



# Chapitre 2

## Généralités sur les transferts de chaleur

## 2.1 Champ de température

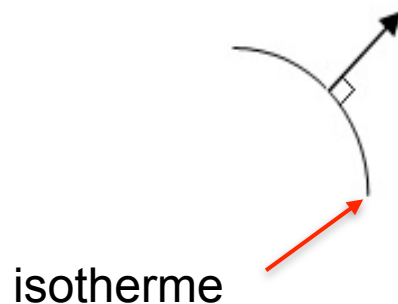
Les transferts d'énergie sont déterminés à partir de l'évolution dans l'espace et dans le temps de la température :  $T = f(x, y, z, t)$ . La valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un **scalaire** appelé champ de température.

2 cas :

Régime permanent (stationnaire) : le champ de température est indépendant du temps,

Régime variable (ou transitoire) : le champ de température varie dans le temps

## 2.2 Gradient de température



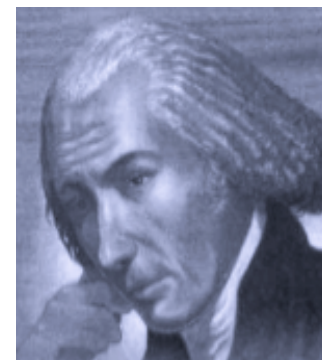
$$\vec{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n}$$

### 2.3 Flux de chaleur

La quantité de chaleur transmise par unité de temps est appelée flux de chaleur :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}$$

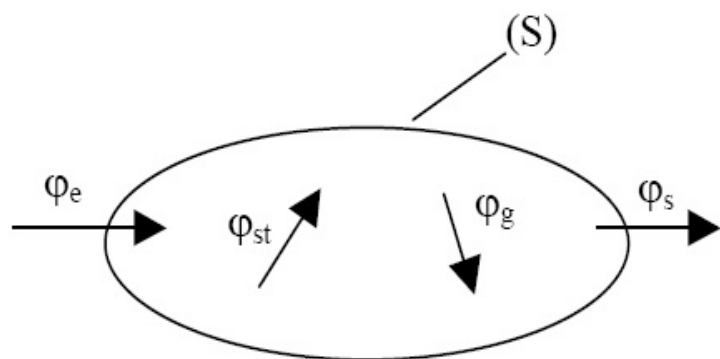
Densité de flux :



**James Watt**  
(1736 - 1819)

# 2. Généralités sur les transferts de chaleur

## 2.4 Bilan d'énergie d'un problème de transfert de chaleur



bilan d'énergie du système :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_{st} + \varphi_s \quad 1$$

$$-\int_S \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot dS + \int_V q \cdot dV = \int_V \rho \cdot C \cdot (\partial T / \partial t) \cdot dV \quad 2$$

$$\text{div } \vec{\varphi} + \rho \cdot C \cdot (\partial T / \partial t) - q = 0 \quad 3$$

$$\Delta T(x, y, z, t) = \frac{1}{a} \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} - q(x, y, z, t)$$

$T, \phi, \varphi$

$(x, y, z), t$

$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_P}$$

$a = (\alpha) =$  diffusivité thermique ( $\text{m}^2/\text{s}$ )

$a = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  dans le cas des métaux

### 2.5 Flux de chaleur stocké

Expression :  $dQ = \rho \cdot V \cdot C \cdot dT$

Pour élever la température de  $T_1$  à  $T_2$  :

$$\Delta Q = \rho \cdot V \cdot C \cdot (T_2 - T_1) = m \cdot C \cdot (T_2 - T_1) = Q$$

Le flux de chaleur, suivant sa valeur chauffera plus ou moins vite le solide :

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \qquad \Phi = \rho \cdot V \cdot C \cdot \frac{dT}{dt}$$

# Chapitre 3

## Conduction en régime permanent



# 3. Conduction en régime permanent

## 3.1 Définition

Loi de Fourier (1804 pour la théorie et 1822 pour l'expérimentation) : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad } T}$$

Avec :

$$\lambda : \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}$$



**Joseph Fourier**  
(1768 - 1830)

# 3. Conduction en régime permanent

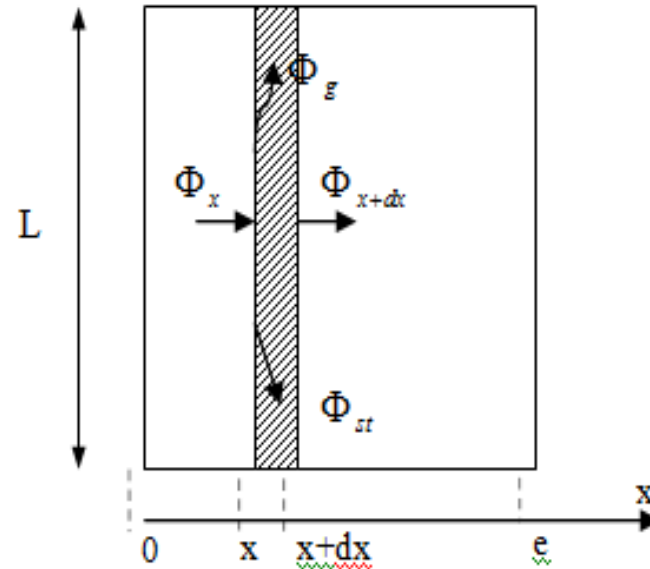
## 3.2 L'équation de la chaleur (régime variable)

$$\Phi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_x$$

$$\Phi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\Phi_g = g \cdot V = g \cdot S \cdot dx$$

$$\Phi_{st} = \rho V C \frac{\partial T}{\partial t} = \rho \cdot S \cdot dx \cdot C \frac{\partial T}{\partial t}$$



