POLYTECH ORLÉANS
École polytechnique de l'Université d'Orléans

Mécanique des Milieux Continus

2020-2021

POLYTECH ORLÉANS
École polytechnique de l'Université d'Orléans

TD 8: Description lagrangienne et eulérienne, transformations

Exercice 1: Présentation lagrangienne et eulérienne

Soit R = (O ; $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$) un repère cartésien orthonormé dans un référentiel euclidien. On considère la transformation **homogène** définie à l'instant $t > 0$ par :

$$x_1 = X_1\ (1 + \alpha\, t) \qquad x_2 = X_2 \qquad x_3 = X_3 \qquad \alpha > 0$$

a- Déterminer la vitesse et les trajectoires

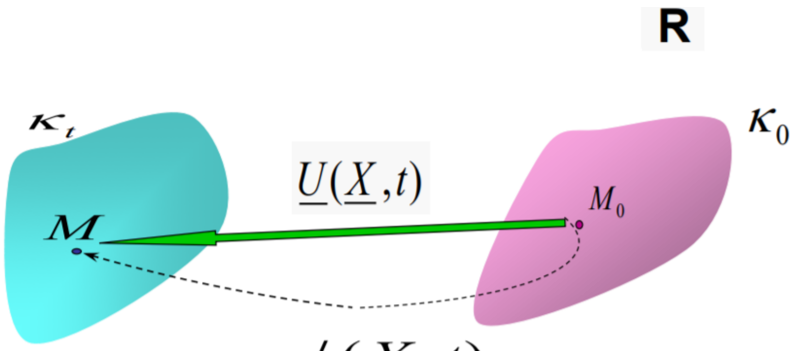
b- Donner la représentation eulérienne du mouvement et déterminer les lignes de courant à l'instant $t>0$

Solution exercice 1

Commentaires : Remarquons d'abord que la transformation est bien homogène : la matrice $\underline{\underline{F}}$ est bien indépendant des coordonnées. On ne nous précise pas la description (lagrangienne ou eulérienne) à adopter.

Dans les données du problème on a la position actuelle $\boldsymbol{x}_i$ en fonction de la position initial $\boldsymbol{X}_i$ et le temps $\boldsymbol{t}$: donc c'est bien une description lagrangienne qui est utilisée via les équations paramétriques (les positions horaires)

Solution exercice 1



$$\underline{x} = \phi(\underline{X}, t)$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1+\alpha t) \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

a) Déterminer la vitesse et les trajectoires.

Description lagrangienne:

$$\underline{U}(\underline{X},t) = \underline{M_0 M} = \underline{x} - \underline{X}$$

1. la trajectoire d'un point c'est le lieu géométrique des positions successives d'une particule et la vitesse est toujours tangent à la trajectoire.

Et dans cet exercice, comme la vitesse est selon $\underline{e_1}$, donc les trajectoires sont des droites parallèles à l'axe $\underline{e_1}$.

Autre méthode: on peut calculer le vecteur de déplacement: $\underline{u} = MoM = \underline{x} - \underline{X} = (x_1 - X_1)\underline{e_1} + (x_2 - X_2)\underline{e_2} + (x_3 - X_3)\underline{e_3}$ $= (\alpha t X_1)\underline{e_1}$ donc le déplacement ou les trajectoires sont parallèles à $\underline{e_1}$

2. $V_i(X_1, X_2, X_3, t) = \frac{dx_i(X_1, X_2, X_3, t)}{dt}$ i=1,2,3 (1)

Donc $V_1(X_1, X_2, X_3, t) = \frac{dx_1}{dt} = \alpha X_1$; $V_2(X_1, X_2, X_3, t) = \frac{dx_2}{dt} = 0$; $V_3(X_1, X_2, X_3, t) = \frac{dx_3}{dt} = 0$ (2)

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1+\alpha t) \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

b) Donner la représentation eulérienne du mouvement et déterminer les lignes de courant à l'instant t>0

Description eulérienne : il faudra décrire les vitesses dans la configuration actuelle (donc pour tout point de cordonnées x(x1,x2,x3) il faudra trouver la vitesse exprimée uniquement en termes des coordonnées actuelles.

