TD 2-3 : Dynamique des structures : Oscillateur simple (SDOF)

Exercise 1 : *Oscillateur libre non-amorti*

Un ascenseur de masse M est suspendu par un câble d'acier de longueur L, section A et module de Young E

a) Quelle sera la contrainte maximale dans le câble si son extrémité supérieure se coince soudainement en stoppant l'ascenseur lorsqu'il est en train de descendre avec une vitesse constante V.

b) Quelle doit être la rigidité d'un ressort placé en parallèle avec le câble pour que dans les mêmes conditions de l'exercice a, le facteur d'amplification des efforts (F_{AC}) soit inférieure à 3 ?

Le facteur d'amplification des charges est défini telle que $\sigma_{max} = \frac{K.\delta_{st}}{A}.F_{AC}$

Numerical application : M=5tons, L=10m, V=1m/s, A= 10^3 mm^2 E = 115 GPa

Corrigé

Au moment que l'ascenseur se coince, dans un position x, l'ascenseur commencera à s'osciller autour de cette position car il tente de continuer sa descente par inertie, en engendrant une force d'appel dans le sens inverse due à l'élasticité du câble. On note par *u* la déviation de la position de l'ascenseur par rapport à son état d'équilibre (la position où il est coincé) on écrit la solution générale (voir slides du cours sous la forme)

$u(t) = \frac{V_o}{\omega}\sin(\omega t) + u_0\cos(\omega t)$ avec $u_o = 0$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ k étant la rigidité du câble et M la masse de l'ascenseur. Pour une sollicitation en traction (ou compression) $k = \frac{E.A}{L}$

Le déplacement maximal (la déviation maximale de la position d'équilibre) sera $u_{max} = \frac{V_o}{\omega} = V_o\sqrt{\frac{M}{k}} = V_o\sqrt{\frac{M.L}{E.A}}$

La force dynamique maximale sur le câble sera $\mathrm{F}_{max}^{dyn} = ku_{max} = kV_o\sqrt{\frac{M}{k}} = V_o\sqrt{Mk}$

La contrainte maximale sera $\sigma_{max}^{dyn} = \frac{\mathrm{F}_{max}^{dyn}}{A} = \frac{V_o\sqrt{Mk}}{A} = \frac{V_o\sqrt{ME}}{\sqrt{A.L}}$

b) Le facteur d'amplification est défini comme le rapport de la force dynamique sur la charge statique. Cette dernière (en négligeant le poids du câble) est $F^{st} = k.u^{st} = M.g$

$F_{ac} = \frac{V_o\sqrt{Mk_{tot}}}{Mg} = \frac{V_o\sqrt{k_{tot}}}{\sqrt{M}g}$ k_{tot} ici est la rigidité du système (câble + ressort) . En notant par k_r la rigidité du ressort on peut calculer la rigidité totale :

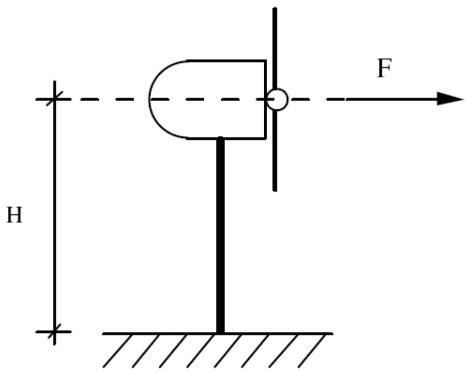
$\frac{1}{k_{tot}} = \frac{1}{k_r} + \frac{1}{k}$ d'où $k_{tot} = \frac{k_r+k}{k.k_r}$

On obtient donc : $\frac{k_r+k}{k.k_r} = \left(\frac{F_{ac}\sqrt{M}g.}{V_o}\right)^2$ ce qui permet de calculer $k_r\left(k\left(\frac{F_{ac}\sqrt{M}g.}{V_o}\right)^2 - 1\right) = k$

$$k_r = \frac{k}{\left(k\left(\frac{F_{ac}\sqrt{M}g.}{V_o}\right)^2 - 1\right)}$$