## 3. Conduction en régime permanent

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + g = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

Loi de conservation appliquée  
à la chaleur pour 1 m<sup>3</sup> de  
matière

Terme de flux + création intérieure = variation temporelle

Si pas de création intérieure (g=0) : équation de la chaleur  
1D

$$\lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$a \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

### 3.3 L'équation de la chaleur (régime variable)

En tridimensionnel :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\lambda \cdot \nabla^2 T + g = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

équation de la chaleur : cas général

$$a \cdot \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Opérateur Laplacien  
d'un scalaire (ici le  
champ T) :

$$\nabla^2 T = \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

ATTENTION :  
Laplacien  $\neq$  delta

En régime permanent : équation de Laplace :

$$\Delta T = 0$$

# 3. Conduction en régime permanent

## 3.4 Cas d'un mur

Equation de Laplace (pas de génération dans le mur)

$$\nabla^2 T = \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

1D

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = C1 \rightarrow$$

$$T(x) = C1.x + C2$$

C1?

C2?

C.A.L.??

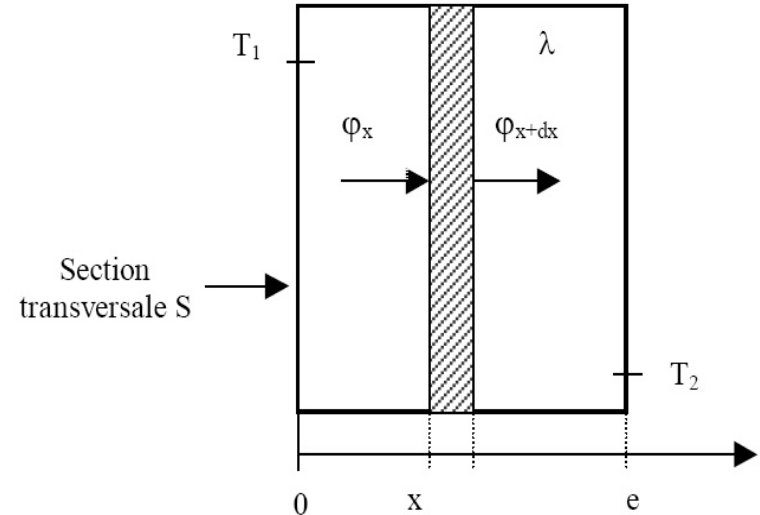
$$x = 0 \rightarrow T(0) = T_1 = C2$$

$$x = e \rightarrow T(e) = T_2 = C1.e + C2$$

$$C2 = T_1$$

$$C1 = \frac{T_2 - T_1}{e}$$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e}.x + T_1$$



# 3. Conduction en régime permanent

## 3.4 Cas d'un mur

CORRECTIO  
N

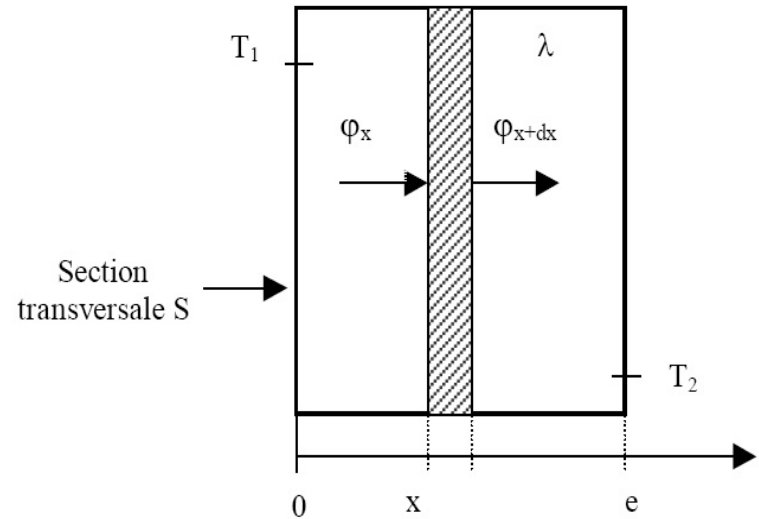
Equation de Laplace (pas de génération dans le mur) 1D