D'après l'equation $x_1 = X_1(1+\alpha t)$, on trouve $X_1 = \frac{x_1}{(1+\alpha t)}$ qu'on injecte dans l'équation (2) (équations des vitesses dans la partie a), on obtient alors la description eulérienne :

$$V_1(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\alpha x_1}{(1+\alpha t)} \; ; \quad V_2(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad ; \quad V_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0$$

Les lignes d'écoulement sont données par le système d'équations différentielles suivant (exprimant le fait que les lignes d'écoulement sont tangentes aux vitesses) :

$$\frac{dx_1}{V_1} = \frac{dx_2}{V_2} = \frac{dx_3}{V_3}$$

Dans notre cas puisque $V_2(x_1, x_2, x_3, t) = V_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0$, il faudra $dx_2 = dx_3 = 0$: la transformation se fait uniquement selon l'axe Oe1 $\longrightarrow$ Les lignes de courant sont donc des droites parallèles à l'axe $\underline{e_1}$ $\longrightarrow$ Dans ce cas ces lignes sont donc confondues avec les trajectoires

Exercice 2: Présentation lagrangienne et eulérienne

Soit R = (O ; $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$) un repère cartésien orthonormé dans un référentiel euclidien.

On considère le mouvement défini par $t > 0$ par :

$x_1 = X_1 + \alpha\, t\, X_2,$ $\quad x_2 = X_2 + \alpha\, t\, X_1$ $\quad x_3 = X_3$ $\quad \alpha > 0$

a- Sur quel intervalle de temps ce mouvement est il défini ?

b- Déterminer les trajectoires

c- Donner la représentation eulérienne du mouvement

d- Calculer le tenseur de transformation et le tenseur de dilatation

e- Soit dans la configuration initiale trois points A(3,0,3), B(0,2,3) et C(0,0,3) Identifier les coordonnées du vecteur $\underline{AB}$ dans la configuration actuelle.

f- Calculer la dilatation dans les directions $\underline{e}_1$ et $\underline{e}_2$. En déduire la longueur des vecteurs $\underline{CA}$ et $\underline{CB}$ dans la configuration actuelle.

g- Quelle est l'angle engendré par les vecteurs CA et CB dans la configuration actuelle ?

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Solution exercice 2

a) Sur quel intervalle de temps ce mouvement est-il défini?

Globalement le <u>mouvement est défini pour t>0</u>.

La transformation de la configuration initiale à la configuration actuelle doit être <u>**bijective**</u>

<u>Le déterminant de la transformation ne peut pas être ni zéro ni infini</u>

$$\overline{\overline{\nabla}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \longrightarrow \overline{\overline{\nabla}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ensuite, on calcule le déterminant de la transformation: $\det \overline{\overline{\nabla}} = 1 - (\alpha t)^2 \neq 0 \; d'où \; t \neq \frac{1}{\alpha}$

$$Alors \; 0 < t < \frac{1}{\alpha}$$

b) Déterminer les trajectoires

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Pour obtenir les trajectoires dans ce plan, il faut éliminer le temps des équations de la transformation.

A partir des équations:

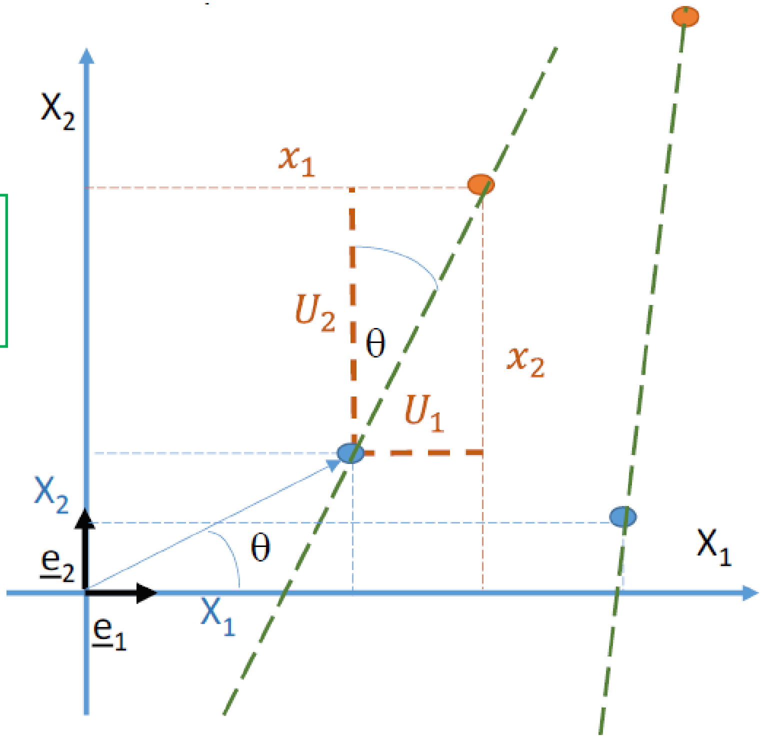
$$x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \quad (1)$$
$$x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \quad (2)$$