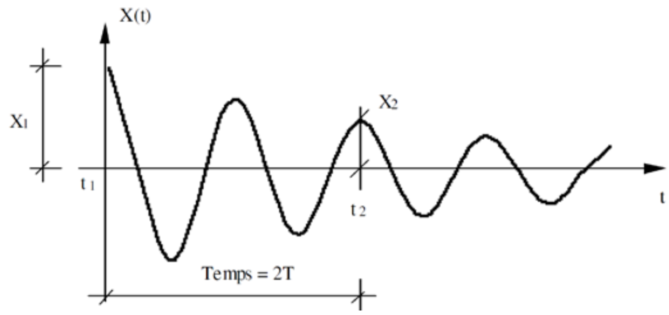
Exercice 2. *Oscillateur libre amorti*

Un éolien est schématiquement présenté sur la figure ci-joint. Massa e colonnes est négligeable en comparaison avec la masse de la turbine.

	Une force latérale F est appliquée selon l'axe de la turbine via un câble. Le déplacement horizontal dû à cette force statique est δ_{st} . Dans un moment donné le câble est coupe instantanément et les vibrations induites ont été enregistrées. A la fin de la deuxième cycle de vibrations le temps est t_2 et l'amplitude des déplacements δ_2 Définir : a) La pulsation naturelle de l'éolien ω_n b) La rigidité K et la masse effective M c) L'amortissement C *Application :F= 890N, t_2 =1,25s, δ_s=2.54cm δ_2=1.63cm*

Corrigé :

Il s'agit d'un système amorti. Schématiquement la situation est présentée ci-dessous :



avec $x_1 = \delta_s$=2.54cm et $x_2 = \delta_2$=1.63cm

On peut déduire directement la période d'oscillation du système amortie $T_D = \frac{t_2}{2} = 0.625\ s$ et donc la fréquence radiale du système amorti : $\omega_D = \frac{2\pi}{T_D}$=10.05 rad/s.

On cherche la fréquence naturelle du système dont la relation avec la fréquence amortie est :

$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$. Il nous faudra donc calculer ξ

Rappelons le taux de diminution de l'amplitude $\delta_k = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+k}}\right) = 2\pi k\xi\frac{\omega}{\omega_D} = 2\pi k\xi\sqrt{1-\xi^2}$

Pour notre cas : $\delta_k = ln\left(\frac{\delta_s}{\delta_2}\right) = ln\left(\frac{2.54}{1.63}\right) = 2\pi k\xi\sqrt{1-\xi^2}$ avec k=2 (le nombre des périodes entre deux mesures)

$2\pi k\xi\sqrt{1-\xi^2} = \delta_k \quad \xi = \frac{\delta_k}{2\pi k\sqrt{1-\xi^2}} \cong \frac{\delta_k}{2\pi k} = \frac{0.44}{2\times 3.14\times 2} = 0.035$

Donc $\omega = \frac{\omega_D}{\sqrt{1-\xi^2}} = 10.06\ rad/s$

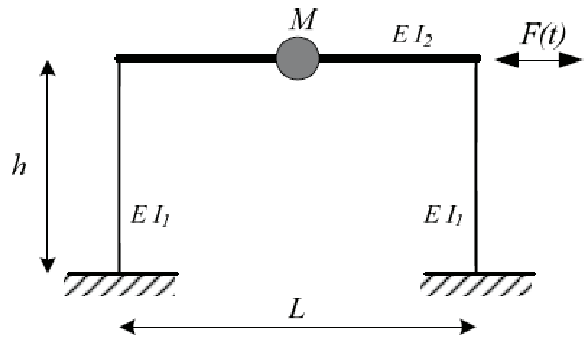
b) Connaissant la force initiale appliquée et les déplacements on obtient facilement : $F = ku$

donc $k = \frac{F}{u} = \frac{890}{2.54\ 10^{-2}} = 35kN/m$

c) On peut calculer la masse effective en connisant $\omega = \sqrt{\frac{M}{k}}$ donc $M = k.\omega^2 = 35\times 10.06^2\times 10^3\ kg$