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = C_1$$

$$T(x) = C_1 \cdot x + C_2$$

$$\int \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} + C_1$$



### Conditions limites à utiliser

**Condition 1 : en  $x=0$ ,  $T=T_1$**   $T_1 = C_1 \cdot 0 + C_2$

$$C_2 = T_1$$

**Condition 2 : en  $x=e$ ,  $T=T_2$**   $T_2 = C_1 \cdot e + T_1$

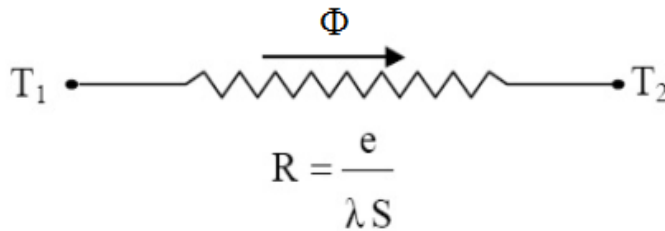
$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{e}$$

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{e} \cdot x + T_1$$

Or  $\varphi = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$  donc  $\varphi = -\lambda \cdot C_1$

# 3. Conduction en régime permanent

## 3.5 Analogie électrique



Thermique	Electricité
	Flux de charges électriques (courant électrique) Potentiel électrique Différence de potentiel électrique (tension) Conductivité électrique $\sigma_e$

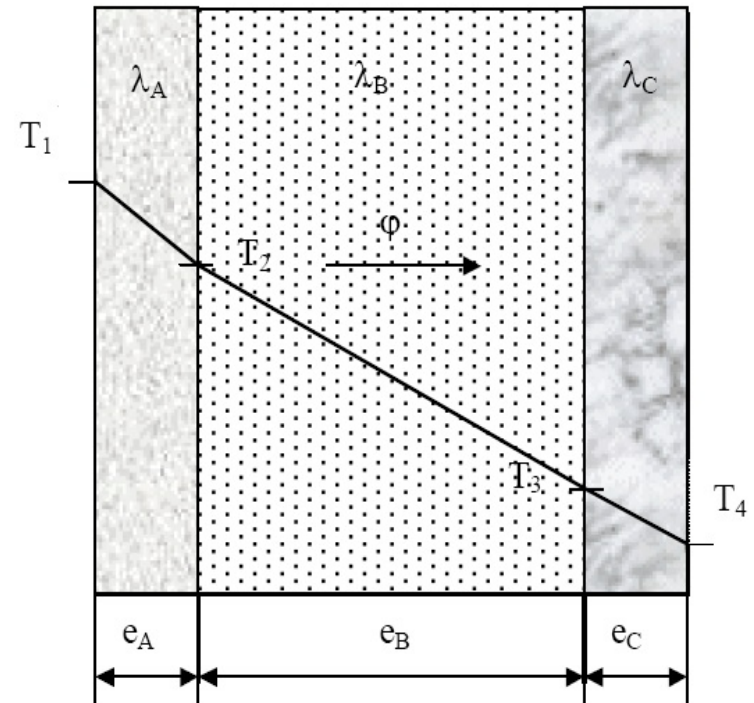
# 3. Conduction en régime permanent

## 3.6 Murs multi-couches

Couches en « série »

Résistances ?

Schéma équivalent ?



$$R_{eq} = \sum R_i$$

➤ Démonstration

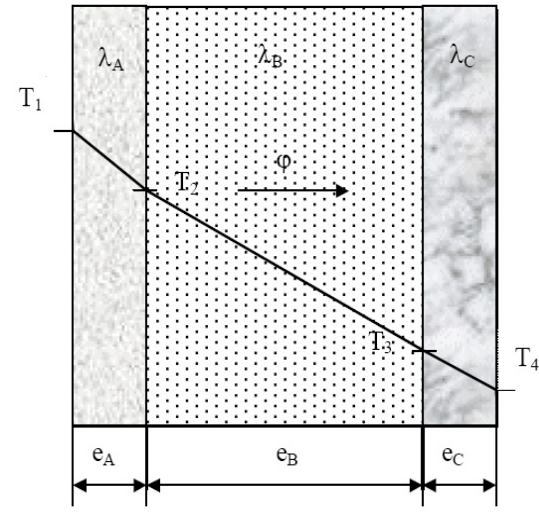


On cherche une résistance équivalente surfacique  $R_{eq}$  (donc en  $m^2.K/W$ ) telle que :

$$\Phi = S \cdot \frac{(T_1 - T_4)}{R_{eq}}$$

$$\Phi = \Phi_A = \Phi_B = \Phi_C$$

$$\Phi = S_A \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e_A}{\lambda_A}} = S_B \cdot \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{e_B}{\lambda_B}} = S_C \cdot \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{e_C}{\lambda_C}}$$



$$T_2 = \frac{\Phi}{S} \cdot \frac{e_B}{\lambda_B} + T_3 \quad \text{or} \quad T_3 = \frac{\Phi}{S} \cdot \frac{e_C}{\lambda_C} + T_4 \quad \text{Donc} \quad T_2 = \frac{\Phi}{S} \cdot \left( \frac{e_B}{\lambda_B} + \frac{e_C}{\lambda_C} \right) + T_4$$