On peut obtenir:

$$\left.\begin{array}{l} de\ (1):\ \alpha t = \dfrac{x_1 - X_1}{X_2} \\ de\ (2):\ \alpha t = \dfrac{x_2 - X_2}{X_1} \end{array}\right\} \quad \frac{x_1 - X_1}{X_2} = \frac{x_2 - X_2}{X_1} \longrightarrow \boxed{\frac{X_1}{X_2} = \frac{x_2 - X_2}{x_1 - X_1} = \frac{U_2}{U_1}}$$

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{U_1}{U_2}$$

On constate donc que les coordonnées du vecteur déplacement U_2 et U_1 sont proportionnels aux coordonnées X1, X2. Les <u>trajectoires sont des droites formant avec l'axe Oe2 le même angle que les vecteurs de la position initiale de chacun des points matériaux formants avec l'axe Oe1</u> (voir illustration cj).



$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

c) Donner la représentation eulérienne du mouvement.

Pour la description **eulérienne**, il faut calculer les vitesse et les exprimées uniquement en fonction des coordonnées actuelles et éventuellement le temps.

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad i = 1,2,3 \qquad v_1 = \alpha X_2 \qquad v_2 = \alpha X_1 \qquad v_3 = 0$$

Il faut encore remplacer X_1 et X_2 en fonction de x_1 et x_2

En utilisant les équations de la transformations:

$$x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \longrightarrow X_1 = x_1 - \alpha t X_2$$

$$Remplaçant\ X_1\ \ dans\ l'équation:\ x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \longrightarrow x_2 = X_2 + \alpha t\,(x_1 - \alpha t X_2) \longrightarrow X_2 = \frac{x_2 - \alpha t x_1}{1 - (\alpha t)^2} \quad (*)$$

Donc $X_1 = \frac{x_1 - \alpha t x_2}{1-(\alpha t)^2} \quad (**)$

D'où: $v_1 = \alpha \frac{x_2 - \alpha t x_1}{1-(\alpha t)^2}$

$$v_2 = \alpha \frac{x_1 - \alpha t x_2}{1-(\alpha t)^2}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

d) Calculer le tenseur de transformation et le tenseur de dilatation

Le tenseur de transformation:

$$\overline{\overline{\nabla}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \overline{\overline{F}}$$

Le tenseur de dilatation:

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^t . \overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha t & 0 \\ \alpha t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (\alpha t)^2 & 2\alpha t & 0 \\ 2\alpha t & 1 + (\alpha t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note: $\overline{\overline{F}}$ est symétrique donc $\overline{\overline{F}}^t = \overline{\overline{F}}$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

e) **Soit dans la configuration initiale trois points A(3,0,3), B(0,2,3) et C(0,0,3) Identifier les coordonnées du vecteur AB dans la configuration actuelle.**

Configuration initiale

Notons par $\bar{V} = \overline{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le vecteur transformé sera $\bar{v} = \bar{\bar{F}}.\overline{AB} = \begin{pmatrix} -3 + 2\alpha t \\ 2 - 3\alpha t \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

f) Calculer la dilatation dans les directions e1 et e2. En déduire la longueur des vecteurs CA et CB dans la configuration actuelle.

