARER** 7/5 et 8/6. Donner plusieurs techniques, justifier…

<u>**COMPARER**</u>. <u>Un principe pédagogique</u> : varier les « formats » d'écriture des nombres en jeu et utiliser le plus souvent possible la droite graduée (*incontournable !*).

<u>*Exemples*</u>. Comparer 0,17 et 0,2 ; comparer 0,17 et 2/10 ; comparer 2 + 34/100 et 2,034 ; comparer 3 + 4/10 et 4 – 3/10 ; comparer 5 + 37/100 et 54/10 ; comparer deux fractions décimales n'ayant pas le même dénominateur ; …

<u>*Questions **PE***</u> : quelles traces écrites (*idem pour tous les autres verbes d'action qui suivent*) ?

<u>ENCADRER</u>. Des items à travailler, en notant $\boldsymbol{d}$ un nombre décimal donné, <u>sous un format quelconque</u>, encadrer $\boldsymbol{d}$ par deux entiers consécutifs $\boldsymbol{n}$ et ($\boldsymbol{n}$ + 1), encadrer $\boldsymbol{d}$ par deux fractions décimales de même dénominateur et de « numérateurs consécutifs ».
<u>Important</u>. Contrôle de l'encadrement : vérifier par le calcul d'une différence que le « pas » obtenu est celui demandé.

<u>INTERCALER</u>. Donner un (deux, onze, …) nombre(s) compris entre 12,7 et 12,8.
(Insister sur la rupture avec l'ordre dans $\mathbb{N}$ et l'ordre dans $\mathbb{D}$).

Pourquoi onze ? Onze est un nombre intéressant dans ce cas, car il oblige à « descendre » d'une puissance de 10.
Problème du **PE** : quelle(s) trace(s) écrite(s) ?

INSERER et « **GENERER** », puis **RANGER**.

Exemple : On s'intéresse au nombre 47,12. Insérer un chiffre choisi (le 3, le 0, …) pour générer de nouveaux nombres et les ranger ensuite par ordre croissant.

Problème du ***PE*** : quelle(s) trace(s) écrite(s) ?

Le « dossier » plus spécifique des Techniques Opératoires peut (et doit ?) faire l'objet d'une autre « animation-conférence », next year, même si j'en ai déjà dit quelques mots, bien insuffisants, hélas !

<u>Dernier point pour conclure</u>

Quelques erreurs habituelles relevées dans l'usage des nombres décimaux par les élèves, à l'entrée en classe de sixième, quel traitement ?

(*Brochure n°61 de l'APMEP, datant de **1986** !*)

E1. On rencontre des égalités du type : 2,3 × 4,9 = 8,27 ou 17,3 + 21,8 = 38,11.

E2. Le nombre 3,2 est inférieur au nombre 3,135.

E3. Intercaler un nombre entre 12,34 et 12,35. Il n'y en a pas.

E4. Les écritures 41,45 et 41,450 désignent des nombres différents.

E5. A la question : « *Lorsqu'on multiplie un nombre par un autre, le résultat est « toujours » plus grand ?* », beaucoup d'élèves répondent par l'affirmative. Du coup, la division « *rapetisse* » !

Voilà pour aujourd'hui, même si le « dossier » est loin d'être (*mathématiquement*) clos !!!

MERCI. Pour toute question, écrire à ***PW*** :

patrick.wieruszewski@univ-orleans.fr

ANNEXE 1 : une synthèse « minimale », suite de la diapo ?

*Pour que les élèves aient une bonne représentation des **fractions** et des **nombres décimaux**, on doit, démarrer à l'école et poursuivre au collège, dans le cadre des programmes et du SCCC :*

- *S'appuyer sur les grandeurs et leurs mesures.*
- *Varier les registres de travail, et, en particulier, favoriser le « repérage » d'une **fraction** ou d'un **nombre décimal** par rapport à d'autres nombres, en particulier les nombres entiers.*
- *Ne pas focaliser tout l'enseignement sur les fractions inférieures à l'unité.*
- *Donner un moyen d'établir et de consolider les procédures ou les techniques de calcul. Chercher aussi à justifier et à légitimer ces techniques.*

<u>ANNEXE 2</u>. Un exemple de « guide-âne », à photocopier…