$$\Phi = S \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e_A}{\lambda_A}} = S \cdot \frac{\left( T_1 - \frac{\Phi}{S} \cdot \left( \frac{e_B}{\lambda_B} + \frac{e_C}{\lambda_C} \right) - T_4 \right)}{\frac{e_A}{\lambda_A}} \quad \text{Soit} \quad \Phi \cdot \frac{e_A}{\lambda_A} = S \cdot (T_1 - T_4) - \Phi \cdot \left( \frac{e_B}{\lambda_B} + \frac{e_C}{\lambda_C} \right) \quad \text{Soit} \quad \Phi \cdot \left( \frac{e_A}{\lambda_A} + \frac{e_B}{\lambda_B} + \frac{e_C}{\lambda_C} \right) = S \cdot (T_1 - T_4)$$

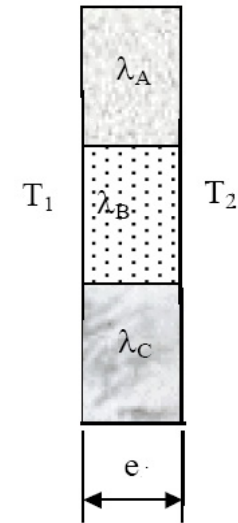
$$\Phi = S \cdot \frac{(T_1 - T_4)}{\frac{e_A}{\lambda_A} + \frac{e_B}{\lambda_B} + \frac{e_C}{\lambda_C}} \quad \text{D'où :} \quad \Phi = S \cdot \frac{(T_1 - T_4)}{R_A + R_B + R_C}$$

On constate bien, par identification, que  $R_{eq} = R_A + R_B + R_C$

### 3.5 Murs multi-couches

Couches en « parallèle »

Résistances ?  
Schéma équivalent ?

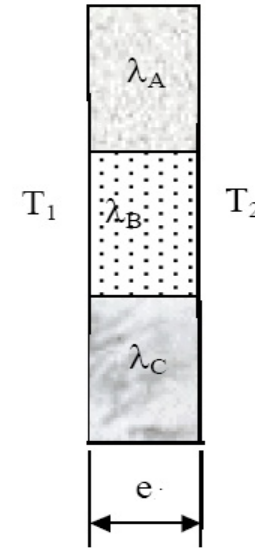


$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i}$$

➤ Démonstration

On cherche une résistance équivalente surfacique  $R_{eq}$  (donc en  $m^2.K/W$ ) telle que :

$$\Phi = S \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{R_{eq}}$$



$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B + \Phi_C$$

$$\Phi = S_A \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e_A}{\lambda_A}} + S_B \cdot \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{e_B}{\lambda_B}} + S_C \cdot \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{e_C}{\lambda_C}}$$

$$\Phi = (T_1 - T_2) \cdot \left( \frac{1}{\frac{e_A}{\lambda_A \cdot S_A}} + \frac{1}{\frac{e_B}{\lambda_B \cdot S_B}} + \frac{1}{\frac{e_C}{\lambda_C \cdot S_C}} \right) = S \cdot (T_1 - T_2) \cdot \left( \frac{1}{\frac{e_A}{\lambda_A \cdot S_A} \cdot S} + \frac{1}{\frac{e_B}{\lambda_B \cdot S_B} \cdot S} + \frac{1}{\frac{e_C}{\lambda_C \cdot S_C} \cdot S} \right)$$

$$\Phi = S \cdot (T_1 - T_2) \cdot \left( \frac{1}{R_A \cdot \frac{S}{S_A}} + \frac{1}{R_B \cdot \frac{S}{S_B}} + \frac{1}{R_C \cdot \frac{S}{S_C}} \right)$$

On constate bien, par identification, que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i \frac{S}{S_i}} \quad (\text{en } m^2.K/W)$$

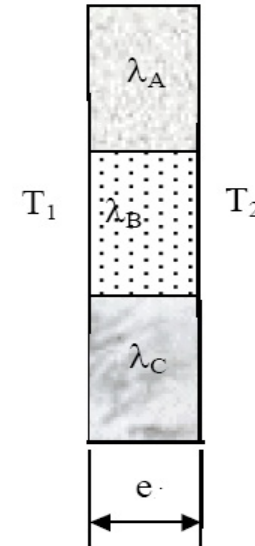
Raisonnement en résistances surfaciques ( $m^2.K/W$ ) :

$$R = \frac{e}{\lambda}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i \frac{S}{S_i}}$$