Pour un vecteur quelconque $\underline{V}$ et son transforme $\underline{v}$, la dilatation est donnée par $\lambda = \frac{|v|}{|V|}$

On trouve les dilatations dans la direction e_1 et e_2 respectivement :

$$\lambda_1 = \sqrt{C_{11}} = \sqrt{1 + (\alpha t)^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \sqrt{C_{22}} = \sqrt{1 + (\alpha t)^2}$$

Dans la configuration initiale: $|\underline{CA}| = 3$ & $|\underline{CB}| = 2$

$$\lambda(\underline{CA}) = \frac{\sqrt{\underline{CA}^t . \overline{\overline{C}} . \underline{CA}}}{|\underline{CA}|} = \frac{\sqrt{(3\underline{e_1})^t . \overline{\overline{C}} . (3\underline{e_1})}}{3} = \frac{3\sqrt{C_{11}}}{3} = \lambda_1$$

Dans la configuration actuelle: $|\underline{ca}| = \lambda(\underline{CA}) . |\underline{CA}| = 3\lambda_1 = 3\sqrt{1 + (\alpha t)^2}$

$|\underline{cb}| = 2\lambda_2 = 2\sqrt{1 + (\alpha t)^2}$ (même principe)

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t X_2 \\ x_2 = X_2 + \alpha t X_1 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

g) Quelle est l'angle engendré par les vecteurs CA et CB dans la configuration actuelle?

$$\sin\theta = \frac{\underline{v}.\underline{w}}{|\underline{v}| * |\underline{w}|} = \frac{\underline{V}^t.\bar{\bar{\boldsymbol{C}}}.\underline{W}}{|\underline{v}| * |\underline{w}|}$$

Avec: $\underline{V} = \underline{CA} = 3\underline{e_1}$

$\underline{W} = \underline{CB} = 2\underline{e_2}$

$\underline{CA}^t.\bar{\bar{\boldsymbol{C}}}.\underline{CB} = 3\underline{e_1}.\bar{\bar{\boldsymbol{C}}}.2\underline{e_2} = 6C_{12}$

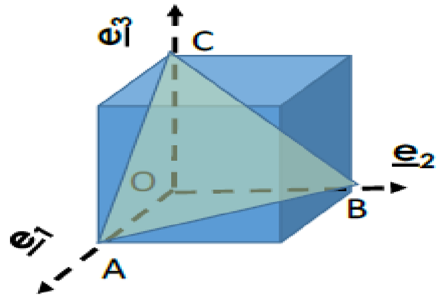
Donc: $\sin\theta = \frac{6C_{12}}{3\sqrt{1+(\alpha t)^2} * 2\sqrt{1+(\alpha t)^2}} = \frac{2\alpha t}{1+(\alpha t)^2}$ $alors\ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{2\alpha t}{1+(\alpha t)^2}\right)$

$Et\ l'angle\ (\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\pi}{2} - \theta = (\underline{ca}, \underline{cb})$

Exercice 3 : Transformation finie: extension bi-axiale

Soit R = (O ; $\underline{e_1}$, $\underline{e_2}$, $\underline{e_3}$) un repère cartésien orthonormé dans le référentiel R. On considère dans la configuration initiale un cube de côté 1m engendré par les axes du repère et avec un sommet au point O, qui subit une transformation homogène définie à l'instant $t > 0$ par :

$$x_1 = X_1 \ (1 + \alpha\ t)$$
$$x_2 = X_2 (1+4\alpha\ t)$$
$$x_3 = X_3$$
$$\alpha > 0$$



a- Calculer le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{\nabla \phi}}(t)$ et le tenseur des dilatations $\underline{\underline{C}}(t)$

b- Si la masse volumique du cube dans la configuration initiale est ρ_0, quelle sera sa masse volumique dans la configuration actuelle ?

c- Soit dans la configuration initiale le triangle ABC avec A (1,0,0) B(0,1,0) et C(0,0,1) comme sur la figure. Notons par $\underline{S}$ le vecteur aire associé à ce triangle dans la configuration initiale. Calculer le vecteur aire dans la configuration actuelle. En déduire l'aire du triangle dans la configuration déformée

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1+\alpha t) \\ x_2 = X_2(1+4\alpha t) \\ x_3 = X_3 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

a) Calculer le gradient de la transformation et le tenseur des dilatations

Le tenseur de transformation:

$$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{\nabla}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 1+4\alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le tenseur de dilatation:

$$\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^t . \bar{\bar{F}} = \begin{bmatrix} 1+\alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 1+4\alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\alpha t & 0 & 0 \\ 0 & 1+4\alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(\alpha t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+(4\alpha t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1+\alpha t) \\ x_2 = X_2(1+4\alpha t) \\ x_3 = X_3 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

b) Si la masse volumique du cube dans la configuration initiale est ρ_0, quelle sera sa masse volumique dans la configuration actuelle?

