Fibonacci game

Contents

1 Le tour de magie **1**

2 Quand la magie se sert des maths... **1**
2.1 La somme des lignes 1 à 10 divisée par le nombre insrit sur la ligne n°7 vaut toujours 11 . . . 2
2.2 Le nombre insrit sur la ligne n°10 divisé par le nombre insrit sur la ligne n°7 commence par 1.61 2

3 Pour aller plus loin **3**
3.1 La suite de Fibonacci 3
3.2 Lien avec notre problème 4
3.3 Combien de lignes pour connaitre k chiffres? 5

1 Le tour de magie

Pour réaliser ce petit tour de magie, vous n'avez besoin que de papier et d'un stylo... Pour le préparer, prenez soin d'inscrire à l'avance sur deux morceaux de papier les énoncés suivants :

$$\frac{l_1 + \cdots + l_{10}}{l_7} = 11$$

et

$$\frac{l_{10}}{l_9} = 1.61...$$

Commencez en confiant à deux membres du public ces morceaux de papier pliés pour qu'ils ne puissent en lire le contenu pour le moment.

Voici les consignes pour le public:

> Il vous faut maintenant de quoi ecrire, une feuille comportant dix lignes vides (numerotees verticalement de un a dix). Choisissez deux nombres positifs et inscrivez sur les deux premieres lignes. Completez ensuite chacune des lignes suivantes en y indiquant la somme des deux lignes qui la precedent. Vous mettrez ainsi sur la troisieme ligne la somme des nombres figurant sur les lignes un et deux, sur la quatrieme ligne la somme des nombres inscrits sur les lignes deux et trois, et ainsi de suite jusqu'a avoir rempli la dixieme ligne (somme des nombres figurant sur les lignes huit et neuf). Calculez enfin:
> - le quotient du resultat de la ligne dix par celui de la ligne neuf
> - la somme des résultats obtenus sur toutes les lignes divisée par le résultat se trouvant sur la ligne 7.

Une fois que chaque participant à fini faites lire à deux membres du public ce que vous avez écrit sur les morceaux de papier. Mais comment avez-vous pu trouver le résultat à l'avance?

2 Quand la magie se sert des maths...

Dévoilons maintenant les secrets de ce tour de magie grâce aux mathématiques.

2.1 La somme des lignes 1 à 10 divisée par le nombre insrit sur la ligne n°7 vaut toujours 11

Soient X et Y les nombres choisis par votre ami. Ils figurent donc respectivement sur les lignes 1 et 2. Le nombre inscrit sur la ligne n°3 étant la somme des deux précédents, il s'agit de $X + Y$. De même, on trouve l'expression du nombre figurant à la ligne n°4 : $(X + Y) + Y = X + 2Y$. On omplète en suivant le même procédé l'ensemble des 10 lignes ce qui donne :

1) X
2) Y
3) $X + Y$
4) $X + 2Y$
5) $2X + 3Y$
6) $3X + 5Y$
7) $5X + 8Y$
8) $8X + 13Y$
9) $13X + 21Y$
10) $21X + 34Y$.

On peut ensuite calculer la somme des 10 lignes : $55X + 88Y$. On voit alors que

$$55X + 88Y = 11 \times 5X + 11 \times 8Y = 11(5X + 8Y),$$

ce qui assure que la somme des lignes 1 à 10 divisée par le nombre insrit sur la ligne n°7 $(5X + 8Y)$ vaut toujours 11, quelles que soient les valeurs prises par X et Y.

2.2 Le nombre insrit sur la ligne n°10 divisé par le nombre insrit sur la ligne n°7 commence par 1.61

Afin de prouver la deuxième propriété sur laquelle repose le tour de magie, démontrons dans un premier temps le fait suivant :

Lemma 2.1. *Si A, B, C et D sont quatre réels positifs tels que $C > 0$, $D > 0$ et $\frac{A}{C} \leq \frac{B}{D}$, alors*

$$\frac{A}{C} \leq \frac{A+B}{C+D} \leq \frac{B}{D}.$$

Proof. Montrons tout d'abord que $\frac{A}{C} \leq \frac{A+B}{C+D}$. Ce résultat provient de la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} \frac{A+B}{C+D} &= \frac{A}{C}\frac{C}{C+D} + \frac{B}{C+D} \\ &= \frac{A}{C}\left(1 - \frac{D}{C+D}\right) + \frac{B}{C+D} \\ &= \frac{A}{C} + \frac{BC - AD}{C(C+D)}. \end{aligned}$$