Si on cherche désormais une résistance équivalente non « surfacique »  $R_{eq}$  (en K/W donc) telle que :

$$\Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{eq}}$$



$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B + \Phi_C$$

$$\Phi = S_A \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{e_A}{\lambda_A}} + S_B \cdot \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{e_B}{\lambda_B}} + S_C \cdot \frac{(T_3 - T_4)}{\frac{e_C}{\lambda_C}}$$

$$\Phi = (T_1 - T_2) \cdot \left( \frac{1}{\frac{e_A}{\lambda_A \cdot S_A}} + \frac{1}{\frac{e_B}{\lambda_B \cdot S_B}} + \frac{1}{\frac{e_C}{\lambda_C \cdot S_C}} \right) = (T_1 - T_2) \cdot \left( \frac{1}{\frac{e_A}{\lambda_A \cdot S_A}} + \frac{1}{\frac{e_B}{\lambda_B \cdot S_B}} + \frac{1}{\frac{e_C}{\lambda_C \cdot S_C}} \right)$$

$$\Phi = (T_1 - T_2) \cdot \left( \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \right)$$

On constate bien, par identification, que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i} \quad (\text{en K/W})$$

Raisonnement en résistances (K/W) :

$$R = \frac{e}{\lambda \cdot S}$$

**Couches en « série »**

(Valable en  $m^2.K/W$  comme en  $K/W$ )

$$R_{eq} = \sum R_i$$

**Couches en « parallèle »**

R en  $K/W$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i \frac{S}{S_i}}$$

R en  $m^2.K/W$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i}$$

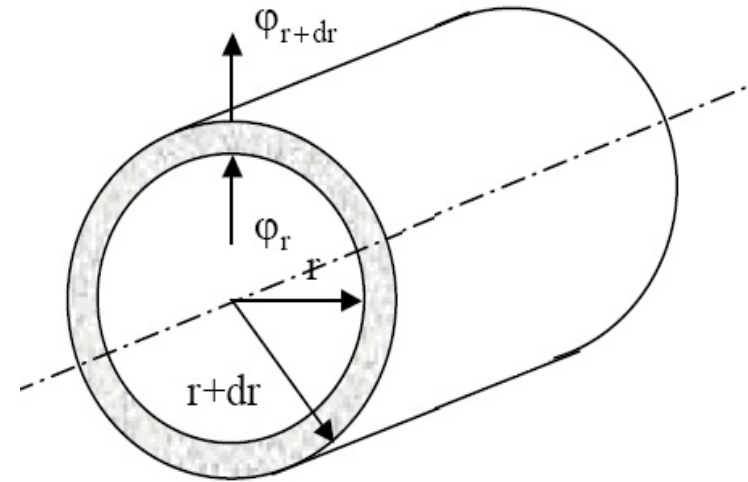
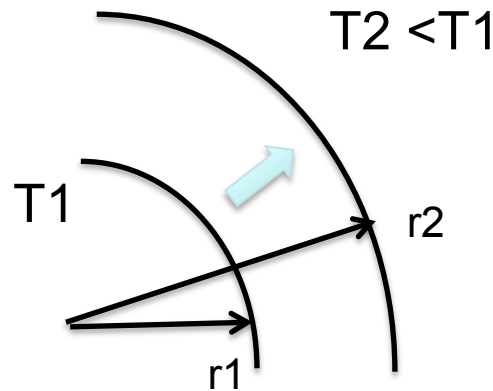
# 3. Conduction en régime permanent

## 3.6 Cas d'un cylindre creux

$$S_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot L$$

$$S_2 = 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot L$$

$$r_1 < r < r_2$$



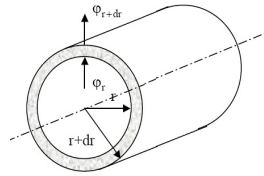
**CORRECTION**

$$\Phi = - \lambda \cdot S \cdot dT/dr = - 2 \pi \cdot \lambda \cdot L \cdot r \cdot dT/dr$$

Attention  $S = f(r)!!!!$

# 3. Conduction en régime permanent

$$\vec{\varphi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T$$



$$\Phi = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\Phi = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\Phi \frac{\partial r}{r} = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \partial T$$

$$\Phi \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial r}{r} = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \int_{T(r_1)}^{T(r_2)} \partial T$$

$$\Phi \cdot \left[ \text{Ln } r \right]_{r_1}^{r_2} = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \left[ T \right]_{T_1}^{T_2}$$

$$\Phi \cdot (\text{Ln } r_2 - \text{Ln } r_1) = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\Phi \cdot \text{Ln} \left( \frac{r_2}{r_1} \right) = -\lambda \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_2 - T_1)$$

$$\Phi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L \cdot (T_1 - T_2)}{\text{Ln} \left( \frac{r_2}{r_1} \right)}$$

$$R_{Th} = \frac{\text{Ln}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} = \frac{\text{Ln}\left(\frac{e}{r_1}\right)}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda}$$

$$e = r_2 - r_1$$

$$e \ll r_1 \rightarrow x = \frac{e}{r_1} \ll 1$$

$$\text{Ln}(x) = \text{Ln}(1) + x + \dots$$

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda \cdot S}$$

A partir d'un ration  $e/r_1$  de l'ordre de 1/10  
On peut admettre la résistance d'un mur plan