Dans n'importe quelle configuration, la masse du cube reste la même

$$m_o = m_t$$

$$\rho_o * \Omega_0 \overset{?}{=} \rho_t * \Omega_t \longrightarrow \rho_t = \frac{\rho_o * \Omega_0}{\Omega_t}$$

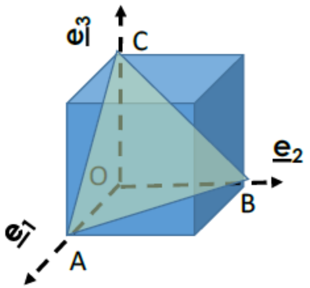
Avec le volume dans la configuration actuelle est: $\Omega_t = \Omega_0 \det(\bar{\bar{F}}) = \Omega_0.(1+\alpha t).(1+4\alpha t)$

La masse volumique sera alors:

$$\rho_t = \frac{\rho_o * \Omega_0}{\Omega_0.(1+\alpha t).(1+4\alpha t)}$$

$$\boxed{\rho_t = \frac{\rho_o}{(1+\alpha t).(1+4\alpha t)}}$$

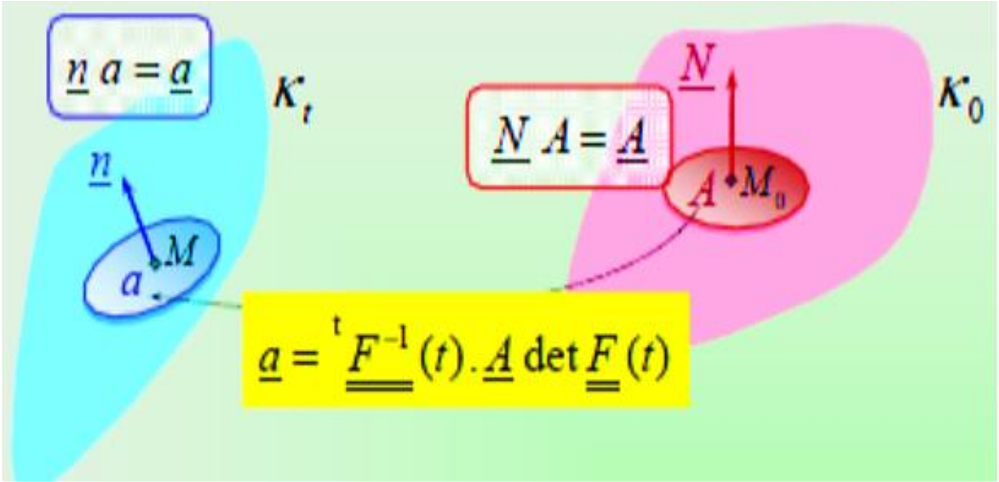
c) **Soit dans la configuration initiale le triangle ABC avec A (1,0,0) B(0,1,0) et C(0,0,1) comme sur la figure. Notons par S le vecteur aire associé à ce triangle dans la configuration initiale. Calculer le vecteur aire dans la configuration actuelle. En déduire l'aire du triangle dans la configuration déformée**



$$\begin{cases} x_1 = X_1(1+\alpha t) \\ x_2 = X_2(1+4\alpha t) \\ x_3 = X_3 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

La formule du transport convectif d'un vecteur aire est:

$$\underline{s} = {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}(t).\underline{S}\det\underline{\underline{F}}(t)$$



Avec: $\underline{S} = le\ vecteur\ aire\ dans\ la\ configuration\ initiale$

$\underline{S} = S.\underline{N}$

Et $\underline{N} = \frac{\underline{e_1}+\underline{e_2}+\underline{e_3}}{\sqrt{3}}$

D'où: $\underline{s} = S\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \frac{1}{1+\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+4\alpha t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.(1+\alpha t).(1+4\alpha t) = S\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} (1+4\alpha t) \\ (1+\alpha t) \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = X_1(1+\alpha t) \\ x_2 = X_2(1+4\alpha t) \\ x_3 = X_3 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

L'aire du triangle dans la configuration déformé sera alors

$$s = S\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(1+4\alpha t)^2 + (1+\alpha t)^2 + 1}$$