Il suffit ensuite de remarquer que le terme $\frac{BC-AD}{C(C+D)}$ est positif puisque A,B,C et D sont positifs et que

$$\frac{A}{C} \leq \frac{B}{D} \Rightarrow BC - AD \geq 0.$$

L'inégalité $\frac{A+B}{C+D} \leq \frac{B}{D}$ se montre de manière très similaire. En effet, en inversant les rôles de A (respectivement de C) et de B (respectivement de D) on obtient $\frac{A+B}{C+D} = \frac{B}{D} + \frac{AD-BC}{D(D+C)}$ et le terme $\frac{AD-BC}{D(D+C)}$ est négatif pour les raisons évoquées plus haut pour prouver que le terme $\frac{BC-AD}{C(C+D)}$ est positif. □

La propriété que nous venons de montrer permet de prouver que le quotient de la ligne n°10 par la ligne n°9 peut être encadré de la manière suivante :

$$1,615385 \approx \frac{21}{13} \leq \frac{21X + 34Y}{13X + 21Y} \leq \frac{34}{21} \approx 1,619048,$$

en l'utilisant avec $A = 21X$, $B = 34Y$, $C = 13X$ et $D = 21Y$.

Et voilà donc d'où provient la deuxième propriété que nous avons utilisée.

Vous connaissez maintenant les secrets de ce tour de magie. À vous de jouer et d'épater vos amis en utilisant des astuces mathématiques!

3 Pour aller plus loin

Il est même possible d'aller un peu plus loin grâce aux mathématiques. Supposons que l'on ontinue à remplir notre feuille jusqu'à obtenir n lignes. On peut alors montrer que, lorsque n devient grand, le quotient de la ligne n par la ligne $n-1$ se rapproche, quelles que soient les valeurs de X et de Y, du nombre d'or :

$$\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618034.$$

Ce nombre est ainsi appelé en raison du grand nombre de problèmes mathématiques dans lesquels il intervient (il est notamment une des racines du polynôme $x^2 - x - 1$) ainsi que des nombreux autres domaines dans lequel on le retrouve : architecture, biologie, ...

3.1 La suite de Fibonacci

Commençons par définir la suite de Fibonacci.

Definition 3.1. La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \geq 2,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

L'équation de récurrence $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ permet de trouver une expression explicite de u_n via la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Il existe deux constantes réelles a_1 et a_2 telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_1 x_1^n + a_2 x_2^n,$$

avec x_1 et x_2 les racines du polynôme $x^2 - x - 1$.

Que valent x_1 et x_2? Ce sont les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$. Or on a

$$x^2 - x - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 = (x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$$

On en conclut alors que les racines de $x^2 - x - 1$ sont $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On remarque que x_1 n'est autre que le nombre d'or ϕ. Nous noterons par la suite $\phi := x_1$ et $\phi_c := x_2$.

On remarquera facilement que les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ impliquent

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1\phi + a_2\phi_c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -a_1 \\ a_1\frac{2\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \phi_c^n\right). \tag{1}$$

3.2 Lien avec notre problème

On montre facilement que, quelques soient X et Y, pour $n \geq 1$ le résultat r_n obtenu à la ligne n vérifie

$$(\mathcal{H}_n) : r_n = u_{n-1}X + u_nY.$$

Proof. **Initialisation:**
Pour $n = 1$, on a vu que $r_1 = Y$ et $u_0X + u_1Y = 0 \times X + 1 \times Y = Y$.
Pour $n = 2$, on a vu que $r_2 = X + Y$ et $u_1X + u_2Y = 1 \times X + 1 \times Y = X + Y$.
Donc $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ sont vraies.

Hérédité:
Imaginons que pour tout $1 \leq p \leq n$ on ait $(\mathcal{H}_p) : r_p = u_{p-1}X + u_pY$. Prouvons $(\mathcal{H}_{n+1}) : r_{n+1} = u_nX + u_{n+1}Y$.