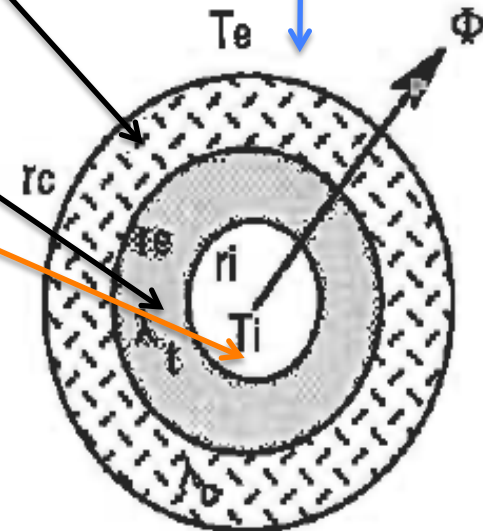


$$R_c = 1/(2 \pi \cdot r_i \cdot L \cdot h_i) + \ln(r_e/r_i)/(2 \pi \lambda_t \cdot L) + \ln(r_c/r_e)/(2 \pi \lambda_c \cdot L) + 1/(2 \pi \cdot r_o \cdot L \cdot h_e)$$

Résistance due à l'épaisseur de l'isolant

Résistance due à l'augmentation de la surface externe

$$R_c - R_{nc} = \left\{ \left[ \ln(r_c/r_e) \right] / \lambda_c + (1/r_c - 1/r_e) / h_e \right\} / (2 \pi \cdot L)$$



$r_c$	$r_e$	$\lambda_c / \lambda_e$	$(r_c)_{\min}$
$d(R_c - R_{nc}) / dr_c$	-	0	+
$R_c - R_{nc}$	0		0

Isolation effective

# Chapitre 8

## Ailettes

# 4. Transfert thermique par convection

## Définition :

Transfert simultané de chaleur et de masse.

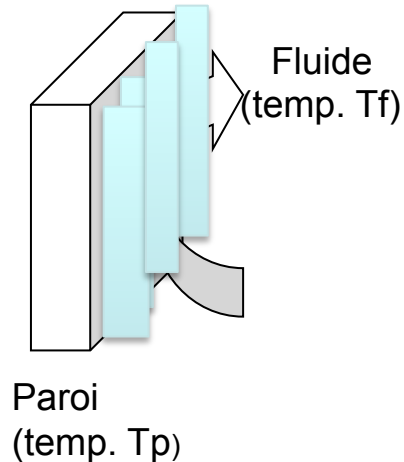
On distingue la convection naturelle, lorsque le fluide se déplace librement (l'air au contact d'un mur) de la convection forcée (liquide en mouvement dans un tube).

### 4.1 Loi de Newton

$$\Phi = h_c \cdot S \cdot (T_p - T_f)$$

h est fonction de :

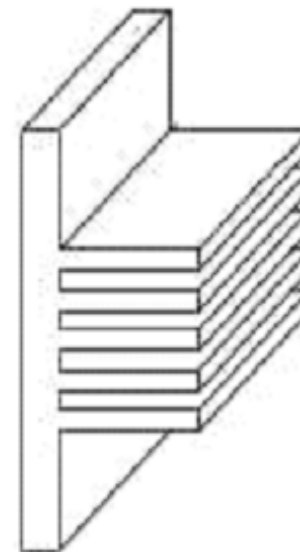
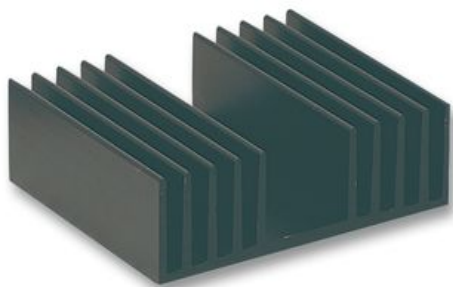
la nature du fluide, sa température, sa vitesse et les caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

