UNIVERSITE D'ORLEANS | **Année Universitaire 2025-2026**
UFR Sciences et Techniques | **Master Physique Fondamentale et Appliquée**

Physique Statistique
Travaux Dirigés n° 3

Ensemble Microcanonique

Exercice 1 : Système à deux niveaux
On considère un système macroscopique Σ formé de N particules susceptibles de n'occuper que deux états d'énergie $-\varepsilon_0$ et ε_0. Il s'agit par exemple d'un ensemble de N spins 1/2 placés dans un champ magnétique extérieur B_0, auquel cas on a $\varepsilon_0 = \mu_B B_0$ avec $\mu_B = e\,\hbar/2m_e$ le magnéton de Bohr et $B_0 = \|B_0\|$ la norme du champ. On désigne par n_1 et n_2 le nombre de particules ayant des énergies égales respectivement à $-\varepsilon_0$ et ε_0, et par M la différence $n_2 - n_1$.

1. Exprimer l'énergie E d'un état macroscopique du système.
2. Déterminer le nombre $\Omega\ (E,N)$ de configurations microscopiques correspondant à l'énergie macroscopique E, le nombre N de particules étant fixe.
3. Définir l'entropie S du système. Que peut-on dire du système lorsque $|M| = N$? Que vaut alors l'entropie? Dans l'hypothèse où $n_1 >> 1$ et $n_2 >> 1$, déterminer l'entropie S en fonction de N et E. On rappelle la formule de Stirling, valable dans la limite de N grand :

$$\ln N! \approx N \ln N - N$$

4. Calculer la température microcanonique T. Montrer qu'on peut l'exprimer sous la forme :
$\frac{1}{T} = \frac{k_B}{2\varepsilon_0} ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ avec $x = \frac{E}{N\varepsilon_0}$ et où k_B est la constante de Boltzmann.
En supposant que l'on puisse préparer le système dans un état d'énergie positive, quel résultat obtiendra-t-on si l'on essaie de déterminer sa température avec un thermomètre à gaz ?
5. Déterminer la capacité calorifique C du système, en fonction de la température T.
6. Dans le cas d'un ensemble de spins 1/2, calculer l'aimantation. Dans quel domaine de champ magnétique peut-on considérer que l'aimantation est une fonction linéaire de B_0 ?
Définir la susceptibilité magnétique χ. Comment varie-t-elle avec la température ?

Exercice 2 : Gaz parfait classique
On considère un gaz parfait classique constitué de N atomes de masse m discernables, sans structure interne et sans interaction à distance, contenus dans un volume V. Le Hamiltonien de ce gaz dépend alors simplement des quantités de mouvement pi,

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m}$$

1. Calculer, dans le cas N = 1, la densité d'états microscopiques $\rho(\varepsilon)$. On pourra passer par le nombre $W(\varepsilon)$ d'états dont l'énergie interne est inférieure ou égale à ε.
2. Traiter le cas N quelconque en utilisant le fait que le volume d'une hypersphère de rayon r en dimension n est donné par :
$\nu_n = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Pi\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ où $\Pi(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ est la fonction 'gamma'
On rappelle que cette fonction possède la propriété $\Pi(n+1) = n!$
3. En déduire l'entropie $S(E,N,V)$. On justifiera à ce propos que pour $N >> 1$, il revient au même de définir l'entropie comme $S = k_B\ ln\ \Omega$, $S = k_B\ ln\ \rho$ ou $S = k_B\ lnW$. Toujours pour $N >> 1$, déterminer l'énergie interne du gaz parfait en fonction de la température, puis retrouver l'équation d'état.