On a par définition:

$$r_{n+1} = r_n + r_{n-1} \overset{(\mathcal{H}_n)et(\mathcal{H}_{n-1})}{=} u_{n-1}X + u_nY + u_{n-2}X + u_{n-1}Y = (u_{n-1} + u_{n-2})X + (u_n + u_{n-1})Y = u_nX + u_{n+1}Y.$$

La propriété $(\mathcal{H}_n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

□

A partir de ce que nous venons de prouver et du Lemme 1.1 on obtient, quelque soient X et Y :

$$\forall n \geq 2,\ \min\left(\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}, \frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \leq \frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{u_{n-1}X + u_nY}{u_{n-2}X + u_{n-1}Y} \leq \max\left(\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}, \frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \tag{2}$$

Prouvons enfin que les quotients $\frac{r_n}{r_{n-1}}$ convergent vers le nombre d'or.

Prouvons pour commencer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \phi$.

Proof. En utilisant (1) on obtient

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^n - \phi_c^n\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^{n-1} - \phi_c^{n-1}\right)} = \frac{\left(\phi^n - \phi_c^n\right)}{\left(\phi^{n-1} - \phi_c^{n-1}\right)} = \frac{\phi^n\left(1 - \left(\frac{\phi_c}{\phi}\right)^n\right)}{\phi^{n-1}\left(1 - \left(\frac{\phi_c}{\phi}\right)^{n-1}\right)} = \phi\frac{\left(1 - \left(\frac{\phi_c}{\phi}\right)^n\right)}{\left(1 - \left(\frac{\phi_c}{\phi}\right)^{n-1}\right)}.$$

La limite s'obtient alors facilement en remarquant que $|\frac{\phi_c}{\phi}| = |\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}| = |-1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}| < 1$.

□

Enfin à partir de (2) et $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = \phi$ on prouve facilement par le théorème des gendarmes que $\lim_{n\to+\infty} \frac{r_n}{r_{n-1}} = \phi$.

3.3 Combien de lignes pour connaitre k chiffres?

En regardant mieux ce qui a permis de prouver la convergence, on peut voir que celle-ci est exponentielle et par conséquent très rapide... Calculons par exemple les bornes min et max dans (2)

	n	min	max	Ecart
1	1	NA	NA	NA
2	2	NA	NA	NA
3	3	1.000000000000	Inf	Inf
4	4	1.000000000000	2.000000000000	1.000000000000e+00
5	5	1.500000000000	2.000000000000	5.000000000000e-01
6	6	1.500000000000	1.666666666667	1.666666666667e-01
7	7	1.600000000000	1.666666666667	6.666666666667e-02
8	8	1.600000000000	1.625000000000	2.500000000000e-02
9	9	1.615384615385	1.625000000000	9.615384615385e-03
10	10	1.615384615385	1.619047619048	3.663003663004e-03
11	11	1.617647058824	1.619047619048	1.400560224090e-03
12	12	1.617647058824	1.618181818182	5.347593582887e-04
13	13	1.617977528090	1.618181818182	2.042900919306e-04
14	14	1.617977528090	1.618055555556	7.802746566798e-05
15	15	1.618025751073	1.618055555556	2.980448259415e-05
16	16	1.618025751073	1.618037135279	1.138420555313e-05
17	17	1.618032786885	1.618037135279	4.348393268572e-06
18	18	1.618032786885	1.618034447822	1.660936435943e-06
19	19	1.618033813400	1.618034447822	6.344215566223e-07
20	20	1.618033813400	1.618034055728	2.423274287899e-07
21	21	1.618033963167	1.618034055728	9.256084765319e-08
22	22	1.618033963167	1.618033998522	3.535509685015e-08
23	23	1.618033985017	1.618033998522	1.350444533976e-08
24	24	1.618033985017	1.618033990176	5.158239169134e-09
25	25	1.618033988205	1.618033990176	1.970272167640e-09
26	26	1.618033988205	1.618033988958	7.525771117400e-10
27	27	1.618033988670	1.618033988958	2.874589455359e-10
28	28	1.618033988670	1.618033988780	1.097995028232e-10
29	29	1.618033988738	1.618033988780	4.193956293363e-11
30	30	1.618033988738	1.618033988754	1.601940802232e-11

La convergence est assez rapide, on peut alors chercher combien de lignes sont nécessaires pour connaitre les k premiers chiffres du résultat.

Chiffres corrects	1.	1.6	1.61	1.618	1.6180	1.61803	1.618033	1.6180339
Lignes nécessaires	6	7	10	15	15	17	22	22

Pour l'application en ligne, cliquez sur le lien suivant (https://laurent-delsol-idp.shinyapps.io/Fibonacci_Game/).