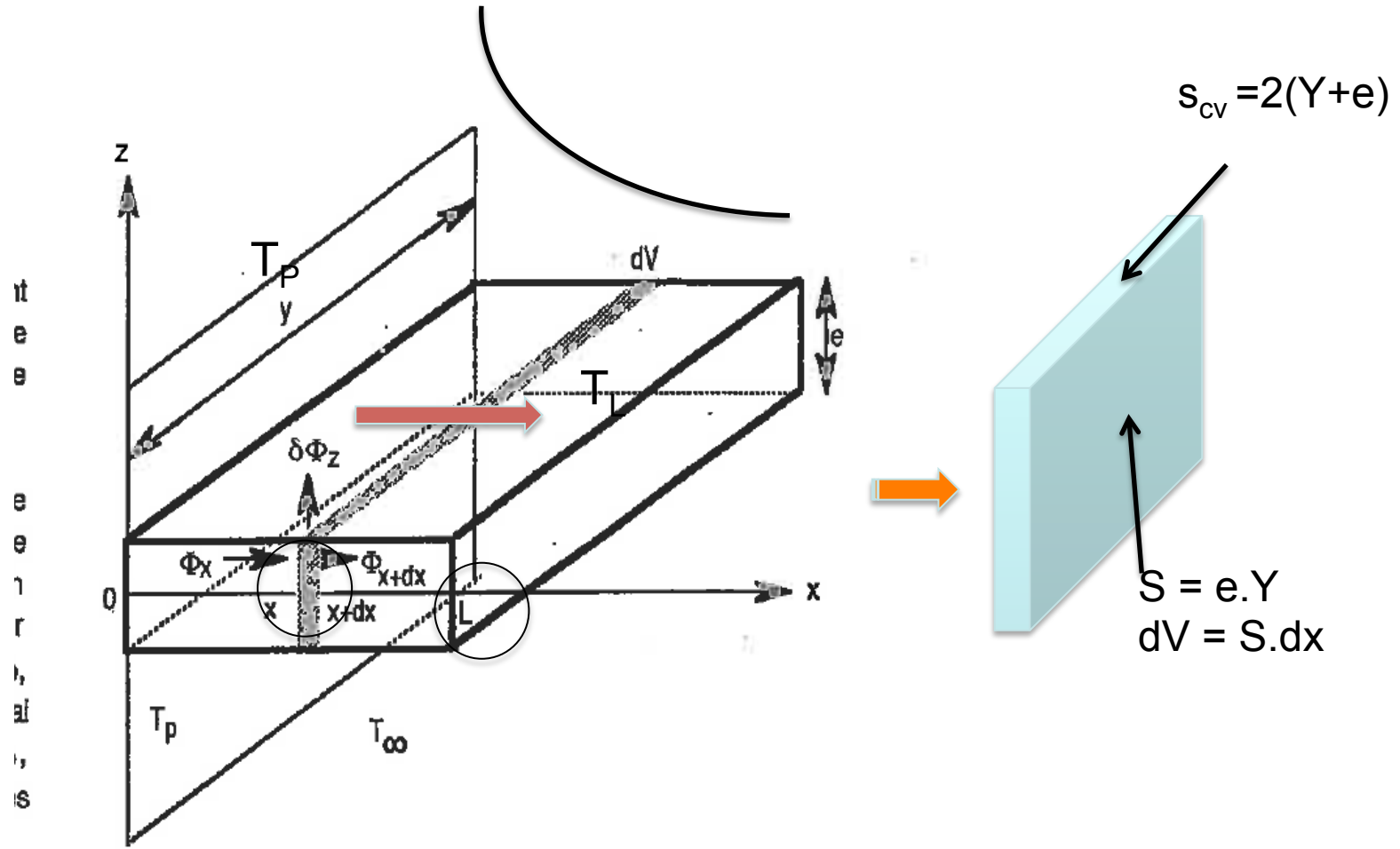


# 8. Ailettes

## 1. Principe

**Le but des ailettes est de créer une bien plus grande surface d'échange.**





## 2. Théorie de l'ailette

$$\Phi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T(x)}{\partial x}\right)_x \quad \Phi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T(x)}{\partial x}\right)_{x+dx}$$

$$\Phi_{cv} = h \cdot P \cdot dx \cdot (T(x) - Te)$$

$$\Phi_x = \Phi_{x+dx} + \Phi_{CV}$$

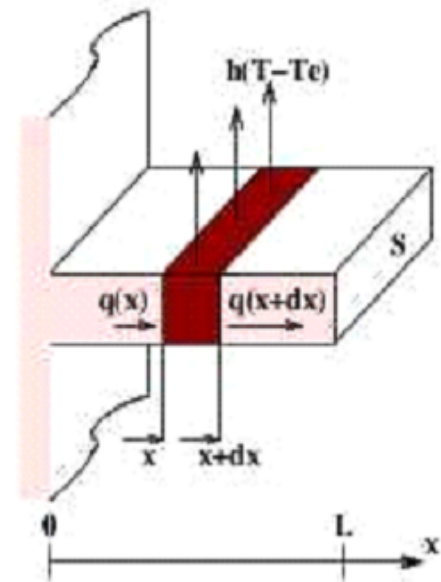
On pose :  $\omega^2 = \frac{hP}{\lambda S}$        $\theta = (T(x) - Te)$

➤ Déterminer l'équation différentielle de  $\theta$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - \omega^2 \theta = 0$$