Exercice 3 *Oscillateur forcé, amorti, force harmonique*

On considère le portique simple de la figure ci-dessous. Le portique est initialement au repos, c-à-d, x(0)=x'(0)=0 quand une force *F(t)* est appliquée en tête de l'un des poteaux du portique. On donne également h=4m, L=12m, M=2000kg, I_1=1150 10^4 mm^4, I_2=infini E= 210GPa, F(t)=F_0sin(ω t) F0= 10 kN et ω = 10 rad/s



Déterminer l'expression du mouvement résultant dans les deux cas suivants (on négligera la masse du portique) : ξ=0   et   ξ=0.02

Corrigé

La réponse totale du portique est donnée par :

$$x(t) = D\cos(\omega_n t - \phi) + \frac{F_0 \,/\, k}{1-(\omega \,/\, \omega_n)^2}\sin\left(\omega t\right)$$

En utilisant la forme trigonométrique de la partie transitoire de la réponse :

$$x(t) = A\sin\left(\omega_n t\right) + B\cos\left(\omega_n t\right) + \frac{F_0 \,/\, k}{1-(\omega \,/\, \omega_n)^2}\sin\left(\omega t\right)$$

La vitesse est obtenu en dérivant par rapport au temps,

$$\dot{x}(t) = A\,\omega_n \cos\left(\omega_n t\right) - B\,\omega_n \sin\left(\omega_n t\right) + \frac{F_0 \,/\, k}{1-(\omega \,/\, \omega_n)^2}\,\omega\cos\left(\omega t\right)$$

La rigidité horizontale du portique :

$$k = 24\frac{EI_1}{h^3} \;;$$

$$k = 905625 \; {}^{N}\!/_{m}$$

La pulsation propre : $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{M}} \quad \omega_n = 21{,}28 \; {}^{rad}\!/_{s}$

Le déplacement statique : $\delta_{st} = \dfrac{F_0}{k} = 11\, mm$

$$\omega / \omega_n = 0,47$$

$$\frac{F_0 / k}{1 - (\omega / \omega_n)^2} = 14\ mm$$

Les coefficients A et B sont déterminés en utilisant les conditions initiales :

$$x(0) = 0 = B$$

$$\dot{x}(0) = 0 = A\omega_n + \frac{F_0 / k}{1 - (\omega / \omega_n)^2}\omega$$

Ce qui donne :

$$A = -6,64\ 10^{-3}\ m \quad et \quad B = 0$$

Donc

$$x(t) = -6,6\ \sin\left(21t\right) + 14\sin\left(10t\right) \quad [mm]$$

b) Avec un amortissement ζ = 0,2 :

La réponse totale du portique est donnée par :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$= D\ e^{-\lambda t}\cos(\nu t - \phi) + \frac{\dfrac{F_0}{k}}{\sqrt{(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\dfrac{\lambda^2}{\omega_n^2}\cdot\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\sin(\omega t - b)$$

Avec : $\lambda = \zeta\ \omega_n$; $\nu = \sqrt{\omega_n^2 - \lambda^2} = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

En utilisant la forme trigonométrique de la partie transitoire de la réponse :

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C\cos\left(\nu t\right) + D\sin\left(\nu t\right)\right) + \frac{\dfrac{F_0'}{k}}{\sqrt{(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\dfrac{\lambda^2}{\omega_n^2}\cdot\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}}}\sin(\omega t - b)$$

$$b = arctg\left(\frac{2\lambda\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Pour un facteur d'amortissement ζ = 0,2, on obtient :

$$\lambda = 4,256$$

$$\nu = 20,85\ rad/$$

$$\frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\frac{\lambda^2}{\omega_n^2}\cdot\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} = 13,72\ 10^{-3}\ m$$

$$b = 0,237\ rad\ (= 13,57°)$$

Les coefficients C et D sont déterminés en utilisant les conditions initiales : $x(0)=0$ *et* $\dot{x}(0) = 0$