Admet pour solution

$$\theta = A \cdot e^{\omega \cdot x} + B \cdot e^{-\omega \cdot x}$$

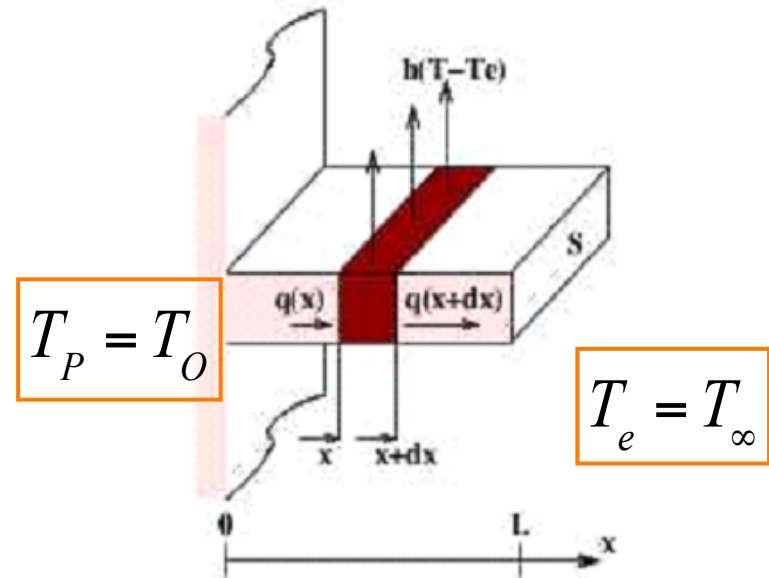


## 2. Théorie de l'ailette

$$\theta = A \cdot e^{\omega \cdot x} + B \cdot e^{-\omega \cdot x}$$

Et on rappelle que :  $\theta = (T(x) - T_e)$

➤  $T(x=0)=T_0$  et  $T(x=L)=T_e$



$$\theta(0) = A \cdot e^0 + B \cdot e^0 = A + B$$

$$T_e - T_0 = A + B$$

$$\theta(L) = A \cdot e^{\omega \cdot L} + B \cdot e^{-\omega \cdot L} = A \cdot e^{\omega \cdot L}$$

$$\theta(L) = A \cdot e^{\omega \cdot L} = 0$$

$$0 = A$$

$$T(x) - T_e = (T_e - T_0) \cdot e^{-\omega \cdot x}$$

$$T(x) = (T_e - T_0) \cdot e^{-\omega \cdot x} + T_e$$



$$\Phi_x - \Phi_{x+dx} - \delta\Phi_z = 0$$

soit

$$- \lambda.s.(dT/dx)_x + \lambda.s.(dT/dx)_{x+dx} - h.p.dx.(T - T_\infty) = 0$$

$$- \lambda.s.(dT/dx) + \lambda.s.d[T + (dT/dx).dx]/dx - h.p.dx.(T - T_\infty) = 0$$

$$\lambda.s.(d^2T/dx^2).dx - h.p.dx.(T - T_\infty) = 0$$

$$\alpha^2 = hp/\lambda s$$

$$d^2T/dx^2 - \alpha^2.(T - T_\infty) = 0$$

## 2. Théorie de l'ailette

Flux de chaleur total évacué par l'ailette :

$$\Phi_c = h \cdot P \cdot dx \cdot (T(x) - T_e)$$

➤ à intégrer de ..... (après avoir remplacé  $T(x)$  par son expression)

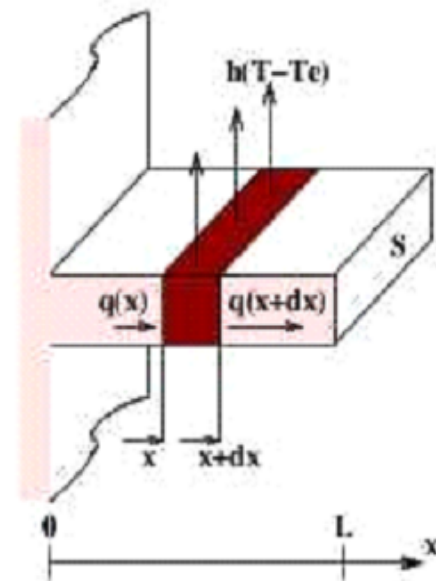
$$\Phi_c = \sqrt{h \cdot P \cdot \lambda \cdot S} \cdot (T_e - T_0) \cdot (1 - e^{-\omega L})$$

Efficacité de l'ailette :

On compare le flux évacué  $\Phi$  à celui qui serait évacué par une ailette qui serait entièrement à température  $T_0$  ( $\Phi_{\max}$ ).

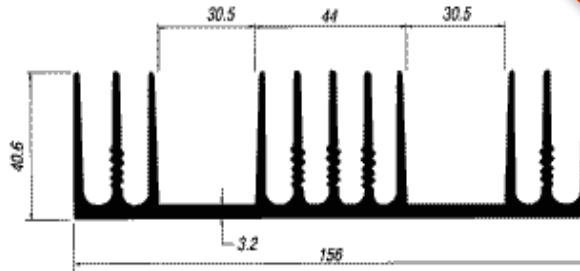
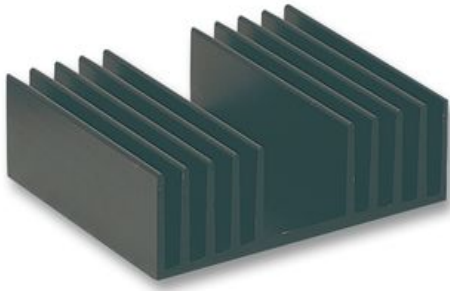
$$\eta = \frac{\Phi}{\Phi_{\max}}$$

$$\Phi_{\max} = h \cdot P \cdot L \cdot (T_0 - T_e)$$



## Dissipateurs informatiques

Voir la résistance thermique maximale pour le problème donné.  
Affichée en **°C/W**



430AB