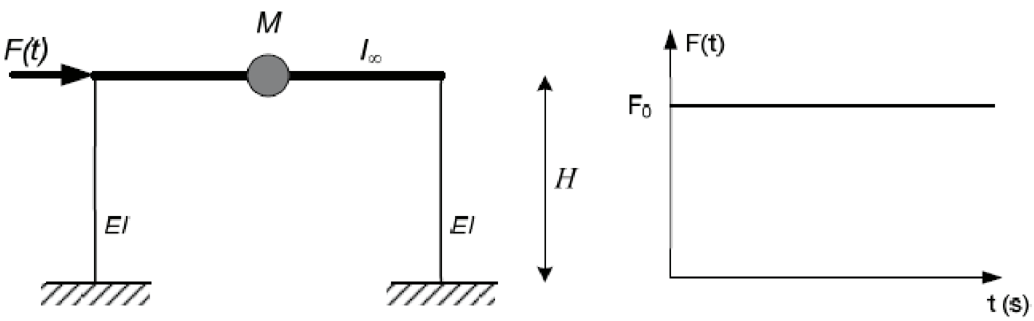
$$C = 3,22\ 10^{-3} \quad et \quad D = -5,74\ 10^{-3}$$

Donc finalement :

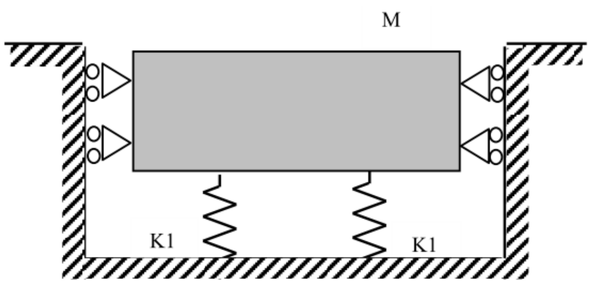
$$x(t) = e^{-4,3t}\left(3,2\cos(21t) - 5,7\sin(21t)\right) + 14\sin(10t - 0.24) \quad [mm]$$

Exercice 4 :Le portique ci dessous est chargé instantanément par une force F dans la direction. Déterminer le déplacement de la tête du portique en fonction du temps ainsi que le facteur d'amplification pour ξ=0 et ξ=0.05. On considère deux cas particulier A) lorsque la force après l'application instantanément est maintenu constante b) lorsque la force après l'application varie comme $F(t) = \begin{cases} F_0\left(1-\frac{t}{t_i}\right) & pour\ t < t_1 \\ 0 & pour\ t > t_1 \end{cases}$ avec t_1=1

Numerical applications F=100kN, I = 5.10^7mm^4 , E = 210GPa M=5000kg H=5m



Exercice 5 : Une fondation antivibratoire est installée dans un hall dont les perturbations ambiantes induisent des vibrations (verticales) d'une fréquence de 24 Hz et d'amplitude de 0.25 mm. Nous voulons que l'amplitude des vibrations du bloc isolé, d'une masse M=1tonne, ne dépasse pas 0.05 mm.



a) Déterminer la fréquence propre du dispositif d'appuis en considérant que les appuis soient parfaits et sans amortissement.

b) Quelle doit être la rigidité K_1 des ressorts pour respecter les limites en déplacements ?

c) On ajoute un amortisseur à ce dispositif. Quelle doit être la nouvelle rigidité des ressorts K_1 si ξ=20% pour les mêmes limites en déplacement

Exercice 6 : Une machine doit être déplacée à l'étage du nouvel hall Darcy. Le planché de l'étage est dimensionné pour un charge règlementaire industriel (soit 4.5kN/m2). La machine a une masse *M* et une emprise au sol A. Au cours du travail la machine génère une force harmonique d'amplitude F_0 et de fréquence *f* 50Hz. La rigidité du socle sur laquelle la machine est installée rigidement est estimé K.

a) Déterminer l'amplitude des déplacements de la machine due à la force harmonique

b) Déterminer la force transmisse au plancher et vérifier si la machine peut être installée à l'étage du bâtiment.

Application numérique : F0=10kN, M=450kg, A=1,5m^2 , épaisseur de la dalle en béton 30 cm